La Serie Universitaria de la Fundación Juan March presenta resúmenes, realizados por el propio autor, de algunos estudios e investigaciones llevados a cabo por los becarios de la Fundación y aprobados por los Asesores Secretarios de los distintos Departamentos.

El texto íntegro de las Memorias correspondientes se encuentra en la Biblioteca de la Fundación (Castello, 77. Madrid-6).

La lista completa de los trabajos aprobados se presenta, en forma de fichas, en los Cuadernos Bibliográficos que publica la Fundación Juan March.

Estos trabajos abarcan las siguientes especialidades: Arquitectura y Urbanismo; Artes Plásticas; Biología; Ciencias Agrarias; Ciencias Sociales; Comunicación Social; Derecho; Economía; Filosofía; Física; Geología; Historia; Ingeniería; Literatura y Filología; Matemáticas; Medicina, Farmacia y Veterinaria; Música; Química; Teología. A ellas corresponden los colores de la cubierta.

Edición no venal de 300 ejemplares, que se reparte gratuitamente a investigadores, Bibliotecas y Centros especializados de toda España.

Este trabajo fue realizado con una Beca de España, 1974. Departamento de Matemáticas.

Fundación Juan March

SERIE UNIVERSITARIA

Fundación Juan March

Introducción a los espacios métricos generalizados

Enrique Trillas
Claudi Alsina

49

Fundación Juan March

Serie Universitaria

49

Introducción a los espacios métricos generalizados

Enrique Trillas
Claudi Alsina

Fundación Juan March
Castelló, 77. Teléf. 225 44 55
Madrid - 6

La Fundación Juan March no se solidariza necesariamente con las opiniones de los autores cuyas obras publica.

Depósito Legal: M - 6323 - 1978
I.S.B.N. 84-7075-077-01
Ibérica, Tarragona, 34 - Madrid-7

Al Prof. Karl Menger,
con admiración a su obra matemática
y agradecimiento a su generosa amis
tad.

INDICE

INTRODUCCION

Los espacios métricos, introducidos por Fréchet en 1906, posibilitaron a Hausdorff, A. Weil, Nachbin, Efremovič y Császár..., llegar a una serie de conceptos de perfil métrico, fundamentales para el desarrollo del Análisis. Paralelamente, a la vez que Glivenko introducía los retículos valorados, Appert, Ky Fan, Kurepa, Colmez, ... profundizaron en una línea de distancias con valores en estructuras ordenadas, Blumenthal introdujo los métricos booleanos y Everett, Ribenboim ..., analizaron los grupos reticulados usando su métrica natural.

La posibilidad de obtener una modelización que incluyera los factores aleatorios asociados a la incertidumbre, que toda medida conlleva en sí misma, fue dada por Menger (1942) con sus espacios métricos probabilísticos, cuyo estudio ha sido brillantemente desarrollado por A. Wald, B. Schweizer, A. Sklar, A. N. Šerstnev,....

A partir de 1967, con la introducción por Trillas de la noción de espacio métrico generalizado, que considera métricas abstractas valoradas en estructuras algebraico-reticulares, se han unificado los espacios métricos de Fréchet, los probabilísticos de Menger, los booleanos de Blumenthal,..., surgiendo de dicho ensamblaje estructural no solo la belleza formal que toda unificación aporta sino también resultados nuevos. Tal teoría ha sido desarrollada en los trabajos de Trillas y sus colaboradores Alsina, Batle, Grané, Vila..., y es gracias a las dos ayudas de la Fundación March que podemos presentar este resumen de la Memoria donde se recopilan los estudios hasta hoy realizados. La limitación de espacio deja de lado aspectos que como las proximidades, las métricas difusas, las métricas por intervalos,..., están siendo motivo de investigación.

Tal vez, esta teoría sea un ejemplo más del popular lema: "elegir unos buenos espacios donde se puedan probar teoremas interesantes". En cualquier caso, la base de la teoría aparece claramente formulada y cabe esperar que en el futuro surjan los teoremas de interés. Quizás las palabras del poeta catalán Carles Riba (VII Elegia, Elegies de Bierville), recojan con su rima nuestro pensamiento:

"Ítaca, regne petit, conec la cova profunda!
Olivereda amunt, fora camí, en el rocall;
closa i subtil com l'hora d'un sol pensament, per a entrar-hi
calen un front humil sota la llinda i un salt".

E. Trillas - C. Alsina

Barcelona, 11 Septiembre 1.977.

I. CONCEPTOS PRELIMINARES.

Sean X y S dos conjuntos no vacios, $S_1=(S,\leqslant)$ un ordenado parcial y $S_2=(S,+,e)$ un semigrupo conmutativo con neutro e. Un espacio premétrico generalizado ([25]) es una cuaterna (X,S_1,S_2,m), donde $m:X\times X\to S$ (premétrica) satisface, para cualesquiera $a,b,c\in X$,

(1) $m(a,a)=e$,

(2) $m(c,a)\leqslant m(a,b)+m(b,c)$.

Es consecuencia inmediata la simetría $m(a,b)=m(b,a)$. m se dice separadora si $m(a,b)=e$ implica $a=b$. Las premétricas se relativizan a subconjuntos $Y\subset X$ mediante la restricción $m|_{Y\times Y}$. Dos premétricas son iguales si las respectivas cuaternas son idénticas.

La conmutatividad de S_2 será esencial para la relación de "estar-entre" y la asociatividad de + permite extender a "poligonal" la desigualdad triangular (2) cuando se cumple la isotonía de + respecto $\leqslant$ ($x\leqslant y\Rightarrow x+z\leqslant y+z$); en dicho caso S_1 y S_2 integran el semigrupo ordenado $S=(S,+,\leqslant,e)$ y a la terna (X,S,m) se la denomina espacio métrico generalizado ([25]), abreviadamente EMG.

Ejemplo 1. Espacios métricos reales (Fréchet [11]) son EMG en los que $S=(R^+,+,\leqslant,o)$.

Ejemplo 2. Espacios métricos probabilísticos (Menger [15], Wald [33] , Schweizer, Sklar [22] , Šerstnev [23]) son EMG en los que $S=(\Delta^+, \tau, \leqslant, \varepsilon_o)$, siendo

$\Delta^+ = \{F \mid F: R \to [o,1]; F(o)=o$, F continua por la izquierda y no decreciente$\}$,

$\leqslant$ el orden puntual dual de Δ^+ ($F \leqslant G \Leftrightarrow F(x) \geqslant G(x)$, para todo $x \in R$), ε_o la función de salto unidad en x=o, y (Δ^+, τ) un semigrupo ordenado abeliano con unidad ε_o ([20]).

Ejemplo 3. Espacios premétricos booleanos (Blumenthal [6], Blumenthal-Menger [7]) son aquellos en que $S_1=(B,\leqslant)$, $S_2 = (B,\oplus,o)$, siendo B un álgenra de Boole con orden $\leqslant$, mínimo o y diferencia simétrica $\oplus$.

Ejemplo 4. Grupos reticulados G o de Riesz, son premétricos valorados en su parte positiva G^+, al considerar $m(a,b)=\sup\{a,b\} - \inf\{a,b\}$.

Ejemplo 5. La "métrica natural" (Menger [16]) sobre un grupo abeliano G es $n(a,b) = \{a-b, b-a\}$ y dá lugar al premétrico $(G, P_f(G), n)$, donde $P_f(G)$ son las partes finitas de G, ordenadas por inclusión y operables al extender puntualmente la operación de G.

En caso de no haber confusión todo EMG (X,S,m) y todo premétrico (X,S_1,S_2,m) se representarán simplemente por X.

Un <u>morfismo</u> ([25]) entre dos premétricos X_1 y X_2 es un par de aplicaciones $\varphi=(h,F)$, tales que $h:X_1 \to X_2$, $F:S_1 \to S_2$ y $F o\, m_1 = m_2\, o\, hxh$; es decir, que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "hxh"'] & S_1 \arrow[d, "F"] \\ X_2 \times X_2 \arrow[r, "m_2"] & S_2 \end{tikzcd} .$$

Nótese que para todo morfismo (h,F), necesariamente es $F(e_1)=e_2$. Indicaremos por <u>Mor (X_1,X_2)</u> al conjunto de morfismos entre X_1 y X_2. De forma natural, si $\varphi_1=(h_1,F_1)\in$ Mor (X_1,X_2) y $\varphi_2=(h_2,F_2)\in$ Mor (X_2,X_3) cabe definir la composición asociativa $\varphi_2\, o\, \varphi_1=(h_2 o h_1, F_2 o F_1)\in$ Mor(X_1,X_3); mediante la cual Mor(X,X) es un semigrupo, con neutro el par de identidades $i=(I_x,I_s)$. Si $\varphi=(h,F)\in$ Mor (X_1,X_2) y h es epiyectiva, existe la inversa por la derecha $h_d^{-1}:X_2\to X_1$, tal que $h o h_d^{-1}=I_x$ y $m_2=F o m_1 o (h_d^{-1} x\, h_d^{-1})$; si F es inyectiva poseerá inversa parcial izquierda $F_i^{-1}: F(S_1)\to S_1$, tal que $F_i^{-1} o F=I_s$, $F o F_i^{-1}=I_{F(s_1)}$ y $m_1=F_i^{-1} o\, m_2 o\, hxh$; si ambas hipótesis sobre $\varphi=(h,F)$ se verifican, cabe considerar $\varphi_{di}^{-1}=(h_d^{-1}, F_i^{-1})$ el cual satisface $\varphi_{di}^{-1} o\, \varphi=(h_d^{-1} o h, I_s)$ y $\varphi\, o\, \varphi_{di}^{-1}=(I_{x_2}, I_{F(s_1)})$. En particular la biyectividad de h y F ((h,F) es <u>isomorfismo</u>) lleva a definir el isomorfismo inverso $\varphi^{-1}=(h^{-1},F^{-1})\in \mathrm{Mor}(X_2,X_1)$ con el cual $\varphi^{-1}\circ\varphi=(I_{X_1},I_S)$, $\varphi\circ\varphi^{-1}=(I_{X_2},I_{S_2})$.

