

*La Serie Universitaria de la Fundación Juan March
presenta resúmenes, realizados por el propio autor,
de algunos estudios e investigaciones
llevados a cabo por los becarios de la Fundación
y aprobados por los Asesores Secretarios
de los distintos Departamentos.*

*El texto íntegro de las Memorias correspondientes
se encuentra en la Biblioteca de la Fundación
(Castello, 77. Madrid-6).*

*La lista completa de los trabajos aprobados
se presenta, en forma de fichas,
en los Cuadernos Bibliográficos
que publica la Fundación Juan March.*

*Estos trabajos abarcan las siguientes especialidades:
Arquitectura y Urbanismo; Artes Plásticas;
Biología; Ciencias Agrarias; Ciencias Sociales;
Comunicación Social; Derecho; Economía; Filosofía;
Física; Geología; Historia; Ingeniería;
Literatura y Filología; Matemáticas; Medicina,
Farmacia y Veterinaria; Música; Química; Teología.
A ellas corresponden los colores de la cubierta.*

*Edición no venal de 300 ejemplares,
que se reparte gratuitamente a investigadores,
Bibliotecas y Centros especializados de toda España.*

*Este trabajo fue realizado con una Beca en el Extranjero, 1974, individual.
Departamento de Matemáticas.
Centro de trabajo: Forschungsinstitut für Mathematik. E. T. H. Zürich.*

Fundación Juan March



FJM-Uni. 55-Cas
Una contribución al estudio de l
Castellet Solanas, Manuel.
1031760



Biblioteca FJM

Fundación Juan March (Madrid)

SERIE UNIVERSITARIA



Fundación Juan March

Una contribución al estudio de las teorías de cohomología generalizadas

Manuel Castellet Solanas

FJM

**Uni-
55**

Cas

55

Una contribución al estudio de las teorías de cohomología generalizadas/Manuel Castellet Solanas

Fundación Juan March
Serie Universitaria

55

Una contribución al estudio de las teorías de cohomología generalizadas



Manuel Castellet Solanas



Fundación Juan March
Castelló, 77. Teléf. 225 44 55
Madrid - 6

Fundación Juan March (Madrid)

*La Fundación Juan March no se solidariza
necesariamente con las opiniones de los
autores cuyas obras publica.*

Depósito Legal: M - 15023 - 1978

I.S.B.N. 84 - 7075 - 085 - 2

Ibérica, Tarragona, 34.- Madrid-7

INDICE

Página

1.—	TEORIA K DE LOS COMPLEJOS DE EILENBERG—MACLANE	
1.1.	Algunas definiciones	3
1.2.	Exposición de resultados	4
1.3.	Algunos lemas	6
1.4.	Demostración de los teoremas 1.2.4. y 1.2.5.	10
	Bibliografía	12
2.—	COHOMOLOGIA DE LOS COMPLEJOS INFINITOS; APLICACIONES FANTASMA	
2.0.	Introducción	13
2.1.	Definiciones	15
2.2.	La sucesión de Milnor	17
2.3.	La condición de Atiyah	19
2.4.	El criterio de Gray	22
2.5.	La sucesión espectral de Atiyah—Hirzebruch . Un criterio de convergencia	24
2.6.	Espacios irreducibles	29
2.7.	La condición del rango	30
2.8.	Aplicaciones	32
2.9.	Localización y aplicaciones fantasma	36
	Bibliografía	38

Este trabajo consta de dos partes marcadamente diferenciadas, a pesar de que ambas se integran en el contexto de las teorías de cohomología generalizadas.

En la primera parte estudio los grupos K de los espacios de Eilenberg-MacLane, generalizando los resultados de Anderson-Hodgkin (1.1) para grupos numerables, utilizando un "teorema de coeficientes universales" demostrado por Yosimura (1.9).

La segunda parte trata un problema que emana de la teoría de homotopía de poliedros infinitos. Estudio las aplicaciones fantasma entre poliedros y expongo condiciones necesarias y suficientes para su existencia, principalmente en términos de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch (2.4), que aplico a distintos casos concretos. Algunos de los resultados expuestos son generalizados en el último apartado usando las técnicas de localización.

1. TEORIA K DE LOS COMPLEJOS DE EILENBERG-MACLANE

1.1. Algunas definiciones

El grupo unitario infinito $U = \text{colim } U(n)$ puede dotarse de una estructura de CW-complejo. Por tanto, su espacio de lazos ΩU es del tipo de homotopía de un CW-complejo.

El espectro unitario infinito

$$\mathcal{U} = \{ U_n; \epsilon_n: SU_n \rightarrow U_{n+1}; n \in \mathbb{Z} \}$$

$$U_n = \begin{cases} U & \text{si } n \text{ es par} \\ \Omega U & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\epsilon_n = \begin{cases} SU \rightarrow SU & \text{la aplicación adjunta de la} \\ & \text{equivalencia homotópica} \\ U \rightarrow \Omega^2 U, n \text{ impar} \\ S\Omega U \rightarrow U & \text{la aplicación adjunta de } l_{\Omega U}, \\ & n \text{ par} \end{cases}$$

nos permite la definición de una teoría de cohomología $\tilde{K}^*$ en la categoría C_* de los espacios punteados del mismo tipo de homotopía que un CW-complejo. La definición es

$$\tilde{K}^n(X) = [X, U_n] \quad X \in \text{Ob } C_*$$

Además, siguiendo a G. Whitehead, el espectro anterior nos permite, también, definir una teoría de homología $\tilde{K}_*$, igualmente en C_* , de la siguiente manera:

$$\tilde{K}_n(X) = \pi_n(X \wedge U) \quad X \in \text{Ob } C_*$$

donde $\wedge$ indica el producto reducido y si $\mathcal{E} = \{E_n; \epsilon_n; n \in \mathbb{Z}\}$ es un espectro en C_* , $\pi_n(\mathcal{E})$ está definido como colímite del siguiente diagrama

$$D_n(\mathcal{E}): \pi_1(E_{-n+1}) \longrightarrow \pi_2(E_{-n+2}) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \pi_{n+m}^{\Theta}(E_m) \xrightarrow{\Theta} \pi_{n+m+1}(E_{m+1}) \longrightarrow \dots,$$

$$\text{donde } \Theta: \pi_{n+m}(E_m) \xrightarrow{\text{susp.}} \pi_{n+m+1}(SE_m) \xrightarrow{\epsilon_n} \pi_{n+m+1}(E_{m+1}).$$

1.2. Exposición de resultados

En 1961, M. Atiyah (1.3) obtuvo el siguiente resultado:

1.2.1. Teorema Si G es un grupo finito y el complejo de Eilenberg-MacLane $K(G,1)$ posee esqueletos finitos, entonces

$$\lim K^*(K(G,1)^n) \cong \hat{R}(G),$$

donde $\hat{R}(G)$ indica la completación del anillo de representaciones complejas de G .

Ahora podemos, además, afirmar que

$$K^*(K(G,1)) \stackrel{\psi}{=} \lim K^*(K(G,1)^n);$$

basta aplicar, por ejemplo, el teorema de Gray (1.5) (ψ es isomorfismo si y sólo si $\tilde{H}^n(X, \pi_{n+1} B)$ es finito para todo n) (véase también el apartado 2.5.). Así pues, para G finito

$$\tilde{K}^*(K(G,1)) \cong \hat{R}(G).$$

En 1968, Anderson y Hodgkin (1.1) se apoyan en el resultado de Atiyah (sólo para grupos abelianos) y en la sucesión espectral de Rothenberg-Steenrod (1.6) y demuestran el siguiente resultado:

1.2.2. Teorema Si G es un grupo numerable, entonces

$$\tilde{K}^*(K(G,n)) \cong \tilde{H}^{**}(K(G \otimes \mathbb{Q}), n)$$

para $n \geq 3$ y también para $n=2$ si G es un grupo de torsión.
(Aquí, $\tilde{H}^{**} = \tilde{H}^{\text{par}} \oplus \tilde{H}^{\text{impar}}$).

1.2.3. Corolario Para todo grupo de torsión numerable y para todo $n \geq 2$, $\tilde{K}^*(K(G, n)) = 0$.

En 1973, J.W.Vick (1.7) extiende la forma homológica de la sucesión espectral de Rothenberg-Steenrod a teorías de homología multiplicativas arbitrarias, lo que le permite dualizar los resultados de Anderson-Hodgkin.

Los resultados siguientes, demostrados también independientemente, por Z. Yosimura (1.10), eliminan las condiciones de numerabilidad contenidas en el teorema 1.2.2. y generalizan, por tanto, los resultados de Anderson-Hodgkin así como los de Vick.

1.2.4. Teorema Sea G un grupo abeliano. Se verifica

- (i) $\tilde{K}_*(K(G, n); \mathbb{Z}_q) = 0$
- (ii) $\tilde{K}_*(K(G, n)) \cong \tilde{H}_{**}(K(G, n)) \otimes \mathbb{Q}$

para $n \geq 3$ y también para $n=2$ si G es de torsión.

1.2.5. Teorema Sea G un grupo abeliano. Se verifica

- (i) $\tilde{K}^*(K(G, n); \mathbb{Z}_q) = 0$
- (ii) $\tilde{K}^*(K(G, n)) \cong \text{Ext}(\tilde{H}_{**}(K(G, n)) \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Z})$

para $n \geq 3$ y también para $n=2$ si G es de torsión.