Designaremos por Isom(X_1,X_2) al conjunto de isomorfismos entre X_1 y X_2, y por Aut(X)=Isom(X,X) al grupo (por composición) de los automorfismos.

Teorema. Si X_1,X_2 son premétricos isomorfos, los respectivos grupos de automorfismos son isomorfos (Isom$(X_1,X_2)\neq\emptyset\Rightarrow$ Aut$(X_1)\approx$ Aut(X_2)).

Para la demostración tómese $(h,F)\in$ Isom(X_1,X_2) y defínase $\emptyset$:Aut$(X_1)\to$Aut(X_2), $\emptyset(j,k)=(h\circ j\circ h^{-1}, F\circ k\circ F^{-1})$.

A parte de los morfismos iso, auto, mono y epi, conviene destacar ciertos tipos especiales:

(1) Homometrías: son morfismos del tipo (h,I_S) entre premétricos con idénticos semigrupos ($S_1\equiv S_2$). La inyectividad de h se sigue de la separación de m_1 y de $m_1=m_2\circ(h\times h)$. Anotaremos Hom(X) al semigrupo (por composición) de las homometrías sobre un premétrico (X,S_1,S_2,m).

(2) Isometrías: son homometrías (h,I_S) que son isomorfismos ($m_1=m_2\circ(h\times h)$ y $m_2=m_1\circ(h^{-1}\times h^{-1})$). Las isometrías sobre un mismo premétrico X dan lugar a la geometría métrica GM(X), grupo por composición, que es subgrupo invariante del grupo Aut(X).

(3) Semejanzas: son morfismos (I_X,F) entre premétri--

cos sobre el mismo conjunto y diferentes semigrupos. Serán de especial interés las semejanzas (I_X, F), donde $F: S \to S'$ sea creciente y subaditiva $(F(a+b) \leqslant' F(a) +' F(b))$ entre (X,S,m) y $(X,S',F\circ m)$. Las semejanzas son un semigrupo por composición y se anotará Sem(X) al grupo de las biyectivas, que es subgrupo invariante del grupo Aut(X).

El siguiente teorema recopila diversos resultados sobre los anteriores grupos.

Teorema.

(i) Si X es un premétrico:

$$\frac{\mathrm{Aut}(X)}{\mathrm{GM}(X)} \approx \acute{\mathcal{G}}(S), \quad \frac{\mathrm{Aut}(X)}{\mathrm{Sem}(X)} \approx \acute{\mathcal{G}}(X),$$

$$\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{GM}(X) \oplus \mathrm{Sem}(X).$$

(ii) Si X_1 es isomorfo a X_2, entonces

$$\mathrm{GM}(X_1) \approx \mathrm{GM}(X_2), \quad \mathrm{Sem}(X_1) \approx \mathrm{Sem}(X_2)$$

(iii) Si (I_X, F) es semejanza entre X y X' es $\mathrm{Hom}(X) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(X')$ (contención monomórfica) y si F es inyectiva $\mathrm{Hom}(X) \approx \mathrm{Hom}(X')$.

(iv) Si (h, I_S) es homometría entre X y X' (con igual S) es $\mathrm{Sem}(X') \hookrightarrow \mathrm{Sem}(X)$, y si h es epiyectiva $\mathrm{Sem}(X') \approx \mathrm{Sem}(X)$.

Ejemplo 1 bis. Si $(X,(R^+,+,\leqslant_o),d)$ es un EM real, al ser

$\exp : R^+ \to R^+ - \{o\}$ estrictamente creciente, $\exp(o)=1$, $\exp(a+b)=\exp(a).\exp(b)$, resulta que $(X,(R^+-\{o\},.,\leqslant,1), \exp o d)$ es un EMG sobre el semigrupo multiplicativo de los reales positivos semejante al dado inicialmente. A su vez, $\log : R^+-\{o\} \to R^+$, permite asegurar que el segundo métrico es semejante al primero. Así el par de métricos son mutuamente semejantes sin ser iguales.

<u>Ejemplo 2 bis.</u> Si $(X,(\Delta^+,*,\leqslant,\varepsilon_o),m)$ es un EM probabilístico de Wald (donde * es la convolución), las aplicaciones $F_1 : \Delta^+ \to R^+, F_1(f) = -\log \int_o^\infty \exp(-x)df$ y $F_2 : \Delta^+ \to R^+, F_2(f) = \sup\{x \in R / f(x)=o\}$, son crecientes, nulas en ε_o y verifican $F_i(f*g)=F_i(f)+F_i(g)$, $i=1,2$; por tanto definiendo $m_1=F_1 \circ m$ y $m_2=F_2 \circ m$, los EM reales resultantes (X,m_i), $i=1,2$, son semejantes al de Wald dado. Todo EM real $(X,(R^+,+,\leqslant o),d)$ puede considerarse como EM probabilístico al establecerse la semejanza (I_x, ε), dada por $\varepsilon : R^+ \to \Delta^+$, $\varepsilon(X)=\varepsilon_x$ (salto unidad en x) y considerar en Δ^+ una operación τ tal que $\tau(\varepsilon_x,\varepsilon_y)=\varepsilon_{x+y}$ [por ejemplo $\tau = *$, $\tau=\tau_T$ ([20])].

<u>Ejemplo 3 bis.</u> Si B es un premétrico booleano y el álgebra B admite una medida $\mu : B \to R^+$, como tal función es creciente, subaditiva $[\mu(x \oplus y) \leqslant \mu(x)+\mu(y)]$ y verifica $\mu(0)=o$, resulta $m_\mu = \mu \circ m$ una distancia que da el EM real (B,R^+,m_μ),

semejante al premétrico dado de manera que si $m(x,y)=x\oplus y$ y μ es una probabilidad P se obtiene la distancia $P(x\oplus y)$, fundamental en la Teoría de la Probabilidad.

Ejemplo 4 bis. Si en un grupo reticulado G se consideran las dos estructuras $(G,(G^{+},+,\leqslant,o),|\ |)$ y $(G,(P_f(G),\circ,C,\{o\}),n)$ ([3]) resulta la segunda semejanza a la primera, dado que $\max:P_f(G)\to G$ es creciente y $(\max \circ n)(a,b)=\max\{a-b,b-a\}=|a-b|$.

Si $I(m)=\{m(a,b);\ a,b\in X\}$, se verifica que $e\in I(m)$ y en caso de ser e minimal de dicho ordenado, la relación binaria de X: $aMb\Leftrightarrow m(a,b)=e$, es una equivalencia compatible con m, por lo que si $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\ldots$ son elementos de X/M, cabe definir $\bar{m}(\bar{a},\bar{b})=m(a,b)$ y $(X/M,\mathcal{S},\bar{m})$ es el premétrico cociente con $\bar{m}$ separadora.

Mas generalmente, si $\varphi=(h,F)$ es morfismo entre dos premétricos X_i $(i=1,2)$ tales que $e_2=F(e_1)$, siendo e_i minimal en $I(m_i)$, $i=1,2$, entonces $h:X_1/M_1\to X_2/M_2$, $\bar{h}(\bar{a})=\overline{h(a)}$, lleva al morfismo $\bar{\varphi}=(h,F)$ entre los premétricos X/M_1 y X/M_2.

Teorema. Con las notaciones anteriores:

$\mathrm{Sem}(X)=\mathrm{Sem}(X/M)$, $\mathrm{Hom}(X)\approx\mathrm{Hom}(X/M)$, $\mathrm{GM}(X)\approx\mathrm{GM}(X/M)$, $\mathrm{Aut}(X)\approx\mathrm{Aut}(X/M)$.

En conclusión, el paso al cociente identificando los elementos que "no distan nada", no altera las caracterís ticas geométricas del premétrico dado, siempre que e sea minimal en I(m), es decir, en tal caso pueden suponerse las premétricas separadoras.

Es un problema estructural importante la obtención de un "producto" adecuado de EMG([1]).

Tomando como "objetos" los EMG (X,S,m) y como "morfis mos" los (f,g) de dichos espacios con g subaditiva y creciente, se define una subcategoría $\underline{EMG^*}$ de la categoría general de los EMG.

Fijado un preordenado $(I,\leqslant)$, un <u>sistema proyectivo métrico</u> $(\{(X_i,S_i,m_i);i\in I\},\{(f_{ij},g_{ij});(i,j)\in\leqslant\})$, es un sistema proyectivo categorial en EMG_*^*. Si este es el caso, resulta que $S_I=(\{S_i;i\in I\},\{g_{ij};(i,j)\in\leqslant\})$ es sistema proyectivo en una categoría de semigrupos ordenados que admite por límite proyectivo al semigrupo ordenado:

$$S_\infty=\underset{\leftarrow}{\lim}\, S_I=\{x\in\prod_{i\in I} S_i\,|\,(g_{ij}\circ\pi_j)^{(x)}=\pi_i(x),i\leqslant j\}\ ;$$

análogamente $X_I=(\{X_i;i\in I\},\{f_{ij};(i,j)\in\leqslant\})$ es sistema proyectivo conjuntista de límite proyectivo:

$$X_\infty=\underset{\leftarrow}{\lim}\, X_I=\{x\in\prod_{i\in I} X_i\,/\,(f_{ij}\circ\pi_j)(x)=\pi_i(x),i\leqslant j\}\ ,$$ que puede ser eventualmente vacío.