En particular

1.2.6. Corolario Si G es un grupo abeliano de torsión y $n \geq 2$, se verifica $\tilde{K}^*(K(G, n)) = 0$.

1.3. Algunos lemas

Para demostrar los teoremas 1.2.4 y 1.2.5 necesitamos los siguientes lemas.

1.3.1. Lema (Yosimura (1.9)) Existe una "sucesión de coeficientes" exacta

$$0 \rightarrow \text{Ext}(\tilde{K}_{n-1}(X), Z) \rightarrow \tilde{K}^n(X) \rightarrow \text{Hom}(\tilde{K}_n(X), Z) \rightarrow 0$$

Demostración:

En primer lugar, un caso particular:

A) Si $H_*(W)$ es un grupo abeliano libre, entonces

$$K^*(W) \cong \text{Hom}(K_*(W), Z).$$

Indiquemos por $E_{p,q}^r$ y $E_r^{p,q}$ las sucesiones espectrales de Atiyah-Hirzebruch asociadas a $K_*(W)$ y $K^*(W)$ respectivamente. El homomorfismo $K^*(W) \rightarrow \text{Hom}(K_*(W), Z)$ induce un homomorfismo $E_r^{p,q} \rightarrow \text{Hom}(E_{p,q}^r, Z)$. Pero, para todo q par, $E_{p,q}^2 = H_p(W)$ es un grupo abeliano libre y las diferenciales en la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch aplican $E_{p,q}^2$ en un subgrupo de torsión del grupo $E_{p-r,q+r-1}^2$. Así pues, todas las diferenciales son cero y $E_{p,q}^r$ degenera.

Por otra parte $H^*(W) \cong \text{Hom}(H_*(W), Z)$. Resulta de esto que $E_r^{p,q}$ también degenera y, por lo tanto, $K^*(W)$ es isomorfo a $\text{Hom}(K_*(W), Z)$.

B) Existe una sucesión espectral $E_r^{p,q}$ asociada a $K^*(X)$ en la que $E_2^{p,q} = \text{Ext}_2^{p,q}(K_*(X), Z)$.

Para cada CW-complejo X existe un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X=X_0 & \hookrightarrow & X_1 & \hookrightarrow & X_2 & \hookrightarrow & X_3 \hookrightarrow \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 W_0 & & W_1 & & W_2 & & W_3 \dots
 \end{array}$$

donde

- a) $W_i \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1}$ es una cofibración, para todo i ,
 b) $H_q(W_i)$ es un grupo abeliano libre, para todo i, q ,
 c) $K_q(W_i) \rightarrow K_q(X_i)$ es un epimorfismo, para todo i, q .
 (Véase, por ejemplo, F. Adams, L. N. in Math. 99, Lecture 1)

Consideremos ahora la filtración

$$* = X/X = X_0/X_0 \hookrightarrow X_1/X_0 \hookrightarrow X_2/X_0 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \tilde{X}/X, \quad \tilde{X} = \bigcup X_i$$

Asociada a esta filtración existe una sucesión espectral de $K^*(\tilde{X}/X)$, en la que

$$E_r^{p,q} = K^{p+q+1}(X_{p+1}/X_p).$$

Pero, puesto que $W_p \rightarrow X_p \rightarrow X_{p+1}$ es una cofibración,

$$K^{p+q+1}(X_{p+1}/X_p) \cong K^{p+q}(W_p).$$

Resulta de lo anterior que E_2^{**} es la homología del complejo

$$C^* = \{C^q\} : 0 \rightarrow K^*(W_0) \rightarrow K^{*+1}(W_1) \rightarrow K^{*+2}(W_2) \rightarrow \dots$$

Pero, en virtud de A), $K^*(W_i)$ es isomorfo a $\text{Hom}(K_*(W_i), \mathbb{Z})$.

Esto significa que E_2^{**} es la homología del complejo

$$C_* = \{C_p\} : 0 \rightarrow \text{Hom}(K_*(W_0), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(K_{*+1}(W_1), \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Por otra parte,

$$\dots \rightarrow K_{*+1}(W_1) \rightarrow K_*(W_0) \rightarrow K_*(X) \rightarrow 0$$

es una resolución $\mathbb{Z}$ -libre de $K_*(X)$. Así pues,

$$E_2^{p,q} = H_p(C_p) = \text{Ext}^p(K_{p+q}(X), \mathbb{Z}).$$

Estamos, ahora, en condiciones de demostrar el lema:
Consideremos la resolución Z -libre de $K_*(X)$

$$\dots \rightarrow K_{*+i}(W_i) \rightarrow \dots \rightarrow K_{*+1}(W_1) \rightarrow K_*(W_0) \rightarrow K_*(X) \rightarrow 0$$

$\searrow$
 A_*

Para todo $p-1 \neq 0$ se obtiene

$$\text{Ext}^p(K_{p+q}(X), Z) \cong \text{Ext}^{p-1}(A_{p+q}, Z) = 0,$$

ya que A_* es un subgrupo del grupo abeliano $K_*(W_0)$.

Así pues,

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= 0 \quad \text{para todo } p \neq 0, 1, \\ E_2^{0,q} &= \text{Hom}(K_q(X), Z), \\ E_2^{1,q} &= \text{Ext}(K_{q-1}(X), Z), \end{aligned}$$

de lo cual resulta el lema.1.3.1.

1.3.2. Lema Sea h una teoría de homología reducida definida en C_* a través de un espectro $\mathcal{E}$, y sea $\{X_i\}$ un sistema directo de CW-complejos. Se verifica entonces

$$h_n(\text{colim } X_i) \cong \text{colim } h_n(X_i).$$

Demostración:

Ya que π_n conmuta con los colímites, se tiene

$$\begin{aligned} h_n(\text{colim } X_i) &= \pi_n(\text{colim } X_i \wedge \mathcal{E}) = \pi_n(\text{colim}(X_i \wedge \mathcal{E})) = \\ &= \text{colim } \pi_n(X_i \wedge \mathcal{E}) = \text{colim } h_n(X_i). \end{aligned}$$

1.3.3. Lema (i) $\tilde{K}_n(X, Q/Z) \cong \text{colim } \tilde{K}_n(X, Zq)$

$$(ii) \tilde{K}_n(X, Q) \cong \tilde{H}_{**}(X) \otimes Q.$$

Antes de demostrar el lema, permítaseme un pequeño in-

ciso sobre la definición de $\tilde{K}_*(\cdot, Z_q)$, $\tilde{K}_*(\cdot, Q)$ y $\tilde{K}_*(\cdot, Q/Z)$.

El CW-complejo punteado $M_q = S^1 \amalg CS^1 = Cq$, donde q indica al mismo tiempo la multiplicación por q , es un espacio de Moore $(Z_q, 1)$ y también un espacio de co-Moore $(Z_q, 2)$, para todo $q \in \mathbb{N}$.

Si ordenamos el conjunto $\mathbb{N}$ por divisibilidad, dotamos a $\mathbb{N}$ de una estructura de sistema directo. Así pues, tenemos sendos sistemas directos $\{S^1, f_{q,r}^q = r\}$, $\{M_q, g_{q,r}^q = \bar{r} = rvCl\}$. Pongamos

$$S = \text{colim} \{S^1\},$$

$$M = \text{colim} \{M_q\}.$$

Resulta, así, que

S es un espacio de Moore $(Q, 1)$,

M es un espacio de Moore $(Q/Z, 1)$.

Entonces se definen

$$\tilde{K}_n(X, Z_q) = \tilde{K}_{n+1}(X \wedge M_q)$$

$$\tilde{K}_n(X, Q) = \tilde{K}_{n+1}(X \wedge S)$$

$$\tilde{K}_n(X, Q/Z) = \tilde{K}_{n+1}(X \wedge M)$$

Las teorías de homología que así se obtienen son evidentemente aditivas.

Demostración del lema 1.3.3.:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \text{colim} \tilde{K}_n(X, Z_q) &= \text{colim} \tilde{K}_{n+1}(X \wedge M_q) = \tilde{K}_{n+1}(\text{ccolim}(X \wedge M_q)) = \\ &= \tilde{K}_{n+1}(X \wedge M) = \tilde{K}_n(X, Q/Z). \end{aligned}$$

(ii) Aplicando el teorema de Dold y el lema 1.3.2.

1.3.4. Lema $\tilde{K}^*(X, Z_q) = 0$ si y sólo si $\tilde{K}_*(X, Z_q) = 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned}\tilde{K}^n(X, Z_q) &= \tilde{K}^{n+1}(X \wedge M_q) = \text{Ext}(\tilde{K}_{n+1}(X \wedge M_q), Z) = \\ &= \text{Ext}(\tilde{K}_{n+1}(X, Z_q), Z),\end{aligned}$$

como resulta de aplicar el lema 1.3.1.

Pero, puesto que $\tilde{K}_{n+1}(X, Z_q)$ es un grupo abeliano de torsión, $\tilde{K}_{n+1}(X, Z_q)$ es trivial si y sólo si lo es $\text{Ext}(\tilde{K}_{n+1}(X, Z_q), Z)$.