Escogiendo (I,=), conjunto no vacío con la ordenación "igualdad", resulta que

$$X_\infty=\prod_{i\in I} X_i,\quad S_\infty=\prod_{i\in I} S_i,$$

y definiendo $m_\pi : X_\infty \times X_\infty \to S_\infty$, $m_\pi((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}) =$

$= (m_i(x_i,y_i))_{i\in I}$, se obtiene el EMG $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} S_i, m_\pi)$.
Dicho espacio merece el nombre de <u>espacio producto</u> de la familia dada, al verificarse:

<u>Teorema.</u> $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} S_i, m_\pi) = \underleftarrow{\lim}(\{(X_i,S_i,m_i); i\in I\},$

$\{(I_{X_i}, I_{S_i}); i\in I\})$.

Si todos los EMG se valoran sobre el mismo semigrupo S, entonces $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} S, m_\pi)$ es semejante al EMG $(\prod_{i\in I} X_i, S, \varphi_o\, m_\pi)$ (valorado sobre S !) siempre que pueda definirse la semejanza $(I_{\prod_{i\in I} X_i}, \varphi)$ con $\varphi: \prod_{i\in I} S \to S$ creciente, subaditiva y nula solo en el neutro.

<u>Ejemplo.</u> Si $\{(X_i, R^+), d_i); i\in N\}$ son EM reales, se forma el EMG $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \prod_{i=1}^{\infty} R^+, d_\pi)$ o los productos finitos

$(\prod_{i=1}^{n} X_i, (R^+)^n, d_{\pi_n})$. Las aplicaciones

$\varphi: (R^+)^N \to R^+$, $\varphi_i: (R^+)^n \to R^+$, i=1,2,3, definidas por

$$\varphi((a_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{a_i}{1+a_i}, \quad \varphi_1(a_1,\ldots,a_n) = +\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2},$$

$\varphi_2(a_1,\ldots,a_n) = \mathrm{Max}(a_1,\ldots,a_n)$ y $\varphi_3(a_1,\ldots,a_n) = a_1+\ldots+a_n$, facilitan las semejanzas antes señaladas y se obtienen como espacios semejantes los EM reales clásicos

$$\left(\prod_{i=1} X_i, R^+, d_{\text{Fréchet}} = \varphi \circ d_{\pi}\right), \quad \left(\prod_{i=1}^{n} X_i, R^+, d_{\text{euclidea}} = \varphi \circ d_{\pi_n}\right),$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, R^+, d_{\text{Máximo}} = \varphi \circ d_{\pi_n}\right) \text{ y } \left(\prod_{i=1}^{n} X_i, R^+, d_{\text{suma}} = \varphi \circ d_{\pi_n}\right).$$

Por pura dualidad con los sistemas proyectivos métricos cabe considerar en la categoría EMG^*, los <u>sistemas inductivos métricos</u>, de los cuales resulta ([1]).

<u>Teorema.</u> Todo sistema inductivo métrico $(\{(X_i, S_i, m_i); i \in I\}, \{(f_{ij}, g_{ij}); (i,j) \in \leqslant\})$ posee como límite inductivo un EMG $(\bar{X}, \bar{S}, \bar{m})$ en la categoría EMG^*.

La construcción efectiva de $(\bar{X}, \bar{S}, \bar{m})$ se basa en $\bar{X} = (\bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\})/\sim$, donde $\sim$ es la equivalencia:

"$(x_i, i) \sim (x_j, j) \Leftrightarrow$ Existe $k \in I, k \geqslant i,j$ tal que $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$", y análogamente reemplazando las f por las g, se obtiene $\bar{S} = (\bigcup_{i \in I} S_i \times \{i\})/_R$. $\bar{X}$ y $\bar{S}$ son, a su vez, límites inductivos en las respectivas categorias. Por último $\bar{m}: \bar{X} \times \bar{X} \to \bar{S}$, está definida por $\bar{m}\left(\overline{(x_i, i)}, \overline{(x_j, j)}\right) = \overline{(m_k(f_{ik}(x_i), f_{jk}(x_j)), k)}$, siendo $k \in I$ cualquiera $k \geqslant i,j$.

Formulados para la categoria de los EMG los conceptos de sistema proyectivo y límite inductivo se logra no solo la belleza formal de una presentación categorial, sino aclarar también el problema del producto y de la convexificación, que si clásicamente se formulaba presupo-niendo una estructura vectorial, es a raíz de la formulación por Menger (1920) de la relación métrica de "estar entre", cuando cabe adoptar el criterio de convexidad secuencial relativo a dicha relación.

Una relación ternaria de "estar entre" en $X \neq \emptyset$ ([33,25]) es un subconjunto $E \subset X \times X \times X$, verificando

(I) $(a,b,c) \in E \Rightarrow a \neq b \neq c \neq a.$

(II) $(a,b,c) \in E \Rightarrow (c,b,a) \in E.$

(III) $(a,b,c) \in E \Rightarrow (c,a,b) \notin E,\ (b,c,a) \notin E.$

(IV) $(a,b,c) \in E$ y $(a,c,d) \in E \Rightarrow (a,b,d) \in E$ y $(b,c,d) \in E.$

Si $(a,b,c) \in E$ se dice "b está entre a y c" y se abrevia abc. Esta noción geométrica básica puede introducirse en los EMG como sigue: Si (X,S,m) es un EMG con m separadora y más de dos puntos, la relación ternaria en X:

$$(a,b,c) \in E_m \Leftrightarrow a \neq b \neq c \neq a \text{ y } m(a,c)=m(a,b)+m(b,c),$$

satisface (II) por la simetria de m y la conmutatividad de +. Para que verifique (III), (IV) hay que añadir condiciones suplementarias como son que $e=\text{Mín } I(m)$ y que la isotonia sea estricta en $I(m)$ $(x<y \Rightarrow x+z<y+z)$. Ello no ga-

rantiza $E_m \neq \emptyset$. El comportamiento de E_m bajo los morfismos métricos está dado por el

<u>Teorema.</u> Sean X_1 ,X_2 , dos EMG tales que E_{m_1} ,E_{m_2} sean las correspondientes relaciones de "estar entre" y $(h,F):X_1 \to X_2$. Si F es morfismo algebraico, és $(h\times h\times h)(E_{m_1}) \subset E_{m_2}$ y vale la igualdad si, además, F es inyectiva y h epiyectiva; en particular para las isometrías. Si (I_X,F) es una semejanza de (X,S,m) con (X,S',m') y F es morfismo algebraico, $E_m \subset E_{m'}$, siendo $E_m = E_{m'}$ si F es inyectiva.

A partir de la relación de "estar entre" en un EMG(X,S,m) y dado $A \subset X$, puede definirse [1,17] que A es <u>secuencialmente convexo</u> si, para todo par $a,b \in A, a \neq b$, existe $c \in A$, $a \neq c \neq b$, tal que $(a,b,c) \in E_m$, es decir, existe un "punto intermedio $c \in A$" tal que $m(a,c)+m(c,b)=m(a,b)$. El hecho de que X no sea necesariamente secuencialmente convexo, coloca a dicho criterio en clara alternativa a las nociones clásicas de convexidad.

<u>Teorema.</u> Si (X,S,m) es un EMG, existe un monomorfismo (Φ,φ) en un EMG $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$ secuencialmente convexo y tal que $\bar{S}$ es a su vez secuencialmente convexo en orden $(\forall \bar{a},\bar{b} \in \bar{S}, \bar{a} \lneq \bar{b}, \exists \bar{c} \in \bar{S}$ tal que $\bar{a} \lneq \bar{c} \lneq \bar{b})$.

La construcción se basa ([1]) en considerar el ordenado $(N,\leq)$, la sucesión de productos $\{(\prod_{k=1}^{2^i} X, \prod_{k=1}^{2^i} S, \prod_{k=1}^{2^i} m);$ $i\in N\}$ y definir, si $i\leq j$, $f_{ij}: X^{2^i} \to X^{2^j}$, $g_{ij}: S^{2^i} \to S^{2^j}$, mediante $h(x_1,\ldots,x_{2^i}) = (\underbrace{x_1,\ldots,x_{2^i},\ldots\ldots,x_1,\ldots,x_{2^i}}_{2^{j-i}})$, para $h=f_{ij}$ ó g_{ij}. Así se determina un sistema inductivo métrico cuyo límite inductivo (Teorema anterior) $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$ verifica las propiedades requeridas. Pero además, dicho convexificado es representable en un producto numerable.

Teorema. $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$ es isométrico a un subespacio (X^*,S^*,m^*) de $(\prod_{i=1}^{\infty} X, \prod_{i=1}^{\infty} S, m_\pi)$.

Exactamente, X^* (resp. S^*) es el subconjunto de $\prod_{i=1}^{\infty} X$ (resp. $\prod_{i=1}^{\infty} S$) generado al repetir indefinidamente las "tiras" de elementos de cardinalidad potencias de 2 y $m^* = m_\pi|_{X^*\times X^*}$. Por tanto a efectos computacionales, el convexificado admite el tratamiento de subespacio del producto numerable. Como aplicación nótese que:

Teorema. Todo EM real (X,R^+,d) admite un monomorfismo en un EM real $(X,R^+,\tilde{d})$, secuencialmente convexo.