1.3.5. Lema Existe una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow \tilde{K}_n(X) \rightarrow \tilde{K}_n(X, Q) \rightarrow \tilde{K}_n(X, Q/Z) \rightarrow \tilde{K}_{n+1}(X) \rightarrow \dots$$

Demostración:

Las inclusiones $S^1 \rightarrow M_q$ y las proyecciones $M_q \rightarrow S^2$ nos proporcionan una cofibración

$$S^1 \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow M \rightarrow S^2,$$

es decir, $S^2 = \text{susp } S^1$ y $M = C\varphi = S \cup_{\varphi} CS^1$, a menos de una equivalencia homotópica.

La sucesión del lema está, entonces, inducida por esta cofibración.

1.4. Demostración de los teoremas 1.2.4. y 1.2.5.

Sea G un grupo abeliano arbitrario y $n \geq 3$, o bien G un grupo abeliano de torsión y $n \geq 2$.

Sea $K(G, n)$ el complejo de Eilenberg-MacLane standard.

Designemos por $\{G_i\}$ la familia de los subgrupos de tipo

finito de G . Entonces $\{K(G_i, n)\}_i$ es un sistema directo de subcomplejos de $K(G, n)$. Pero, puesto que los funtores de homotopía conmutan con los colímites, $\operatorname{colim} K(G_i, n)$ es homotópicamente equivalente a $K(G, n)$.

Por otra parte, puesto que $\tilde{H}^*(K(G_i \otimes Q, n))$ es un módulo sobre Q , $\tilde{H}^*(K(G_i \otimes Q, n), Z_q)$ es trivial. Así pues, la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch de $\tilde{K}^*(K(G_i \otimes Q, n), Z_q)$ degenera y $\tilde{K}^*(K(G_i \otimes Q, n), Z_q) = 0$. Pero, en virtud del teorema de Anderson-Hodgkin, es, entonces

$$\tilde{K}^*(K(G_i, n), Z_q) = 0.$$

El lema 1.3.4. implica, entonces, que

$$\tilde{K}_*(K(G_i, n), Z_q) = 0$$

y, en virtud de 1.3.3.(i)

$$\tilde{K}_*(K(G_i, n), Q/Z) = 0.$$

Ahora bien, por 1.3.2., se tiene

$$\tilde{K}_*(K(G, n)) \cong \tilde{K}_*(K(G, n), Q).$$

El teorema de Dold acaba, entonces, la demostración de 1.2.4.

La demostración del teorema 1.2.5. resulta a partir de 1.2.4. y del lema 1.3.1.

Bibliografía

- (1.1) D.W.Anderson - L.Hodgkin:"The K-theory of Eilenberg-MacLane complexes", Topology 7 (1968), 317-329.
- (1.2) S.Araki - Z.Yosimura:"A spectral sequence associated with a cohomology theory of infinite CW-complexes", Osaka J. Math. 9 (1972), 355-365.
- (1.3) M.F.Atiyah:"Characters and cohomology of finite groups", Publ. Math. IHES 9 (1961), 23-64.
- (1.4) A.Dold:"Relations between ordinary and extraordinary homology", Coll. on alg. top., Aarhus (1969).
- (1.5) B.I.Gray:"Spaces of the same n-type for all n", Topology 5 (1966), 241-243.
- (1.6) M.Rothenberg - N.E.Steenrod:"The cohomology of classifying spaces of H-spaces", Bull. AMS 71 (1965), 872-875.
- (1.7) J.M.Vick:"Some applications of the Rothenberg-Steenrod spectral sequence", Osaka J. Math. 11 (1974), 87-103.
- (1.8) Z.Yosimura:"On cohomology theories of infinite CW-complexes, II", Publ. RIMS, Kyoto Univ. 8 (1972), 483-508.
- (1.9) Z.Yosimura:"Projective dimension of complex bordism modules of CW-spectra, I", Osaka J. Math. 10 (1973), 545-564.
- (1.10) Z.Yosimura:"A note on complex K-theory..." J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 289-295.

2. COHOMOLOGIA DE LOS COMPLEJOS INFINITOS:

APLICACIONES FANTASMA

2.0. Introducción

En esta segunda, y principal, parte del trabajo me ocupo del estudio de condiciones necesarias y suficientes para la existencia de aplicaciones fantasma entre espacios (aplicaciones que no son nulhomotopas pero sí lo son restringidas a cada esqueleto).

El problema procede (y tiene sus aplicaciones más interesantes) del estudio de teorías de cohomología, pero puede generalizarse (y de hecho así lo he hecho) a funtores de homotopía. Las aplicaciones fantasma de un poliedro X en un espacio B vienen dadas por el núcleo del epimorfismo

$$\psi : [X, B] \longrightarrow \lim [X^n, B]$$

definido por restricción de las aplicaciones de X en B a los esqueletos X^n de X .

Las condiciones clásicas para la existencia de aplicaciones fantasma tienen su raíz en el resultado de J. Milnor (2.19) que caracteriza el núcleo de ψ mediante el funtor primer derivado (por la derecha) del límite del sistema $\{[SX^n, B]\}$. (SX^n indica la suspensión de X^n). De este resultado se deduce la condición establecida por M. Atiyah en (2.3) utilizando el llamado criterio de Mittag-Leffler.

Aplicando esta condición he demostrado que no existen

Generalizando el concepto de espacio irreducible dado por Gray, he visto que la existencia de aplicaciones fantasma de X en B equivale a la irreducibilidad de SX respecto B .

Una serie de lemas y cálculos puramente algebraicos permiten aplicar el criterio anterior a distintos casos concretos interesantes, en los que el espacio B es siempre de tipo finito. Así, por ejemplo, se caracteriza la existencia de aplicaciones fantasma de un poliedro X en QS^n o S^n y, mediante el uso de ciertas operaciones de cohomología, demuestro la existencia de aplicaciones fantasma entre espacios usuales: CP , S^3 ; $K(G,n)$, $U(m)$; $K(G,n)$, U ; $K(G,n)$, BU ;...

El último apartado de este trabajo está dedicado a generalizar la sucesión exacta de Milnor de (2.19) de las aplicaciones fantasma de un poliedro en un H -espacio racional. Utilizando las técnicas de localización y completación profinita y usando algunos resultados de D. Sullivan (2.23) demuestro que la sucesión de Milnor se puede generalizar a todo sistema directo de subpoliedros finitos que recubran el poliedro.

2.1. Definiciones

Seguiré usando la notación ya introducida en la parte 1 de este trabajo y supondré, además, que el 0-esqueleto de todo CW-complejo consta del punto base.

Designaré por $[X,Y]$ el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas de X en Y que conservan el punto base, por SX la suspensión de X y por ΩX el espacio de lazos de X .

Un funtor contravariante h de la categoría homotópica HC_* de CW-complejos conexos con punto base en la de los conjuntos punteados se dice representable, si existe un espacio topológico punteado B tal que, para todo $X \in HC_*$, se tenga

$$h(X) = [X, B].$$

Obsérvese que el espacio B está determinado a menos de una equivalencia homotópica débil.

El teorema de representabilidad de Brown establece que un funtor h es representable si y sólo si cumple las tres condiciones siguientes (2.7):

(a) Axioma de homotopía: Si $f, g: X \rightarrow Y$ son aplicaciones homotópicas, $h(f) = h(g)$.

(b) Axioma de aditividad (Milnor): Sea $X = \coprod X_i$ (coproducto) y $j_i: X_i \rightarrow X$ las inmersiones correspondientes. Entonces, la aplicación entre conjuntos $h(X) \rightarrow \coprod h(X_i)$ es una biyección que conserva el punto base.

(c) Axioma de Mayer-Vietoris: Para todo par de CW-complejos X, Y consideremos el diagrama inducido por inclusiones

$$\begin{array}{ccc} h(X \cap Y) & \xleftarrow{\alpha} & h(X) \\ \beta \uparrow & & \uparrow \gamma \\ h(Y) & \xleftarrow{\delta} & h(X \cup Y) \end{array};$$

si $x \in h(X)$ e $y \in h(Y)$ son tales que $\alpha(x) = \beta(y)$, entonces existe un $z \in h(X \cup Y)$ tal que $\gamma(z) = x$ y $\delta(z) = y$.

Sea, ahora, X un CW-complejo conexo con punto base, de esqueletos X^n , y h un funtor representable $h = [-, B]$. Por restricción de toda aplicación $f: X \rightarrow B$ a los esquele-

tos X^n se obtiene una aplicación de conjuntos punteados

$$\psi: h(X) \longrightarrow \lim h(X^n)$$

definida por

$$\psi([f]) = (\dots, [f/X^n], \dots)$$

Resulta de la propiedad de extensión de homotopías que es siempre un epimorfismo (véase, por ejemplo, (2.19)).

El núcleo de ψ consta, precisamente, de las clases de homotopía de aplicaciones $f: X \longrightarrow B$ que restringidas a cada esqueleto son nulhomotopas.

2.1.1. Definición Una aplicación esencial $f: X \longrightarrow B$ se llama fantasma si $f \in \text{Ker } \psi$. Designaré, en adelante, por $\text{Ph}(X, B)$ al conjunto de aplicaciones fantasma de X en B .