II. NOCIONES GEOMETRICAS EN LOS EMG.

En lo que sigue, $L=(X\leqslant\vee,\wedge)$ será un retículo que, si tiene máximo y mínimo se representarán respectivamente por u y a; $S_2=(S,+)$ será un grupoide y de una aplicación $v:X\to S$ diremos que es una S_2-valoración de L, si cualesquiera que sean x, y de X, es $v(x)+v(y)=v(x\vee y)=v(x\wedge y)$. Obviamente si L es una cadena toda aplicación $X\to S$ es una S_2-valoración; en cualquier caso las aplicaciones constantes son S_2-valoraciones.

Diremos que la terna (L,S_2,v) es un <u>retículo valorado</u>, siendo dos retículos valorados iguales si las respectivas ternas son idénticas. Dados dos retículos valorados (L,S_2,v) y (L',S'_2,v'), diremos que $\varphi=(h,F)$ es un <u>morfismo</u> entre ambos, si: (i) $h:X\to X'$, (ii) $F:S\to S'$, (iii) $Fov=v'oh$. Son de interés los casos particulares siguientes:
1) $L=L'$, $h=I_X$, en el que $v'=Fov$, diciéndose de (I_X,F) que es una <u>semejanza</u> entre (L,S_2,v) y (L',S'_2,v') que, con abuso de lenguaje, se representa por F; 2) $S_2=S'_2$, $F=I_S$, en el que $v=v'oh$, diciéndose que (h,I_S) es una <u>homovaloración</u> que se representa por h, recibiendo el nombre de <u>isovaloración</u> si h es biyectiva.

El conjunto de todas las isovaloraciones $X\to X$ es un grupo respecto de la composición de aplicaciones, que llamaremos la <u>geometría valorada</u> de (L,S_2,v) y escribiremos $GV(L,S_2,v)$ o simplemente $GV(L)$, si no hay lugar a confu--

sión. Está claro que las isovaloraciones son las autobiyecciones de X que permutan entre si a los elementos de cada clase de X/v; por tanto, si $\mathfrak{S}_{[x]_v}$ es el grupo simétrico de la clase $[x]_v = \overset{-1}{v}(v(x))$ y si X/v es finito, es $GV(L) = \bigoplus_{[x]_v \in X/v} \mathfrak{S}_{[x]_v}$.

Análogamente al caso de los morfismos entre EMG se prueban los siguientes resultados.

<u>Teorema.</u> (i) Dos retículos valorados entre los que existe una isovaloración tienen isomorfas las geometrias valoradas.

(ii) Las geometrias valoradas de (L,S_2,v) y (L,S'_2,v') coinciden si y solo si entre ambos existe una semejanza biyectiva sobre v(X).

(iii) $GV(L,S_2,v) = \mathfrak{S}_X \Leftrightarrow$ v es constante.

$GV(L,S_2,v) = \{I_X\} \Leftrightarrow$ v es inyectiva.

En el caso particular (usual) que S_2 es un grupo abeliano (con neutro o) que es la parte aditiva de un anillo unitario A=(S,+,.,1), el conjunto de todas las S_2-valoraciones de L con las operaciones puntuales es un A-módulo unitario, del que las constantes son un subanillo unitario isomorfo al A. Así, <u>cuando L es el álgebra de Boole P(X) de las partes de un conjunto finito</u> con n elementos, el módulo de las S_2-valoraciones es suma directa del submódulo de las homogéneas $(v(\emptyset)=o)$ y del de las constantes, quedando determinada una valoración v por las imágenes de $\emptyset$ y de los singletones; concretamente, si $Y=\{x_1,\dots,x_h\}\subset X$, es $v(Y)=\sum_{i=1}^{h} v(\{x_i\})-(h-1)v(\emptyset)$, con lo que las aplicaciones $v_1,\dots,v_n$ definidas por $v_i(A)=1$ si $x_i\in A$ y $v_i(A)=o$ si $x_i\notin A$, $i=1,\dots,n$, son valoraciones linealmente independientes que permiten expresar en la forma $v=\sum_{i=1}^{n} k_i v_i+Cte$ a toda valoración v. Por ejemplo, si considereamos el álgebra de Bernouilli $\{a,x,\bar{x},u\}$ y como valoración v la "complementación" (con anillo el dado por la diferencia simétrica y la intersección) es $v=xv_1+\bar{x}v_2+u$, donde v_1 y v_2 están definidas por $u=v_1(x)=v_1(u)=v_2(\bar{x})=v_2(u)$, $a=v_1(a)=v_1(\bar{x})=$ $=v_2(x)=v_2(a)$.

Siguiendo en la hipótesis de que S_2 sea un grupo es fácil ver, análogamente al caso clásico, que es $v(a)=o \Leftrightarrow [x\wedge y=a \Rightarrow v(x\vee y)=v(x)+v(y)]$. Si $S_1=(S,\leqslant)$ es un ordenado parcial, se dice que v es una valoración creciente si $x\leqslant y \Rightarrow v(x)\leqslant v(y)$, en los órdenes respectivos de L y de S_1; en tal caso, $v^{-1}(v(a))$ es un ideal y $v^{-1}(v(u))$ es un filtro de L, probándose análogamente al caso clásico, y con independencia de toda relación entre S_1 y S_2, el siguiente

Teorema. Si un retículo L admite una S_2-valoración creciente estrictamente ($x<y \Rightarrow v(x)< v(y)$), entonces L es modular.

Cuando L admite una negación t (aplicación $t:X \to X$, tal que (i) $x \leqslant t^2 x$, (ii) $t(x \vee y)=t(x)\wedge t(y)$, $t(x\wedge y)=t(x)\vee t(y)$ puede definirse en X la suma de Sales [19] $x \oplus_t y=(x\wedge tx)\vee \vee(x\wedge ty)\vee(y\wedge tx)\vee(y\wedge ty)$, que si L es distributivo queda reducida a $x \oplus_t y=(x\vee y)\wedge t(x\wedge y)$ (la "diferencia simétrica" en el caso de las álgebras de Boole, con t la complementación), siendo entonces la identidad I_x una $(X, \oplus_t)$-valoración al igual que todos los endomorfismos del grupoide $(X, \oplus_t)$. Es de interés el estudio, realizado por A. Vila [32], de las valoraciones de un retículo con negación t relativas al grupoide conmutativo $(X, \oplus_t)$ o aplicaciones $v:X \to X$, tales que $v(x) \oplus_t v(y)=v(x\vee y) \oplus_t v(x\wedge y)$, del que son de destacar los siguientes resultados.

Teorema. (i) Los endomorfismos algebraicos de $(X, \oplus_t)$ son $(X, \oplus_t)$-valoraciones de L si y sólo si I_x es una valoración.

(ii) Un endomorfismo reticular f del retículo L es una $(X, \oplus_t)$-valoración creciente si y sólo si I_x es una $(X, \oplus_t)$-valoración de $f(X)$.

Teorema. Si L es un álgebra de Boole y t es la complementación, una aplicación $v:X \to X$ es

(i) una $(X,\oplus)$-valoración $\Leftrightarrow v(x\oplus y)=v(x)\oplus v(y)\oplus v(o)$

(ii) una $(X,\oplus)$-valoración creciente con $v(o)=o$ $\Leftrightarrow$ es un endomorfismo del anillo booleano $(X,\oplus,\wedge)$.

Cuando $S=(S,+,\leqslant)$ es un grupo ordenado diremos que v es una S-valoración (estricta) si es una S_2-valoración creciente (estrictamente). Respecto del carácter distributivo de L vale el

<u>Teorema.</u> L es distributivo si y sólo si admite una S-valoración estricta v tal que, cualesquiera que sean x,y,z de X, es:

$$v(x\vee y\vee z)+v(x\wedge y\wedge z)^{-1}=v(x\vee y)+v(x\vee z)+v(y\vee z)+v(x)^{-1}+$$
$$+v(y)^{-1}+v(z)^{-1}.$$

No es difícil ver, como clásicamente, que siendo <u>L un álgebra de Boole</u> y <u>v una S-valoración, si el ideal $v^{-1}(v(a))$ es primo v sólo toma dos valores.</u>

Si S^+ es el cono positivo del grupo ordenado S, es $S^+=(S^+,+,\leqslant)$ un semigrupo ordenado con neutro o y, si <u>L admite una S-valoración v, es (X,S^+,d_v)</u> un EMG con $d_v(x,y)=v(x\vee y)+v(x\wedge y)^{-1}$, <u>siendo</u> d_v <u>separadora si y sólo si v es estrictamente creciente.</u> Cuando <u>L es un álgebra de Boole y S conmutativo</u>, es $d_v(x,y)=v(x\oplus y)+v(o)^{-1}$, de manera que en tal caso la equivalencia módulo d_v coincide con la dada por el ideal $v^{-1}(v(o))$, y si v es inyectiva, la geometría métrica del EMG (X,S^+,d_v) <u>es el grupo de las</u>

traslaciones de $(X,\oplus)$.

Si el grupo ordenado S tiene como único auto-opuesto al neutro 0 y la S-valoración v (de L) es estricta, la geometría valorada de (L,S,v) es un subgrupo de la geometría métrica de (X,S^+,d_v).

En los EMG (X,S^+,d_v) pueden definirse las dos relaciones de "estar entre" E_{d_v} (si el criterio dado en I es aplicable) y $E_< = \{(a,b,c) \mid a<b<c \text{ ó } c<b<a\}$, dada por el orden; siempre es $E_< \subset E_{d_v}$, con lo que E_{d_v} no es vacía. Si L es una cadena, entonces $E_{d_v} = E_<$. El estudio de las relaciones de "estar entre" en los EMG, iniciado en [25] está siendo continuado actualmente.

Si S es un grupo de Riesz, I_s es una S-valoración estricta y (S,S^+,d_{I_s}) es un EMG en el que $d_{I_s}(x,y) = (x \vee y)+(x \wedge y)^{-1}$ (METRICA NATURAL DEL GRUPO RETICULADO S) es separadora; si $S=(R,+,\leqslant)$ es el grupo aditivo real, es $x\vee y - x\wedge y = |x-y|$ la distancia euclidea usual, y si $S=(R_o^+,\cdot,\leqslant)$ es el grupo multiplicativo de los reales positivos estrictamente, es ${}^{x\vee y}/_{x\wedge y}$ su métrica generalizada natural. En este caso de los grupos de Riesz, la geometría valorada de su propio retículo es un SUBGRUPO INVARIANTE de la geometria métrica de (S,S^+,d_v), al considerar una S-valoración estricta del mismo: si considera-mos la recta real, las R-valoraciones son simplemente las aplicaciones $R \to R$ crecientes y la geometría métrica de (R,R^{+},d_{v}) consta de las aplicaciones $h:R \to R$ que siendo biyectivas verifican $|v(hx)-v(hy)|=|vx-vy|$, es decir tales que o bien $v-voh=Cte$, o bien $v+vh=Cte$, por lo que en particular si $v=I_{R}$ (métrica natural) las únicas isometrias son las del tipo $h=I_{R}+Cte$ y $h=-I_{R}+Cte$. Este interesante resultado es general, ya que <u>las únicas isometrias homogéneas (que cambian el cero en si mismo) de un grupo totalmente ordenado con su métrica natural son la identidad y el cambio de signo.</u>

Precisamente, la geometria métrica de los grupos de Riesz con su métrica natural ha sido completamente estudiada por J. Grané [12] , a partir de caracterizar a las <u>isometrias homogéneas</u> por el hecho de ser los <u>morfismos de la estructura aditiva que conservan el valor absoluto</u> ("isovaloraciones que son morfismos algebraicos"), siendo <u>su grupo suma directa de grupos de dos elementos</u> y empleando como técnica la representación de grupos reticulados de Ribenboim (perfeccionada por el mismo Grané), con la que se prueban los siguientes

<u>Teorema.</u> Toda isometria es el producto de una traslación del grupo por una isometría homogénea.

Teorema. El grupo de las isometrías homogéneas del producto (de la suma directa) de grupos de Riesz es el producto directo de los grupos de isometrias homogéneas de los factores, por lo que el producto directo $\prod_{i \in I} G_i$ (la suma directa $\sum_{i \in I} G_i$) de grupos totalmente ordenados tiene por grupo de isometrias homogéneas al Z_2^I .

Del trabajo de J. Grané debe citarse, por su interés, originalidad e importancia en Análisis funcional, el estudio de las isometrias de un f-anillo reticulado.

Cuando el grupo S_2 es auto-Opuesto ($x+x=o$, para todo x), toda aplicación $f:X \to S$ permite considerar el premétrico (X,S_2,S_1,d^f), con $d^f(x,y)=f(x)+f(y)$, en el que la desigualdad triangular es una igualdad y es d^f separadora si y sólo si f es inyectiva. En particular, si L es un álgebra de Boole, con cada $f:X \to X$ se dispone del premétrico $(X,(X,\oplus),(X,\leqslant),d^f)$ y en el caso $f=I_X$ cabe hablar de la métrica natural (vid. Blumenthal-Menger [7] del álgebra de Boole $d_{I_X}(x,y)=x\oplus y$, por analogía con el caso de los grupos de Riesz pero recordando que, si se considera el premétrico anterior, ni vale la isotonía ni I_X es $(X,\oplus)$-valoración. Respecto de las geometrias cabe, en este caso, probar los siguientes

<u>Teorema.</u> Si S_2 es un grupo auto-opuesto, S_1 un ordenado y (L,S_2,v) un retículo S_2-valorado, la geometría valorada de (L,S_2,v) es un subgrupo invariante de la geometría métrica del premétrico (X,S_2,S_1,d^v).

<u>Teorema.</u> Si L es un álgebra de Boole, el grupo cociente entre la geometria métrica de $(X,(X,\oplus),(X\leqslant),d^v)$ y la geometría valorada de $(L,(X,\oplus),v)$ es isomorfo al grupo $(X/v,\bar{\oplus})$.

En este caso, si v es constante la geometria métrica es $\mathcal{G}_X$ y si es inyectiva es el grupo de las traslaciones de $(X,\oplus)$.

Continuando con el análisis de los EMG sobre grupos auto-opuestos, hay que notar que el <u>único orden respecto del que la operación es isótona es la igualdad</u>; por consiguiente, si $(S,+)$ es un grupo auto-opuesto el único grupo ordenado sobre él es el $(S,+,=)=S^=$ y a un EMG del tipo $(X,S^=,d)$ lo llamaremos METRICO INVOLUTIVO [30]. En tales métricos la desigualdad triangular es realmente una igualdad y sucede que <u>$(X,S^=,d)$ es un métrico involutivo $\Leftrightarrow$ existe $v:X\to S$ tal que $d=d^v$</u>, verificándose <u>$d^v=d^{v'}$ $\Leftrightarrow$ existe $k\in S$ tal que $v'=v+k$</u>, por lo que basta trabajar en el cociente de S^X por la equivalencia definida por $v'=v+k$, $k\in S$, cuyas clases agrupan las aplicaciones que dan la misma distancia y a las que llamaremos <u>$S^=$-normas.</u>

Aparentemente, la geometría de un métrico involutivo es simple; p. ej., si se definiera una relación de "estar entre" como en § I, resultaría que en toda terna de pun-- tos distintos cualquiera de ellos estaría entre los otros dos y, en otro orden, el concepto de entorno esférico $E_x(k)$ queda reducido al de circunferencia que, por ser $E_x(k)=v^{-1}(k+v(x))$ es no vacía solo si $k+v(x)\in v(X)$, siendo las clases de X/v, sorprendentemente, circunferencias de centro en un punto y radio 0. La geometría métrica de $(X,\overset{=}{S},d^{v})$ es $GM_{v}(X)=\{h\in \mathcal{G}_x \mid d^{v}o(hxh)=d^{v}\}=\{h\in {}_{x} \mid d^{v}oh=d^{v}\}$, que no depende de la elección de v en la $\overset{=}{S}$-norma ya que $GM_{v}(X)=GM_{v+k}(X)$. Está claro que <u>$h\in GM_{v}(X)$ $\Leftrightarrow$ existe $k_h\in S$ tal que $voh=k_h+v$</u>, de manera que para cada h es k_h única y el morfismo entre grupos dado por $\varphi(h)=k_h$ tiene núcleo $\{j\in GM(X)\mid voj=v\}$: subgrupo invariante de la geometría métrica constituido por aquellas isometrias que conservan el valor de la $\overset{=}{S}$-norma y que tiene un papel análogo al de la geometría valorada. Al subgrupo imágen de φ, $\{k_h \mid h\in GM\}$, lo llamaremos ESPECTRO DE $(X,\overset{=}{S},d^{v})$ y lo escribiremos $sp(v)$, siendo $GM_{v}(X)/\ker\varphi\approx sp(v)$ y representando las clases de isometrias h con igual k_h, es decir, <u>los tipos de isometrias del métrico involutivo que son realmente posibles.</u> Hay que remarcar: (i) $\ker\varphi = \{I_x\}\Leftrightarrow$ v es inyectiva; (ii) $\ker\varphi=\mathcal{G}_x \Leftrightarrow v$ es constante; (iii) Si v es inyectiva y $v(X)$ subgrupo de $\overset{=}{S}$, es $Sp(v)=v(X)$

A causa de (i), solo existen isometrías distintas de la identidad con un punto fijo cuando v no es inyectiva. Además, es obvio que d^{v} es separadora si y sólo si es v inyectiva. Es más, dado un métrico involutivo con d^{v} no separadora, siempre es posible dotar a X/v de una tal distancia que lo sea, ya que $\hat{v}:X/v \to S$, $\hat{v}([x]_v)=v(x)$ está bien definida y $d^{\hat{v}}([x]_v, [y]_v)=d^{v}(x,y)$ es una distancia separadora. Hay que observar que $sp(\hat{v})$ es un subgrupo de $sp(v)$.

Cuando v es inyectiva (propiedad de toda la $\overset{=}{S}$-norma), es $h \in GM(X) \Leftrightarrow$ existe $k_h \in S$ tal que $v \circ h=k_h+v$, y si dos isometrias h,j coinciden sobre un elemento de X, es $h=j$. Así pues, en tal caso, si h es una isometria es $h(x)= =v^{-1}(k_h+v(x))=E_x(k_h)$, para todo $x \in X$, con lo que si $v(X)$ es subgrupo de $\overset{=}{S}$: (i) Para cada $Z \in X$ existe el único punto $y=h(Z)$, tal que $h(x)=v^{-1}(vZ+vy+vx)$; (ii) Si $y \neq Z$, existe la única isometría $h_{yZ}(x)=v^{-1}(vy+vZ+vx)$ tal que $h_{yZ}(y)=Z$, que no es la identidad al ser $vy+vZ \neq 0$. Por consiguiente, si v es inyectiva y $v(X)$ subgrupo de $\overset{=}{S}$ se puede definir en X la operación $x \textcircled{v} y =v^{-1}(v(x)+v(y))$ que lo dota de estructura isomorfa a la de $v(X)$, con lo que $GM_v(X)$ es el grupo de las traslaciones del grupo $(X,\textcircled{v})$, resultado que facilita estructura geométrica en X a las isometrías.