Evidentemente, si $\text{Ph}(X, B) = \emptyset$, (es decir, si toda aplicación $f: X \longrightarrow B$ que restringida a todo esqueleto X^n de X es nulhomotopa es ella misma nulhomotopa), entonces ψ es una biyección (y, por tanto, un isomorfismo, si h es un funtor valuado en la categoría de los grupos).

2.2. La sucesión de Milnor

El núcleo del epimorfismo ψ del apartado anterior fue caracterizado por J. Milnor en (2.19) en términos del funtor $\lim^1$ ("primer derivado del funtor límite").

La definición siguiente es la que dan Bousfield y Kan en (2.6):

2.2.1. Definición Sea $\{G_i, f_i\}$ un sistema de grupos, $i \in \mathbb{N}$, y $*$ la operación de $\prod G_i$ sobre XG_i , dada por
 $(g_0, \dots, g_i, \dots) * (x_0, \dots, x_i, \dots) = (\dots, g_i x_i (f_i g_{i+1})^{-1}, \dots)$

Entonces, por definición

$$\lim^1 G_i = XG_i / \sim$$

donde $x \sim y$ si y sólo si existe un $g = (g_0, \dots, g_i, \dots)$ de $\prod G_i$ tal que $y = g_* x$. (Obsérvese que $\lim G_i$ es precisamente el conjunto $\{g \in XG_i; g * e = e\}$)

En general, $\lim^1 G_i$ es, únicamente, un conjunto punteado, pero si el sistema $\{G_i\}$ es de grupos abelianos, entonces $\lim^1 G_i$ admite una estructura de grupo abeliano y coincide con el primer funtor derivado por la derecha del funtor $\lim$.

2.2.2 Lema Sea $* \rightarrow \{G'_i\} \rightarrow \{G_i\} \rightarrow \{G''_i\} \rightarrow *$ una sucesión exacta corta de sistemas (inversos) de grupos; la siguiente sucesión es exacta:

$$\begin{aligned} * \rightarrow \lim G'_i \rightarrow \lim G_i \rightarrow \lim G''_i \rightarrow \lim^1 G'_i \rightarrow \lim^1 G_i \rightarrow \\ \rightarrow \lim^1 G''_i \rightarrow * \end{aligned}$$

2.2.3. Teorema (Milnor) Sea $X \in HC_*$ y B un espacio topológico punteado. Sea $\dots X_i \subset X_{i+1} \subset \dots$ una descomposición de X en subcomplejos. Existe, entonces, una sucesión exacta de conjuntos punteados

$$* \rightarrow \lim^1 [SX_i, B] \rightarrow [X, B] \xrightarrow{\bar{\psi}} \lim [X_i, B] \rightarrow *$$

(Para la demostración me remito a (2.19))

2.2.4. Corolario Sea $X \in HC_*$ y $h = [, B]$ un funtor representable. Entonces $\text{Ker } \psi = \lim^1 [SX_i, B]$.

El corolario resulta del teorema 2.2.3. al observar que para la descomposición de X en sus esqueletos X^n , las aplicaciones ψ y $\bar{\psi}$ coinciden.

2.3. La condición de Atiyah

La anulación del término $\lim^1 [SX_i, B]$ que aparece en el teorema de Milnor 2.2.3. como núcleo del epimorfismo puede estudiarse a través de la condición que dio M. Atiyah en (2.3) para la anulación del $\lim^1$ de un sistema de grupos.

2.3.1. Definición Se dice que un sistema de grupos $\{G_i, f_i\}$ verifica la condición de Mittag-Leffler si, para cada n , la filtración de G_n inducida por las imágenes de las aplicaciones f_i es estacionaria; es decir, si, para todo n , existe un m (que depende de n) tal que, para todo $k \geq m$, $\text{Im}(f_{m+n} \circ \dots \circ f_n : G_{m+n} \longrightarrow G_n) = \text{Im}(f_{k+n} \circ \dots \circ f_n : G_{k+n} \longrightarrow G_n)$.

La siguiente proposición, de naturaleza puramente algebraica, es debida a Atiyah y aparece también recogida en el libro de Bousfield y Kan (2.6).

2.3.2. Proposición Sea $\{G_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, un sistema inverso de grupos que cumpla la condición de Mittag-Leffler. Entonces $\lim^1 G_i = 0$.

La condición anterior permite ya demostrar la no existencia de aplicaciones fantasma de todo CW-complejo punteado conexo en un espacio de Eilenberg-MacLane.

2.3.3. Teorema Para todo CW-complejo punteado conexo X , todo $n \in \mathbb{N}$ y todo grupo G (abeliano si $n \geq 2$), se tiene $\text{Ph}(X, K(G, n)) = \emptyset$.

Demostración:

La cofibración $X^{m+k} \longrightarrow X \longrightarrow X/X^{m+k}$ induce una sucesión exacta de cohomología con coeficientes en G .

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^n(S(X/X^{m+k}), G) \longrightarrow H^n(SX, G) \longrightarrow H^n(SX^{m+k}, G) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^{n+1}(S(X/X^{m+k}), G) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

de la cual se deduce que, para $m+k \geq n$,

$$H^n(SX^{m+k}, G) \cong H^n(SX, G)$$

Así pues, para $k \geq n-m$, el sistema $\{ \text{Im}(H^n(SX^{m+k}) \longrightarrow H^n(SX^m)) \}$ es estacionario y, por tanto, el sistema $\{ [SX^m, K(G, n)] \}_m$ verifica la condición de Mittag-Leffler.

Aplicando sucesivamente los teoremas 2.3.2. y 2.2.3. se obtiene el resultado buscado.

La condición suficiente que da el teorema de Atiyah para la no existencia de aplicaciones fantasma no es evidentemente necesaria. Sin embargo, con ciertas hipótesis adicionales (sugeridas por situaciones topológicas) puede demostrarse que si no se cumple la condición de Mittag-Leffler, no puede anularse el $\lim^1$.

2.3.4. Proposición Sea $\{G_i\}$ un sistema de grupos numerables, tales que, para todo k y n , $\text{Im}(G_{n+k} \rightarrow G_n)$ sea un subgrupo normal en G_n . Entonces, si $\{G_i\}$ no cumple la condición de Mittag-Leffler, $\lim^1 G_i \neq 0$.

Para la demostración de la proposición necesitaremos el siguiente lema:

2.3.5. Lema Sea $G = \bigcup G_i$ un grupo numerable con G_i normal en G para todo i , $G_i \subset G_{i-1}$ y $G_i \neq G_{i-1}$ para una infinidad de índices i . Entonces existe un elemento (g_i) de $\prod G_i$ tal que la ecuación $g_i = x_i \cdot x_{i+1}^{-1}$ no admite ninguna solución $(x_i) \in \prod G_i$.

Demostración:

Consideremos la sucesión exacta de sistemas de grupos

$$1 \longrightarrow \{G_i\} \longrightarrow \{G\} \longrightarrow \{G/G_i\} \longrightarrow 1$$

Si el lema no fuera cierto, la aplicación de $G \cong \lim G$ en $\lim G/G_i$ sería exhaustiva. Ahora bien, como conjuntos, tenemos $G/G_{i+1} \cong G/G_i \times G_i/G_{i+1}$, de donde resulta que $\lim G/G_i \cong \prod G_i/G_{i+1}$ no es numerable. Puesto que G es numerable, no puede existir ningún epimorfismo $G \rightarrow \lim G/G_i$.

A título de justificación de las condiciones introducidas en el sistema de grupos de la proposición anterior, incluyo la siguiente proposición de naturaleza topológica:

2.3.6. Proposición Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre CW-complejos conexos y B un espacio topológico. En-

tonces $\text{Im}([SY, B] \xrightarrow{(Sf)^*} [SX, B])$ es un subgrupo normal de $[SX, B]$.

Demostración:

Sea Cf el cono de la aplicación f . Si $i: Cf \rightarrow Cf \vee SX$ indica la inclusión, la operación

$$\bar{I}: [SX, B] \times [Cf, B] \rightarrow [Cf, B]$$

define una aplicación

$$i^f: [SX, B] \rightarrow [Cf, B]$$

tal que $i^f((\alpha)) = \bar{I}((\alpha), *)$ para todo $\alpha: SX \rightarrow B$ (aquí, $*$ indica la aplicación constante $*: Cf \rightarrow B$).

Pero i^f no es otra que la aplicación que aparece en la sucesión exacta de Puppe

$$\dots \rightarrow [SCf, B] \rightarrow [SY, B] \xrightarrow{(Sf)^*} [SX, B] \xrightarrow{i^f} [Cf, B] \rightarrow \dots$$

Así pues, para $\alpha, \beta: SX \rightarrow B$, $i^f((\alpha)) = i^f((\beta))$ si y sólo si $(\alpha)(\beta)^{-1} \in \text{Im}(Sf)^*$.

Sea ahora $(\gamma) \in \text{Im}(Sf)^*$ y $(\alpha) \in [SX, B]$ arbitrario. Entonces $(\alpha)((\alpha)(\gamma))^{-1} \in \text{Ker } i^f$, de donde

$$(\alpha)(\gamma)(\alpha)^{-1} = ((\alpha)(\gamma)(\alpha))^{-1} \quad \text{Ker } i^f = \text{Im}(Sf)^*,$$

con lo que $\text{Im}(Sf)^*$ es un subgrupo normal de $[SX, B]$.