Es de destacar que si $g:H\to X$ $(\phi\neq H\subset X)$ es una CONGRUENCIA (biyección tal que $d^{V}(r,s)=d^{V}(g(r),g(s))$, para cualesquiera puntos r,s de H), existe una única isometría de X (la traslación $x Ⓥ (h Ⓥ g(h))$, $h\in H$) que restringida a H es g. Todo ésto sugiere la consideración del caso en que, siendo $(X,\bar{\bar{S}},d)$ un métrico involutivo, sea $(X,.)$ un grupo con neutro e, en el que basta considerar $V_e(x)=d(e,x)$, para tener $V_e\in S^X$ tal que $d=d^{V_e}$ (las aplicaciones de una $\bar{\bar{S}}$- norma quedan individualizadas por el valor que toman sobre el neutro e). Es interesante, el

<u>Teorema.</u> Si $(X,\bar{\bar{S}},d^{V})$ es un métrico involutivo sobre un grupo $(X,.,e)$, es condición necesaria y suficiente para que las traslaciones de $(X,.)$ sean isometrías, que V verifique

$$V(x,y)=V(x)+V(y)+V(e),$$

cualesquiera que sean $x,y\in X$.

Está claro que la anterior condición equivale a que la aplicación $V'=V(e)+V$ sea un morfismo entre los grupos $(X,.)$ y $\bar{\bar{S}}$. En tal caso $V^{-1}(V(e))=\ker V'$ pudiendo llegarse, no sin dificultad, al

<u>Teorema.</u> Si $(X,\bar{\bar{S}},d^{V})$ es un métrico involutivo sobre un grupo $(X,.)$, es $sp(V)\approx X/v'$.

Entonces, si V es inyectiva y $V(e)=o$, resulta $.=$ Ⓥ

En un reciente trabajo[31] Trillas-Rubió-Jacas, han caracterizado las clases de X módulo GM (es decir, las clases dadas por "$x \sim y$ (GM) $\Leftrightarrow$ existe $h \in$ GM tal que $h(x)=y$") probando que $x \sim y$ (GM) $\Leftrightarrow v(x)+v(y) \in sp(v)$. También se ha caracterizado el espectro, los morfismos entre métricos involutivos y los conjuntos isométricos; así se ha obtenido que

$$sp(v) = \bigcap_{x \in v(X)} \{x + v\,(C[v^{-1}(x)]_v\ )\},$$

indicando por $C[-]_v$ a las clases de X/v módulo la equivalencia "$[x]_v \sim [y]_v \Leftrightarrow [x]_v$ y $[y]_v$ son coordinables".

Para terminar este apartado, recordaremos que si $(S,+,e)$ es un grupo abeliano el conjunto $P_F(S)$ de las partes <u>finitas</u> de S con el orden $\subset$ y la operación $A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ es un semigrupo ordenado conmutativo con neutro$\{e\}$ y mínimo $\emptyset$. Con ello, cada vez que se dispone de una aplicación $v: X \to S$ (X no vacio), es $d^v(x,y)=\{v(x)-v(y), v(y)-v(x)\}$ tal que $(X,P_F(S),d^v)$ es un EMG, de tal suerte que si dos grupos S y S' son isomorfos, las estructuras métricas sobre $(X,P_F(S),-)$, $(X,P_F(S'),-)$ son SIEMPRE isomorfas métricamente.

Cuando X=S y $v=I_S$, es $d^{I_S}(x,y)=\{x-y,y-x\}$ <u>la métrica natural de Menger</u> [16] asociada al grupo abeliano S(§I) que, si es auto-opuesto, es $\{x+y\}$. En tal caso vale

(Alsina-Trillas[3]) el

<u>Teorema.</u> Dos grupos abelianos son isomorfos si y sólo si son métricamente isomorfos respecto de las mé-- tricas naturales asociadas.

Si $X=S$ es un grupo de Riesz, con $\mathbf{V}=I_S$ se obtiene el métrico natural de Menger $(S,P_F(S),d^{I_S})$ que es semejante al EMG natural del grupo reticulado (S,S^+,d_{I_S}) (ejemplo 4 bis, § I) .

III. NOCIONES TOPOLOGICAS EN LOS EMG.

Diferentes condiciones algebraico-reticulares [(I)] sobre el semigrupo de valores de un EMG, han llevado al estudio de diferentes topologías en el marco de los EMG (Trillas [25] , Batle [4] , Alsina [1] , Grané [12] , Vila [32] , Pons [18]).

<u>Definición.</u> Sea S un semigrupo ordenado.

(1) S verifica <u>C1</u> si el neutro e es mínimo.

(2) S verifica la <u>condición usual (C2)</u> si para cualesquiera $a,b\in S$, $a>e$, $b>e$, existe $c\in S$, con $c>e$, $a\geqslant c$, $b\geqslant c$.

(3) S cumple la <u>condición de pseudo-diferencias (C3)</u> si para todo $r, s\in S$, $e\leqslant r<s$, existe $t\in S, t>e$ tal que $e<r+t<s$.

(4) S satisface la <u>condición de pseudo-radicales (C4)</u> si para cualquier $r\in S$, $r>e$, existe $s>e$ tal que $e<s+s<r$.

(5) S se dice <u>no discreto (C5)</u> si admite una sucesión δ_n decreciente ($\delta_n \geqslant \delta_{n+1}$) tal que si $a\leqslant\delta_n$, para todo n, es a=e=MinS (abrev. $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$). Si S verifica C1 y C5 se dirá <u>continuo en e (C6)</u>, si dadas $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$ y $\gamma_n \overset{o}{\downarrow} e$, es $\delta_n+\gamma_n \overset{o}{\downarrow} e$.

(6) Una sucesión creciente $b_n\uparrow$ (ó decreciente $c_n\downarrow$) es <u>convergente en orden</u> a b (ó c) si $b_n\leqslant x$, para todo n, im-

plica $b \leqslant x$ (o $c_n \geqslant x \Rightarrow x \leqslant c$). (Abrev. $b_n \overset{o}{\uparrow} b$, $c_n \overset{o}{\downarrow} c$). Una sucesión (a_n) <u>converge en orden hacia a</u> $(a_n \overset{o}{\to} a)$ si existen $b_n \overset{o}{\uparrow} a$ y $c_n \overset{o}{\downarrow} a$, tales que $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$, para todo n. En particular, $a_n \overset{o}{\to} e$ si existe $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$ con $a_n \leqslant \delta_n$, para cualquier n.

(7) $S' \subset S$ es <u>denso por la derecha de $a \in S$</u> si todo $b \in S$, $b > a$ admite un $r \in S'$ tal que $a < r < b$. S es <u>secuencialmente denso a la derecha de e (C7)</u> si vale C1, y para cada $\varepsilon > e$ y $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$, $\{\delta_n | n \in N\}$ es denso por la derecha de e, el cual se dice <u>secuencialmente alcanzable.</u>

(8) Si S cumple C1, se dice que verifica la <u>condición de Everett (C8)</u> si dada una sucesión doble $(\delta_k^n)_{(k,n)\in N\times N}$, tal que para cada n, es $\delta_k^n \overset{o}{\underset{k\to\infty}{\downarrow}} e$, existe una subsucesión $(\delta_{k_n}^n)_{n\in N}$ con $\delta_{k_n}^n \overset{o}{\underset{n\to\infty}{\to}} e$.

(9) Si S cumple C1, se llama <u>normal (C9)</u> si dada $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$, $a, b \in S$ y $a \leqslant b + \delta_n$, para todo n, se deduce $a \leqslant b$.

(10) S satisface la condición de <u>refinamiento (C10)</u> si $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$, $a_n + \delta_n \overset{o}{\to} a$, implica $a_n \overset{o}{\to} a$.

Dicha colección de condiciones se <u>relativizan</u> fácilmente a subconjuntos S' de S. En [I; 25, 4], se han estudiado los comportamientos de los semigrupos usuales de -

los EMG, respecto a las condiciones anteriores. Así, si $(R^{+},+,<,o)$ las verifica en su totalidad, $(\Delta^{+},\tau,<,\varepsilon_{o})$ no cumple por ejemplo C3, ni necesariamente C4, C8, C9, C10 y G^{+}, parte positiva de un grupo de Riesz, verifica C1 sólo si es totalmente ordenado,... etc.

Sea (X,S,m) un EMG con $e=\inf I(m)$ y sea $S'\subset S$, $S'\neq\emptyset$, tal que si $r\in S'$ es $r>e$.

La topología $T^{*}_{m}(S')$.

Definición. La $T^{*}_{m}(S')$-topología es la que tiene como subbase a la familia $(B(a;r))_{(a,r)\in X\times S'}$, siendo $B(a;r)=\{b\in\Omega \mid m(\alpha,\beta)<r\}$.

Anotaremos $T^{*}_{m}=T^{*}_{m}(S-\{e\})$.

Teorema. (i) Si $S'\subset S''$ es $T^{*}_{m}(S')\subset T^{*}_{m}(S'')$. Si S' es orden denso en $I(m)\cup S''$, es $T^{*}_{m}(S'')\subset T^{*}_{m}(S')$. Si S' es denso en S, $T^{*}_{m}(S')=T^{*}_{m}$.