2.4. El criterio de Gray

En muchas situaciones topológicas, el criterio de Atiyah sobre la no existencia de aplicaciones fantasma es incómodo de aplicar y resulta más útil el siguiente criterio debido a B.I. Gray (2.17).

2.4.1. Teorema Para todo CW-complejo conexo X y todo espacio topológico B , si $H^n(X, \pi_{n+1}(B))$ es finito para todo n , entonces $Ph(X, B) = \emptyset$.

Demostración:

Sea $H^n(X, \pi_{n+1} B)$ finito para todo n , y consideremos la sucesión exacta de Dold (2.11)

$$\dots \rightarrow H^{n+1}(X, \pi_{n+1} B) \rightarrow h^{(n+1)}(SX) \rightarrow h^{(n)}(SX) \rightarrow \dots$$

$$\text{donde } h^{(n)}(SX) = \text{Im}([SX^{n-1}, B] \rightarrow [SX^{n-2}, B]) \dots$$

Puesto que X es conexo, $h^{(2)}(SX) = 0$ y, por tanto, procediendo por inducción sobre n , podemos afirmar que el grupo $h^{(n)}(SX)$ es finito, lo que implica que el sistema de grupos $\{[SX^i, B]\}$ cumple la condición de Mittag-Leffler. Aplicando, entonces, la proposición 2.3.2. resulta

$$\lim^1 [SX^i, B] = 0$$

lo que implica la no existencia de aplicaciones fantasma de X en B , en virtud de 2.2.4. y 2.1.1.

El teorema anterior se aplica con especial fortuna para resolver la siguiente conjetura de Atiyah y Hirzebruch: Sea U el grupo unitario infinito y BU su espacio clasificante. En (2.4) Atiyah y Hirzebruch demostraron que, para el espacio clasificante BG de un grupo de Lie conexo y compacto G , se tenía

$$\lim \tilde{K}(BG^n) = \lim [BG^n, BU] = \hat{R}(G)$$

el completado del anillo de las representaciones complejas de G . Además, los autores conjeturaron que, para el espacio

clasificante BG de un grupo de Lie compacto

$$\lim \tilde{K}(BG^n) = \tilde{K}(BG).$$

En 1964, D.W. Anderson, en su tesis (2.1), y en 1968, V.M. Buhstaber y A.S. Miscenko demostraron la conjetura para grupos conexos compactos. Ahora, podemos establecer, siguiendo a W. Meier

2.4.2. Teorema Sea BG el espacio clasificante de un grupo de Lie compacto G. Entonces, $\lim \tilde{K}(BG^n) = \tilde{K}(BG)$.

Demostración:

En virtud de un teorema de A. Borel (2.5), el álgebra $H^*(BG, \mathbb{Q})$ es un álgebra de polinomios generada por elementos de dimensión par. En virtud de un teorema de Hopf sobre H-espacios finitos, el anillo de cohomología $H^*(G, \mathbb{Q})$ es isomorfo a $H^*(S^{n_1} \times S^{n_2} \times \dots \times S^{n_k}, \mathbb{Q})$, con $n_1, \dots, n_k$ números impares. Puesto que $H^p(BG, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong H^p(BG, \mathbb{Q})$, resulta que, para todo p impar, $H^p(BG, \mathbb{Z})$ es un grupo finito. Pero, puesto que $\pi_i(BU)$ es $\mathbb{Z}$ o 0 según que i sea impar o par, $H^n(BG, \pi_{n+1}(BU))$ es finito, para todo n. Aplicando entonces el teorema 2.4.1., se obtiene

$$\lim [BG^n, BU] = [BG, BU],$$

de donde el teorema.

2.5. La sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. Un criterio de convergencia

M. Atiyah y F. Hirzebruch introdujeron en (2.4) una sucesión espectral asociada a toda teoría de cohomología

generalizada. A. Dold generalizó, en (2.11), esta sucesión espectral para funtores de homotopía representables definidos en la categoría de los CW-complejos conexos punteados y con valores en la categoría de los grupos. Sea h un funtor de homotopía representable; para todo $X \in HC_*$ pongamos

$$D^{p,q} = h(S^{-p-q}X^p) \quad \text{para } p+q \leq 0$$

$$E^{p,q} = h(S^{-p-q}(X^p/X^{p-1})) \quad \text{para } p+q \leq 0.$$

La sucesión exacta de Puppe

$$\dots \rightarrow h(SX^{p+1}) \rightarrow h(SX^p) \rightarrow h(X^{p+1}/X^p) \rightarrow h(X^{p+1}) \rightarrow \dots$$

induce, entonces, un par exacto de complejos bigraduados

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\quad} & D \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & E & \end{array}$$

y, por tanto, una sucesión espectral $E(h, X)$ tal que:

$$a) E_2^{p,q}(h, X) = H^p(X, hS^{-q}) \quad p+q \leq 1, \quad q < 0,$$

$$E_2^{p,q}(h, X) = 0 \quad \text{en caso contrario.}$$

$$b) E_r^{p,q}(h, X) = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q} \quad \text{donde}$$

$$Z_r^{p,-p} = \text{Im} (h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \longrightarrow h(X^p/X^{p-1}))$$

$$B_r^{p,-p} = \text{Im} (h(S(X^{p-1}/X^{p-r})) \longrightarrow h(X^p/X^{p-1}))$$

c) Si $h = \{h^n\}$ es una teoría de cohomología generalizada, $h^n S = h^{n-1}$, y se tienen inclusiones

$$\dots \subset E(h^{n-1}, X) \subset E(h^n, X) \subset \dots$$

que permiten definir una sucesión espectral $E(h, X)$ que es la sucesión espectral de Atiyah y Hirzebruch ordinaria.

d) Si X es un CW-complejo de dimensión finita, la sucesión espectral $E(h, X)$ converge finitamente; es decir, para todo par (p, q) existe un r dependiente de (p, q) tal que

$$E_r^{p,q} \cong E_{r+1}^{p,q} \cong \dots$$

Si X no es de dimensión finita, la sucesión no converge finitamente en general. Precisamente, la convergencia de dicha sucesión espectral está íntimamente ligada a la existencia de aplicaciones fantasma del CW-complejo X en el espacio clasificante B del funtor h .

Para estudiar la conexión anterior necesito, antes, una definición:

2.5.1. Definición Un espacio topológico se dice numerable si son numerables todos sus grupos de homotopía.

2.5.2. Lema a) Un CW-complejo es numerable si y sólo si posee una numerabilidad de celdas.

b) Si Y es un espacio topológico numerable y X un CW-complejo punteado conexo y con esqueletos finitos, $[X^n, B]$ es numerable para todo n .

2.5.3. Teorema Sea X un CW-complejo con esqueletos finitos y B un espacio topológico numerable; entonces $Ph(X, B) = \emptyset$.

Demostración:

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 h(S(X^{p-1}/X^{p-r})) & \longrightarrow & h(X^p/X^{p-1}) & \longrightarrow & h(X^p/X^{p-r})
 \end{array}$$

utilizado en la construcción de $E_r^{p,-p}$, donde la fila horizontal es un trozo de la sucesión de Puppe asociada a la cofibración $X^{p-1}/X^{p-r} \rightarrow X^p/X^{p-r} \rightarrow X^p/X^{p-1}$.

Resulta, entonces,

$$\begin{aligned} E_r^{p,-p} &= \frac{\text{Im } (h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \rightarrow h(X^p/X^{p-1}))}{\text{Im } (h(S(X^{p-1}/X^{p-r})) \rightarrow h(X^p/X^{p-1}))} \cong \\ &\cong \text{Im } (h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \rightarrow h(X^p/X^{p-r})) \end{aligned}$$

y, por tanto, $E_r^{p,-p} \cong \text{Im}(h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \rightarrow h(X^p))$ para $r \geq p$.

Por otra parte, del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ h(X^{p+r-1}/X^p) & \longrightarrow & h(X^{p+r-1}) & \longrightarrow & h(X^p) \end{array}$$

resulta que, para $r \geq p$,

$$\text{Im } (h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \rightarrow h(X^p)) \cong \frac{\text{Im } (h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \rightarrow h(X^{p+r-1}))}{\text{Im } (h(X^{p+r-1}/X^p) \rightarrow h(X^{p+r-1}))}$$

de donde, para $r \geq p$,

$$E_r^{p,-p} \cong \frac{\text{Im } (h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \rightarrow h(X^{p+r-1}))}{\text{Im } (h(X^{p+r-1}/X^p) \rightarrow h(X^{p+r-1}))}$$

grupo que, siempre para $r \geq p$, es isomorfo al cociente

$$\frac{\text{Ker } (h(X^{p+r-1}) \rightarrow h(X^{p-1}))}{\text{Ker } (h(X^{p+r-1}) \rightarrow h(X^p))}$$

como se deduce de la sucesión de Puppe asociada a

$$X^{p-1} \rightarrow X^{p+r-1} \rightarrow X^{p+r-1}/X^{p-1}$$

El último valor obtenido para $E_r^{p,-p}$ nos permite construir, finalmente, la sucesión exacta

$$0 \rightarrow E_r^{p,-p} \rightarrow \text{Im}(h(X^{p+r-1}) \rightarrow h(X^p)) \rightarrow \text{Im}(h(X^{p+r-1}) \rightarrow h(X^{p-1}))$$

Supongamos, ahora, que $\text{Ph}(X, B) = \emptyset$. En virtud de 2.3.4., el sistema $\{h(X^p)\} = \{[X^p, B]\} = \{[SX^p, B]\}$ verifica la condición de Mittag-Leffler, ya que B es un espacio numerable. Existe, pues, un r_p tal que es estacionario $\text{Im}(h(X^{p+r-1}) \rightarrow h(X^p))$.

Este razonamiento nos lleva a la cadena de isomorfismos

$$E_r^{p,-p} \cong E_{r+1}^{p,-p} \cong \dots \quad \text{para } r \geq r_p.$$

Recíprocamente, si la sucesión espectral converge finitamente para el par $(p, -p)$, puesto que, para $r \geq p$, $E_{r+1}^{p,-p}$ es un subgrupo de $E_r^{p,-p}$, $\{E_r^{p,-p}\}_{r \geq p}$ es un sistema inverso. La sucesión exacta antes mencionada puede, entonces, convertirse en una sucesión exacta de sistemas inversos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \{E_r^{p,-p}\} \rightarrow \{\text{Im}(h(X^{p+r-1}) \rightarrow h(X^p))\} \rightarrow \\ \rightarrow \{\text{Im}(h(X^{p+r-1}) \rightarrow h(X^{p-1}))\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, en virtud de 2.3.3., $\lim^1 E_r^{p,-p} = 0$. Si ponemos, ahora, $G_r^{p-1} = \text{Im}(h(X^{p+r-1})/h(X^{p-1}))$, se tiene $\lim^1 G_r^0 = 0$ y, por inducción sobre p , $\lim^1 G_r^p = 0$ para todo p .

La proposición 2.3.3. nos dice, ahora, que el sistema $\{G_r^p\}$ cumple la condición de Mittag-Leffler y, por tanto, $\{\text{Im}(h(X^{p+r-1}) \rightarrow h(X^p))\}$ es estacionario; pero esto implica

que el sistema $\{h(X^p)\}$ cumple Mittag-Leffler y, por tanto, $\text{Ph}(X, B) = \emptyset$. Queda, pues, demostrado el teorema.

2.5.4. Observación Si el espacio B está configurado en un espectro que defina una teoría de cohomología generalizada, el teorema anterior está implícitamente demostrado ya en los trabajos de Eckmann-Hilton (2.14) y (2.15) y Eilenberg-Moore (2.16).

2.6. Espacios irreducibles

El criterio dado en el apartado anterior para la no existencia de aplicaciones fantasma presenta el inconveniente de su utilización práctica y para solventarlo es conveniente traducir dicho criterio en condiciones mucho más topológicas. El concepto de espacio irreducible (una generalización de la definición dada por Gray en (2.17)) nos será de gran utilidad.

2.6.1. Definición Un CW-complejo X se dice irreducible respecto de un espacio B , si existe un índice p tal que el sistema $\left\{ \text{Im}([X^{p+r}/X^p, B] \longrightarrow [X^{p+1}/X^p, B]) \right\}_r$ no es estacionario.

Podemos, ahora, traducir el teorema 2.5.3. en lenguaje de irreducibilidad.

2.6.2. Teorema Sea X un CW-complejo con esqueletos finitos y B un espacio topológico numerable. Entonces $\text{Ph}(X, B) = \emptyset$ si y sólo si SX es reducible respecto de B .

Demostración:

Tomemos, como anteriormente, $h = [\quad, \Omega B] = [SX, B]$. El teorema resulta entonces, inmediatamente, del teorema 2.5.3 y del hecho que

$$E_r^{p, -p} \cong \frac{\text{Im} (h(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \rightarrow h(X^p/X^{p-1}))}{\text{Im} (h(S(X^{p-1}/X^{p-r})) \rightarrow h(X^p/X^{p-1}))}$$

es estacionario para $r \geq p$.

2.7. La condición del rango

La condición necesaria y suficiente dada en el apartado anterior, adquiere toda su significación al restringirnos a espacios de tipo finito.

2.7.1. Definición Un espacio topológico se dice de tipo finito, si todos sus grupos de homotopía son de tipo finito.

2.7.2. Lema Si X es un CW-complejo con esqueletos finitos y B es un espacio topológico de tipo finito,

$$[S(X^p/X^{p-1}), B] = \left[\bigvee_i (S^{p+1})_i, B \right]$$

es un grupo abeliano de tipo finito.

2.7.3. Lema Sea G un grupo abeliano de tipo finito y $\dots \subset G_{j+1} \subset G_j \subset \dots \subset G$ un sistema infinito de subgrupos de G . Las dos condiciones siguientes son equivalentes:

a) El sistema anterior no es estacionario,

b) $\text{rang } \bigcap G_j \leq \text{rang } G_k$, para todo k .

2.7.4. Proposición Si SX es reducible respecto de B , entonces, para todo p , existe un r_p tal que

$$\begin{aligned} \text{Im} ([S(X/X^{p-1}), B] \longrightarrow [V_S^{p+1}, B]) &= \\ &= \text{Im} ([S(X^{p-r}/X^{p-1}), B] \longrightarrow [V_S^{p+1}, B]) \end{aligned}$$

para todo $r \geq r_p$.

Demostración:

El diagrama de cofibraciones

$$\begin{array}{ccccc} X^p/X^{p-1} & \longrightarrow & X/X^{p-1} & \longrightarrow & X/X^p \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X^p/X^{p-1} & \longrightarrow & X^{p+r}/X^{p-1} & \longrightarrow & X^{p+r}/X^p \end{array}$$

nos induce un diagrama de sucesiones exactas de Puppe

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow [S(X^{p+r}/X^{p-1}), B] & \longrightarrow & [S(X^p/X^{p-1}), B] & \longrightarrow & [X^{p+r}/X^p, B] & \longrightarrow & \dots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \dots \longrightarrow [S(X/X^{p-1}), B] & \longrightarrow & [S(X^p/X^{p-1}), B] & \longrightarrow & [X/X^p, B] & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

De este diagrama resulta la proposición al observar que de 2.6.2. se deduce que $\text{Ph}(X, B) = \emptyset$ si y sólo si, para todo p , $\text{Ph}(X/X^p, B) = \emptyset$.

Podemos enunciar ahora ya nuestro criterio para la no existencia de aplicaciones fantasma en términos del rango de ciertos grupos abelianos.

2.7.5. Teorema Sea X un CW-complejo con esqueletos finitos y B un espacio topológico de tipo finito. Entonces $\text{Ph}(X, B) \neq \emptyset$ si y sólo si, al menos para un p fijo, se tiene

$$\begin{aligned} \text{rang Im} ([SX/SX^p, B] \longrightarrow [V_S^{p+1}, B]) &< \\ &< \text{rang Im} ([SX^{p+r}/SX^p, B] \longrightarrow [V_S^{p+1}, B]). \end{aligned}$$

2.8. Aplicaciones

Los resultados de los dos apartados anteriores, permiten demostrar la existencia o no de aplicaciones fantasma entre diversos espacios interesantes. Para el caso de aplicaciones en esferas o en lazos infinitos de esferas, se deduce directamente, pero para aplicaciones de espacios de Eilenberg-MacLane en el grupo unitario infinito o en su espacio clasificante, hay que recurrir a ciertas operaciones de cohomología.

2.8.1. Proposición Si X es un CW-complejo con esqueletos finitos y $B = \text{colim } \Omega^r S^{n+r}$, $n \neq 0, 1$, entonces $\text{Ph}(X, B) \neq \emptyset$ si y sólo si

$$\text{rang Im}([S(X/X^{n-2}), B] \longrightarrow [VS^n, B]) < \\ < \text{rang Im}([S(X^{n+r-1}/X^{n-2}), B] \longrightarrow [VS^n, B]),$$

para r arbitrario suficientemente grande.

Demostración:

Los grupos de homotopía $\pi_{p+1}(B)$ son finitos para $p \neq n-1$. Así pues, $[S(X^p/X^{p-1}), B]$ es finito para $p \neq n-1$ y, por tanto, la condición sobre los rangos expresada en el teorema 2.7.5. puede cumplirse sólo cuando $p = n-1$ (ya que en los otros casos los rangos valen cero).

Análoga demostración admite la siguiente

2.8.2. Proposición La proposición 2.8.1. vale substituyendo $\text{colim } \Omega^r S^{n+r}$ por S^n , $n \neq 1$, n impar.

Algo más complicada es la siguiente proposición

2.8.3. Proposición La proposición 2.8.1. sigue siendo válida substituyendo $\text{colim } \Omega^r S^{n+r}$ por S^n , $n > 0$, n par, y $H^{2n-2}(X)$ finito.

Demostración:

Puesto que $H^{2n-2}(X)$ es finito y $\pi_i(S^n)$ también lo es para $i > 2n-1$, resulta que los grupos $H^i(X, \pi_{i+1}(S^n))$ son finitos para $i > 2n-1$. Vamos a ver que de lo anterior se deduce la condición del rango para $i = 2n-2$.