(ii) Si m es separadora y $e=\inf\{S'+S'\}$, $T^{*}_{m}(S')$ es T_2. Si $e=\inf\{r,r'\}$, con $r,r'\in S'$, $T^{*}_{m}(S')$ es discreta.

(iii) $T^{*}_{m}(S')$ es la mínima topologia que hace abiertas a las bolas con radios en S'.

La topología $T_m(S')$.

Definición. Si S verifica C1, la $T_m(S')$-topología es la que tiene como abiertos los $A \subset \Omega$ tales que, para todo $a \in A$, existe $\mathcal{S}' \in S'$ y $B(a;\mathcal{S}') \subset A$.

Dicha topología no satisface, en general, que las bolas $B(a;\mathcal{S}')$ sean abiertas y formen una base local en cada punto.

Teorema. (i) Si S' verifica C2, C4 y la isotonía estricta, $(B(a;\mathcal{S}'))_{\mathcal{S}' \in S'}$ es base local de entornos al variar $a \in \Omega$; dicha base genera a su vez $T_m(S')$, la cual es discreta si S' no verifica C2 y m es separadora.

(ii) $T_m(S') \subset T^*_m(S')$, valiendo la igualdad si las bolas son $T_m(S')$-abiertas (p.ej., si S' cumple C3 relativa a $T_m(S)$ y la isotonía estricta). Si $S_1, S_2 \subset S$ son densos a la derecha de e en S_2, es $T_m(S_2) \subset T_m(S_1)$, valiendo la igualdad si S_1, S_2 son cada uno denso en el otro.

(iii) Si m es separadora y S' denso en I(m), $T_m(S')$ es T_1. Si $T_m(S')$ es T_o, es T_1. Si S' verifica C4 relativa a I(m), con m separadora, $T_m(S')$ es T_2.

(iv) Supóngase que la $T_m(S')$ viene descrita por la base local de bolas. Si S' verifica: $e \notin S'$, C2 y C4, entonces $T_m(S')$ es la topología de la uniformidad $U_m(S')$ generada por $B_s=\{(a,b) \in X\times X \mid m(a,b)< s\}$, para todo $s \in S'$, la cual es separadora si m es separadora y inf S'=e. Si además existe $S'' \subset S'$, S" numerable, tal que, para todo $b \in S'$, existe $c \in S'$, con e<c<b, entonces $T_m(S')$ es pseudo-metrizable real, y es metrizable real si e=inf S" y e=inf S'.

Alsina y Trillas [2]han estudiado la metrización real de la topologia $T_{\mathcal{S}}$ en ciertas clases de EM probabilísticos de Menger (τ_T). El apartado (iv) lleva a la metrización de los espacios de Wald ([4]). Para grupos reticulados con C2 y C4, T_m es la topologia del grupo. Si G es totalmente ordenado, $T_m(G_o^+)$ es discreta si G_o^+ tiene átomos y es la del orden si no los tiene.

<u>La topologia $T_{o-m}(S')$.</u>

Una sucesión $(a_n) \subset X$ se dice <u>o-m convergente</u> hacia $a\in X$ en S' ($a_n \xrightarrow[S']{o-m} a$) si $m(a_n,a) \xrightarrow{o} e$ en S'. Las sucesiones constantes son o-m convergentes a su valor común; cualquier subsucesión de una o-m convergente hacia a goza de idéntica propiedad y si S' es subsemigrupo de S, satisface C6 y m es separadora, entonces existe unicidad del o-m límite. Dicho o-m límite puede calcularse prescindiendo de un número finito de términos si para $a,b\in S'$ existe $c\in S'$ con

$c \geqslant a,b$.

<u>Definición.</u> La <u>$T_{o-m}(S')$-topologia</u> es la que tiene como abiertos a los complementarios de las o-m cerrados o subconjuntos de X que contienen todos los o-m-S' límites de las sucesiones o-m-S' convergentes en ellos contenidas. Anotaremos $T_{o-m}(S)=T_{o-m}$.

Si S' verifica: " $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$ en S', $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \delta_n = e(S') \Rightarrow \bigwedge_{n=1}^{\infty} \delta_n = e(S)$ (p. ej. si S' es subsemigrupo denso de S) entonces $T_{o-m} \subset T_{o-m}(S')$. Si S' es no discreto $T_{o-m}(S') \subset T_m(S')$ y si es totalmente ordenado $T_m(S') \subset T_{o-m}(S')$.

La o-m-S' convergencia implica la $T_{o-m}(S')$ convergencia, pero el recíproco no es cierto, en general. Así, si para $a,b \in S'$ existe $c \in S'$. $c \geqslant a$, $c \geqslant b$, entonces

$a_n \xrightarrow{T_{o-m}(S')} a$, si y sólo si, cada subsucesión (a_{n_k}) de (a_n) tiene alguna parcial o-m(S')-convergente hacia a.

Si llamamos o-m(S')-<u>clausura débil</u> de $A \subset \Omega$ al conjunto $A^* = \{a \in \Omega \mid$ existe $(a_n) \subset A$, $a_n \xrightarrow[S']{o-m} a\}$, queda definido un operador $*: P(\Omega) \to P(r)$, que es clausura de Čec pero no es necesariamente de Kuratowski ($A^{**} \neq A^*$). Alsina [1] ha demostrado que si S' verifica C8 entonces $A^{**}=A^*$ y $A^* = \bar{A}^{T_{o-m}(S')}$, siendo pues la $T_{o-m}(S')$ topologia describible en términos de los puntos fijos de dicho operador. Si S verifica C9 y C10, m es continua entre los espacios (XxX, T_{o-m+m}) y S, con la topología del orden. La compacidad secuencial y continuidad de funciones han sido abordadas en [I] , reobteniéndose para dichos espacios los teoremas clásicos de Cantor, Borel, el restringido de Tychonoff, etc. Asimismo Alsina [1] ha estudiado la o-m-separabilidad obteniendo que <u>todo EMG o-m-separable admite una inmersión</u> (inyección continua) <u>en S^N, dotado éste de la topología del orden.</u> Batle [4] y Pons [18] han introducido la <u>$\hat{T}_{o-m}(S')$ topologia</u> que resulta de substituir el criterio secuencial definidos de la $T_{o-m}(S')$, por la convergencia con redes de elementos de Ω ,dando lugar a nuevos criterios caracterizadores y diversas patologías topológicas.

<u>Teorema.</u> Si S es totalmente ordenado y e=inf(S-{e}), $\hat{T}_{o-m}$= T_m. Si además existe un S' $\subset$ S, numerable y denso por la derecha de e, $\hat{T}_{o-m}=T_{o-m}=T_m$ y las tres son metrizables.

Un ejemplo interesante es dado por (X,(P(X),U,$\subset$,$\emptyset$),m), EMG con m(a,b)=$\emptyset$ si no existe un clopen C (conjunto abierto y cerrado a la vez respecto de una topología T dada en Ω) tal que a $\in$C y b $\notin$C ("a y b son indistinguibles") y $m(a,b)=\{\bigcap_{a\in C \text{ clopen}} C, \bigcap_{b\in C \text{ clopen}} C\}$ ("a y b son distinguibles") en caso contrario. Entonces resulta $T=T^*_m$, es decir la topo logia de clopens es EMG-metrizable pero no es real-metrizable, salvo que T sea discreta.

Alsina [1] y Batle [4] han estudiado el comportamiento de las citadas topologías respecto de los morfismos entre EMG y Trillas [25] , Vila [32] han analizado el caso de las álgebras de Boole, atendiendo en especial a la relación atomicidad del álgebra-discretitud topológica y a las características que debe poseer una valoración v, para que la T_{d_v} , asociada a la $d_v(x,y)=v(x)\oplus v(y)$, sea no discreta.

Como pone de manifiesto el ejemplo de la página 9 del § I, diferentes tipos de semejanzas φ llevan a diferentes EMG, siendo el interés topológico obtener las topologías producto el que determina la elección mas conveniente de las φ. Al considerar las topologías en los EMG, y formar el producto $X_\infty, S_\infty, m_\infty) = (\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} S_i, \prod_{i\in I} m_i)$, para cualquier conjunto de índices $I \neq \emptyset$, se obtiene ([I;4,18]):

<u>Teorema.</u> (a) La T_{o-m_∞} topología de X_∞ es más fina que la producto de las T_{o-m_i} topologías de los X_i. Análogamente ocurre con la $\hat{T}_{o-m}$ y las $\hat{T}_{o-m_i}$ de cada X_i.

(b) Si cada S_i verifica C2 y C4, la <u>topología-Caja</u> [18] en X_∞ determinada por las T_{m_i} en los factores, es metrizable como EMG. Exactamen--

te, la topología-caja es la

$T_m(\{f \in \prod_{i\in I} S_i \mid f(i) > e_i \ , \ \forall i \in I\})$.

(c) Si cada S_i=G, grupo reticulado, $i\in$ I, la topología $T_n(G_o^+)$ en G^I es la topología de la convergencia uniforme de los elementos de G^I como funciones G-valoradas (respecto de la topología natural de G). Si G es totalmente ordenado con la derecha separable, dicha topología en G^I es metrizable como EMG.

Nótese que de lo anterior se deduce que la topología-caja en R^R es uniformizable, puesto que es de grupo metrizable como EMG y sin embargo no es real-metrizable. Otro interesante caso proviene de considerar el semigrupo $(R^I,+,\preceq)$, siendo $\preceq$ el orden "lexicográfico" e $\bar{\bar{I}} \leqslant \aleph_o$ ([43]). La topología $\bar{T}_{o-n}=T_{o-n}=T_n$ resulta ser real-metrizable no-conexa y no compacta. Si I no tiene último elemento, es más fina que el producto de las discretas sobre R, es decir, la topología producto de R^I es menos fina que la de la métrica natural. Si I tiene último elemento i_o, la T_n es más fina que la producto de las discretas en los índices diferentes de i_o y la natural para el factor i_o, siendo en dicho caso no separable.