Consideremos la sucesión exacta de (2.11) asociada al functor $h = [, S^n]$:

$$\dots \longrightarrow h_{(k+1)}(X^{2n+r-3}) \longrightarrow h_{(k)}(X^{2n+r-3}) \longrightarrow H^{k+1}(X^{2n+r-3}, \pi_{k+2}(S^n))$$

de la que se deduce, por inducción, que

$$h_{(2n-3)}(X^{2n+r-3}) = \text{Im}(h(X^{2n+r-3}/X^{2n-3}) \longrightarrow h(X^{2n+r-3}/X^{2n-4}))$$

es un grupo finito.

Entonces, a partir de la expresión dada para $E_r^{p,-p}$ en el aparatado 2.5., habida cuenta del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & h(X^{2n+r-3}/X^{2n-3}) & \longrightarrow & h(X^{2n+r-3}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \dots & \longrightarrow & h(X^{2n+r-3}/X^{2n-3}) & \longrightarrow & h(X^{2n+r-3}/X^{2n-4}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

resulta que la sucesión espectral $E_r^{p,q}(h,X)$ converge finitamente para el par $(2n-2, -(2n-2))$, lo cual implica la condición del rango para $i = 2n-2$.

2.8.4. Observación La condición de finitud para $H^{2n-2}(X)$ viene impuesta por el hecho de que, para n par, tanto $\pi_n(S^n)$

como $\pi_{2n-1}(S^n)$ son grupos infinitos.

2.8.5. Proposición $\text{Ph}(\mathbb{C}P^\infty, S^3) \neq \emptyset$.

Demostración:

La demostración de esta proposición se basa en un resultado de W. Meier que generaliza un método de B.I. Gray para poder comprobar si se verifica la condición del rango dada en el teorema 2.7.

El teorema de Meier dice:

2.8.6. Teorema Sea X un CW-complejo con esqueletos finitos e Y un espacio de Hopf homotópicamente asociativo y de tipo finito. Sea $\varphi: [X/X^{n-1}, Y] \longrightarrow \text{Hom}(H^n(Y), H^n(X/X^{n-1}))$ la aplicación natural que a toda clase $[f] \in [X/X^{n-1}, Y]$ le asocia el elemento $H^n(f, \pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q})$. Entonces

a) φ es un homomorfismo de grupos,

b) $\text{rang } \varphi = \text{rang } i^*: [X/X^{n-1}, Y] \longrightarrow [X^n/X^{n-1}, Y]$.

Para demostrar la proposición 2.8.5. basta, entonces, comprobar la condición del rango a partir de la parte b) del teorema 2.8.6., demostrando que toda aplicación de $\mathbb{C}P^\infty$ en S^3 induce en $H^2(\ , \mathbb{Q})$ la aplicación nula, lo cual es consecuencia de que tal aplicación ya es nula en $H^2(\ , \mathbb{Z})$.

La siguiente proposición es una generalización de un resultado obtenido, independientemente, por Anderson y Hodgkin y por Buhstaber y Miscenko ((2.2) y (2.8) respectivamente).

2.8.7. Proposición Sea G un grupo abeliano infinito de tipo finito.

- a) Si $n \geq 2$ es par, $\text{Ph}(K(G,n), U(m)) \neq \emptyset$ para $m \geq (n+1)/2$
- b) Si $n \geq 2$ es impar, $\text{Ph}(K(G,n), BU(m)) \neq \emptyset$ $m \geq (n+1)/2$
- c) Si $n \geq 3$ es par, $\text{Ph}(K(G,n), U) \neq \emptyset$
- d) Si $n \geq 3$ es impar, $\text{Ph}(K(G,n), BU) \neq \emptyset$.

La demostración procede, utilizando los cuadrados de Steenrod, probando, en primer lugar, la afirmación para $G = \mathbb{Z}$, distinguiendo los casos n par o impar. La demostración para G arbitrario es un típico caso de paso al límite.

La siguiente, y última, proposición sorprende al compararla con los apartados c) y d) de 2.8.7.

2.8.8. Proposición Se verifica:

- a) Si G es finito, $\text{Ph}(K(G,n), U) = \emptyset$ y $\text{Ph}(K(G,n), BU) = \emptyset$,
- b) Si G es de tipo finito y n es par, $\text{Ph}(K(G,n), BU) = \emptyset$,
- c) Si G es de tipo finito y n es impar, $\text{Ph}(K(G,n), U) = \emptyset$.

Demostración:

Es suficiente aplicar el teorema 2.4.1. y la fórmula de Künneth usual para cohomología.

2.8.9. Observación Aplicando la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch, puede demostrarse que $\text{Ph}(K(\mathbb{Z}, 2), U) = \emptyset$.

Obsérvese, en cambio, que en virtud de la proposición

2.8.7. $\text{Ph}(K(\mathbb{Z}, 2), U(m)) \neq \emptyset$ para $m \geq (n+1)/2$.

2.9. Localización y aplicaciones fantasma

En este último apartado, que puede considerarse como un apéndice, me propongo generalizar la sucesión exacta de Milnor (2.19) a todo sistema directo de subcomplejos finitos que recubran un complejo celular.

El teorema fundamental es el siguiente:

2.9.1. Teorema Sea X un CW-complejo y (X_i) un sistema directo de subcomplejos finitos que recubran X . Sea B un espacio de Hopf racional de tipo finito. Entonces, existe una sucesión exacta

$$* \longrightarrow \lim^1 [SX_i, B] \longrightarrow [X, B] \xrightarrow{\psi} [\lim X_i, B] \longrightarrow *$$

Demostración:

Usaré la notación standard para localización. B_p indica el localizado de B en p . En particular B_0 es la racionalización de B .

Recordemos que un espacio de Hopf racional es un espacio tal que B_0 es de Hopf.

Designemos, finalmente, por $\hat{e}: B \longrightarrow \hat{B}$ la completación profinita y por $e: B \longrightarrow \prod_p B_p$ la aplicación inducida por las localizaciones.

Para demostrar el teorema es suficiente comprobar la exhaustividad de ψ y ver que $\text{Ker } \hat{e}_* \cong \lim^1 [SX_i, B]$, donde $\hat{e}_*$ es la aplicación $[X, B] \longrightarrow [X, \hat{B}]$ inducida por $\hat{e}$.

El isomorfismo anterior se basa esencialmente en los dos siguientes lemas de W. Meier y D. Sullivan, respectivamente.

2.9.2. Lema En las condiciones del teorema, si h es un funtor homotópico con coeficientes en $\mathbb{Q}$ -espacios vectoriales, se tiene $h(X) = \lim h(X_i)$.

2.9.3. Lema En las condiciones del teorema, si Y es un CW-complejo arbitrario, se tiene $[X, \hat{Y}] = \lim [X_i, \hat{Y}]$.

Obsérvese, finalmente, que la exhaustividad de ψ ha sido ya demostrada por J.F. Adams para espacios de Hopf homotópicamente asociativos y por A. Deleanu para espacios de Hopf arbitrarios. La demostración para un espacio de Hopf racional es de W. Meier.

Bibliografía

- (2.1) D.W. Anderson: Tesis doctoral, University of California, Berkeley 1964.
- (2.2) D.W. Anderson - L. Hodgkin: "The K-theory of Eilenberg-MacLane complexes", Topology 7 (1968), 317-329.
- (2.3) M.F. Atiyah: Characters and cohomology of finite groups", Pub. Math. IHES 9 (1961).
- (2.4) M.F. Atiyah - F. Hirzebruch: "Vector bundles and homogeneous spaces", Proc. Simp. in Pure Math., 3, A.M.S. 1961, 7-38.
- (2.5) A. Borel: Topology of Lie groups and characteristic classes", Bull. A.M.S. 61 (1955), 397-432.
- (2.6) A.K. Bousfield - D.M. Kan: "Homotopy limits, completions and localisations", L.N. in Math. 304, Springer 1972.
- (2.7) E.H. Brown: Cohomology theories", Ann. of Math. 75 (1962), 467-484.
- (2.8) V.M. Bushtaber - A.S. Miscenko: "K-theory on the category of infinite cell complexes", Math. USSR Izvestija 2 (1968), 515-556.
- (2.9) H. Cartan: "Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie", Séminaire H. Cartan 7 , (1954/55).

- (2.10) H. Cartan - S. Eilenberg: "Homological Algebra",
Princeton University Press 1956.
- (2.11) A. Dold: "Halbexakte Homotopiefunktoren",
L.N. in Math 12, Springer 1966.
- (2.12) B. Eckmann "Cohomologie et classes caractéristiques", C.I.M.E., 1967, 21-95.
- (2.13) B. Eckmann - P.J. Hilton: "Unions and intersections
in homotopy theory", Comment. Math.
Helv. 38 (1963/64), 293-307.
- (2.14) B. Eckmann - P.J. Hilton: "Exact couples in abelian
categories", J. of Algebra 3 (1966),
38-87.
- (2.15) B. Eckmann - P.J. Hilton: "Composition functors and
spectral sequences", Comment. Math.
Helv. 41 (1967), 187-221.
- (2.16) S. Eilenberg - J.C. Moore: "Limits and spectral sequences", Topology 1 (1962), 1-23.
- (2.17) B.I. Gray: "Spaces of the same n-type for all n",
Topology 5 (1966), 241-243.
- (2.18) A.T. Lundell - S. Weingram: "The topology of CW-complexes", van Nostrand 1969.
- (2.19) J.W. Milnor: "On axiomatic homology theory", Pacif.
J. Math. 12 (1962), 337-341.
- (2.20) D. Puppe: "Homotopiemengen und ihre induzierten
Abbildungen", Math. Zeit. (1958),
299-334.

- (2.21) E.H. Spanier: "Algebraic topology", McGraw-Hill 1966.
- (2.22) J. Stasheff: "H-spaces from a homotopy point of view", L.N. in Math 161, Springer 1970.



FUNDACION JUAN MARCH
SERIE UNIVERSITARIA

Títulos Publicados:

- 1.— *Semántica del lenguaje religioso* / A. Fierro
(Teología. España, 1973)
- 2.— *Calculador en una operación de rectificación discontinua*/A. Mulet
(Química. Extranjero, 1974)
- 3.— *Skarns en el batolito de Santa Olalla*/F. Velasco
(Geología. España, 1974)
- 4.— *Combustión de compuestos oxigenados*/J.M. Santiuste
(Química. España, 1974)
- 5.— *Películas ferromagnéticas a baja temperatura*/José Luis Vicent López
(Física. España, 1974)
- 6.— *Flujo inestable de los polímeros fundidos*/José Alemán Vega
(Ingeniería. Extranjero, 1975)
- 7.— *Mantenimiento del hígado dador in vitro en cirugía experimental*
José Antonio Salva Lacombe (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1973)
- 8.— *Estructuras algebraicas de los sistemas lógicos deductivos*/José Plá Carrera
(Matemáticas. España, 1974)
- 9.— *El fenómeno de inercia en la renovación de la estructura urbana.*
Francisco Fernández-Longoria Pinazo (Urbanización del Plan Europa 2.000
a través de la Fundación Europea de la Cultura)
- 10.— *El teatro español en Francia (1935–1973)* / F. Torres Monreal
(Literatura y Filología. Extranjero, 1971)
- 11.— *Simulación electrónica del aparato vestibular*/J.M. Drake Moyano
(Métodos Físicos aplicados a la Biología. España, 1974)
- 12.— *Estructura de los libros españoles de caballerías en el siglo XVI.*
Federico Francisco Curto Herrero (Literatura y Filología. España, 1972)
- 13.— *Estudio geomorfológico del Macizo Central de Gredos*
M. Paloma Fernández García (Geología. España, 1975)
- 14.— *La obra gramatical de Abraham Ibn c Ezra*/Carlos del Valle Rodríguez
(Literatura y Filología. Extranjero, 1970)

- 15.— *Evaluación de Proyectos de Inversión en una Empresa de producción y distribución de Energía Eléctrica.*
Felipe Ruíz López (Ingeniería. Extranjero, 1974)
- 16.— *El significado teórico de los términos descriptivos*/Carlos Solís Santos
(Filosofía. España, 1973)
- 17.— *Encaje de los modelos econométricos en el enfoque objetivos-instrumentos relativos de política económica.*/ Gumersindo Ruíz Bravo
(Sociología. España, 1971)
- 18.— *La imaginación natural (estudio sobre la literatura fantástica norteamericana).* / Pedro García Montalvo
(Literatura y Filología. Extranjero, 1974)
- 19.— *Estudio sobre la hormona Natriurética.* / Andrés Purroy Unanua
(Medicina, Farmacia y Veterinaria. Extranjero, 1973)
- 20.— *Análisis farmacológico de las acciones miocárdicas de bloqueantes Beta-Adrenérgicos.*/ José Salvador Serrano Molina
(Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1970)
- 21.— *El hombre y el diseño industrial.*/Miguel Durán-Lóriga
(Artes Plásticas. España, 1974)
- 22.— *Algunos tópicos sobre teoría de la información.*/ Antonio Pascual Acosta
(Matemáticas. España, 1975)
- 23.— *Un modelo simple estático. Aplicación a Santiago de Chile*
Manuel Bastarache Alfaro (Arquitectura y Urbanismo. Extranjero, 1973)
- 24.— *Moderna teoría de control: método adaptativo-predictivo*
Teoría y realizaciones. /Juan Manuel Martín Sánchez
(Ingeniería. España, 1973)
- 25.— *Neurobiología (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*
- 26.— *Genética (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*
- 27.— *Genética (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*
- 28.— *Investigación y desarrollo de un analizador diferencial digital (A.D.D.) para control en tiempo real.* /Vicente Zugasti Arbizu
(Física. España, 1975)
- 29.— *Transferencia de carga en aleaciones binarias.*/ Julio A. Alonso
(Física. Extranjero, 1975)
- 30.— *Estabilidad de osciladores no sinusoidales en el rango de microondas.* / José Luis Sebastian Franco.
(Física. Extranjero, 1974)

- 31.— *Estudio de los transistores FET de microondas en puerta común.* Juan Zapata Ferrer. (Ingeniería. Extranjero, 1975).
- 32.— *Estudio sobre la moral de Epicuro y el Aristóteles esotérico.* / Eduardo Acosta Mendez (Filosofía. España, 1973)
- 33.— *Las Bauxitas Españolas como mena de aluminio.* / Salvador Ordoñez Delgado (Geología. España, 1975).
34. *Los grupos profesionales en la prestación de trabajo: obrero y empleados.* / Federico Durán López (Derecho. España, 1975)
- 35.— *Obtención de Series aneuploides (monosómicas y ditelosómicas) en variedades españolas de trigo común.* / Nicolás Jouve de la Barreda. (Ciencias Agrarias. España, 1975).
- 36.— *Efectos dinámicos aleatorios en túneles y obras subterráneas.* / Enrique Alarcón Alvarez. (Ingeniería. España, 1975).
- 37.— *Lenguaje en periodismo escrito.* / Fernando Lázaro Carreter, Luis Michelena Elissalt, Robert Escarpit, Eugenio de Bustos, Víctor de la Serna, Emilio Alarcos Llorach y Juan Luis Cebrián. (Seminario organizado por la Fundación Juan March los días 30 y 31 de mayo de 1977).
- 38.— *Factores que influyen en el espigado de la remolacha azucarera, Beta vulgaris L.* / José Manuel Lasa Dolhagaray y Antonio Silván López. (Ciencias Agrarias. España, 1974).
- 39.— *Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos. Productos finitos de espacios con topologías proyectivas de funciones reales.* / José Luis Blasco Olcina (Matemáticas. España, 1975).
- 40.— *Estructuras de la épica latina.* / M^a. del Dulce Nombre Estefanía Alvarez. (Literatura y Filología, España, 1971).
- 41.— *Comunicación por fibras ópticas.* / Francisco Sandoval Hernandez (Ingeniería. España, 1975).
- 42.— *Representación tridimensional de texturas en chapas metálicas del sistema cúbico.* / José Antonio Pero-Sanz Elorz (Ingeniería. España, 1974).
- 43.— *Virus de insectos: Multiplicación, aislamiento y bioensayo de baculovirus.* / Cándido Santiago-Alvarez. (Ciencias Agrarias. Extranjero, 1976).
- 44.— *Estudio de mutantes de saccharamyces cerevisiae alterados en la biosíntesis de proteínas.* / Lucas Sanchez Rodriguez. (Biología. España, 1976).

- 45.— *Sistema automático para la exploración del campo visual.*
José Ignacio Acha Catalina (Medicina, Farmacia y Veterinaria.
España, 1975).
- 46.— *Propiedades físicas de las variedades de tomate para recolección
mecánica/ Margarita Ruiz Altisent (Ciencias Agrarias.España 1975.*
- 47.— *El uso del ácido salicílico para la medida del pH intracelular en
las células de Ehrlich y en escherichia coli/ Francisco Javier
García-Sancho Martín. (Medicina, Farmacia y Veterinaria.
Extranjero, 1974).*
- 48.— *Relación entre iones calcio, fármacos ionóforos y liberación
de noradrenalina en la neurona adrenérgica periférica./*
Antonio García García. (Medicina, Farmacia y Veterinaria.
España, 1975).
- 49.— *Introducción a los espacios métricos generalizados.*
Enrique Trillas y Claudi Alsina. (Matemáticas. España, 1974).
- 50.— *Síntesis de antibióticos aminoglicosídicos modificados./Enrique
Pando Ramos (Química, España, 1975).*
- 51.— *Utilización óptima de las diferencias genéticas entre razas en la
mejora./Fernando Orozco y Carlos López-Fanjul (Biología
Genética. España, 1973).*
- 52.— *Mecanismos neurales de adaptación visual a nivel de la capa
plexiforme externa de la retina./ Antonio Gallego Fernández
(Biología Neurobiología. España, 1975).*
- 53.— *Compendio de la salud humana de Johannes de Ketham./ M^a.
Teresa Herrera Hernández. (Literatura y Filología. España 1976).*
- 54.— *Breve introducción a la historia del Señorío de Buitrago./ Rafael
Flaquer Montequi. (Filosofía y Letras. España, 1975).*