<u>Nota.</u> Las construcciones de "completación" clásicas, de EM reales, EM booleanos, EM probabilísticos, de ciertos

grupos reticulados,... etc., usan la completitud, en algún sentido, del semigrupo de valores. En lo que sigue se construye un S-completado de un EMG, bajo ciertas condiciones, el cual contiene monomórficamente al de partida (cuya imágen es $T_{o-\bar{m}}$ - densa) y que resulta ser aplicable a algunos de los casos más importantes ([1]).

Dado un EMG (X,S',m), un semigrupo S de la misma categoria que S' y $\varphi : S \to S'$, creciente y secuencialmente continua en el neutro, cabe definir:

(1) Una sucesión (X_n) de X es φ-S-fundamental si existe $\delta_n \downarrow e$ en S tal que, para cada n, es $m(X_{n+p}, X_n) < \varphi(\delta_n)$, para todo $p \in N$.

(2) X es S-completo si toda sucesión φ-S-fundamental es convergente según T_{o-m} a un elemento de X.

En el caso $S=S'$, $\varphi = I_S$ se recuperan las definiciones dadas en [4], donde se comparan las mismas con los criterios de Cauchy habituales. El problema de completación de un EMG queda parcialmente resuelto en el siguiente teorema.

Teorema. Sea (X,S,m) un EMG con S no discreto, normal y secuencialmente continuo en el neutro. Existe un EMG, $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$, tal que:

(i) Existe un morfismo inyectivo $(i,\varphi):(X,S,m)\to(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$;

(ii) $i(X)$ es denso $T_{o-\bar{m}}$ en $\bar{X}$.

(iii) Si S verifica la condición de Everett, $\bar{X}$ es φ-S-completo.

La demostración laboriosa se halla en [1]. Notemos que $\bar{X}$ es $\frac{X^N}{\sim}$, donde $\sim$ es la equivalencia: $(x_n)\sim(y_n)\Leftrightarrow m(x_n,y_n)\xrightarrow{o} e$; y $\bar{S}=\frac{S^N}{R}$, donde la equivalencia R está definida por

$$(s_n)\sim(t_n)\Leftrightarrow \text{Existe } \gamma_n \overset{o}{\downarrow} e \text{ en } S \text{ tal que } \left\{\begin{array}{l} s_n\leqslant t_n+\gamma_n \\ t_n\leqslant s_n+\gamma_n \end{array}\right\} \text{para todo } n.$$

El Q^+-completado de $(Q,Q^+,|\ |)$ resulta ser $(R,R^+,|\ |)$ y más en general, se establece ([1]) que en todo grupo de Riesz $(G,+,\leqslant,\vee,\wedge)$, completo respecto de la métrica $|a-b|=a\vee b-a\wedge b$, la parte positiva $(G^+,+,\leqslant)$ es isomorfa algebraica, ordenada y métricamente a $(\overline{o(G^+)},+,\leqslant)$, siendo $\overline{o(G^+)}$ el semigrupo generado por las sucesiones $|\ |$-fundamentales de G^+, subsemigrupo del $\overline{G}^+$ dado por el Teorema anterior. Así, como hemos anunciado, para los EMG con valores en grupos de Riesz $|\ |$-completos, el G^+-completado coincide con los resultados de completación dados en [4] y en el caso X=G, con el proceso de completación de Everett ([9]) para tales grupos; los completados booleanos de Blumenthal-Menger ([7]) y los probabilísticos de Sherwood ([29]), resultan ser "semejantes" a los respectivos S-completados.

BIBLIOGRAFIA

(I) Trillas, E. (director) - Alsina, C. - Batle, N. - Martín, J."Teoría de los espacios métricos generalizados (ó de Riesz)". Memoria de la Beca Fundación Juan March. Setiembre 1976.

---

(1) Alsina, C. "Sobre espais mètrics generalitzats i probabilístics". Tésis. Univ. Barcelona.

(2) Alsina, C. - Trillas, E. "Un teorema de metrización de la topología $T_{\mathfrak{F}}$ de un espacio métrico probabilístico de Menger". Actas R.A.M.E. (C.S.I.C.), Málaga (1976).

(3) Alsina, C. - Trillas, E. "On natural metrics". Por aparecer, Stochastika Nº 3, (1977).

(4) Batle, N. "Contribución a un estudio básico de los espacios métricos probabilísticos". Tésis Univ. Barcelona. (1973).

(5) Birkhoff, G. "Lattice Theory". Amer. Math. Soc. (1948).

(6) Blumenthal, L.M. "Theory and applications of distance geometry". The Clarendon Press, Oxford (1953)

(7) Blumenthal, L.M. - Menger, K. "Studies in Geometry". Freeman (1971).

(8) Cuxart, A. "Sobre la geometria de la diferencia simétrica". Stochastika, Vol. 2 (1976)51-52.

(9) Everett, C. J. "Sequence completion of lattice moduls". Duke Math. J. (1944).

(10) Everett, C. J. - Ulam, S. "On ordered groups". Trans. Amer. Math. Soc. 57. (1945).

(11) Fréchet, M. "Les espaces abstraits". Gauthier Villars, París (1929).

(12) Grané, J. "Sobre las isometrías de los grupos y ani--llos reticulados". Tésis, Pub. Univ. Barcelona (1976).

(13) Glivenko, V. "Géometrie des systèmes des choses normées, Amer. Journ. Maths, 58 (1936) 799-828.

(14) Mamuzic, Z.P. "Introduction to general topology". P. Noordhoff, The Netherlands (1963).

(15) Menger, K. "Statistical metrics". Proc. Noc. Acad. Sci. U.S.A. 28 (1942), 535-537.

(16) Menger, K. "Beiträge zur gruppentheorie I", Math. Zeit., Vol. 33 (1931), 396-418.

(17) Moynihan, R. - Schweizer, B. "Betweennes relations in probabilistic metric spaces" (por aparecer).

(18) Pons, M. "Topologias en espacios métricos de Riesz". Tesina. Univ. Barcelona (1976).

(19) Sales, F. "Negaciones y clausuras en estructuras de orden". Dep. Estadística. Univ. Barcelona (1973).

(20) Schweizer, B. "Multiplications on the space of probabi-

lity distribution functions",Aeq. Math. Vol. 12,f 2/3,(1975) 151-183.

(21) Schweizer, B. "Probabilistic metric spaces: The first 25 years" The New York statistician 19, (1967),3-6.

(22) Schweizer, B. - Sklar, A. "Statistical metric spaces". Pacific J. Math, 10 (1960),313-334.

(23) Šerstnev, A.N. "On a probabilistic generalization of metric spaces". Kazan Gos. Univ. 124 (1964).

(24) Sherwood, H. "Complete probabilistic metric spaces". Z. Wahrschemlechkeitstheorie Verw. Geb. 20 (1971), 117-128.

(25) Trillas, E. "Sobre distancias estadísticas". Tésis. Pub. Univ. Barcelona (1972).

(26) Trillas, E. "Sobre distancias aleatorias". Actas R.A.M.E. (C.S.I.C.),Santiago de Compostela (1967).

(27) Trillas, E. "Morfismos entre espacios métricos de Riesz y métricas aleatorias". Actas R.A.M.E. (C.S.I.C.), Murcia (1969).

(28) Trillas, E. "Sobre el producto de métricos de Riesz". Actas R.A.M.E. (C.S.I.C.), Sevilla (1974).

(29) Trillas, E. "Intent d'aproximació a un concepte d'estructura mètrica" en "Una lleu sorra". Ed. 62. Barcelona (1975).

(30) Trillas, E. "Notes per a un estudi de la geometria sobre grups involutius". Stochastika. Vol. 2 (1976), 41-50.

(31) Trillas, E. - Rubió J. - Jacas, J. "Determinación del espectro, de los morfismos y de los conjuntos isométricos en E.M. involutivos" (por aparecer).

(32) Vila, A. "Contribución al estudio de los retículos S-valorados". Tésis. Pub. Univ. Barcelona (1974).

(33) Wald, A. "On a statistical generalization of metric spaces". Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 29 (1943) 196-197.

FUNDACION JUAN MARCH
SERIE UNIVERSITARIA

Títulos Publicados:

1.— *Semántica del lenguaje religioso / A. Fierro*
(Teología. España, 1973)

2.— *Calculador en una operación de rectificación discontinua/A. Mulet*
(Química. Extranjero, 1974)

3.— *Skarns en el batolito de Santa Olalla/F. Velasco*
(Geología. España, 1974)

4.— *Combustión de compuestos oxigenados/J.M. Santiuste*
(Química. España, 1974)

5.— *Películas ferromagnéticas a baja temperatura/José Luis Vicent López*
(Física. España, 1974)

6.— *Flujo inestable de los polímeros fundidos/José Alemán Vega*
(Ingeniería. Extranjero, 1975)

7.— *Mantenimiento del hígado dador in vitro en cirugía experimental*
José Antonio Salva Lacombe (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España,1973)

8.— *Estructuras algebraicas de los sistemas lógicos deductivos/José Plá Carrera*
(Matemáticas. España, 1974)

9.— *El fenómeno de inercia en la renovación de la estructura urbana.*
Francisco Fernández-Longoría Pinazo (Urbanización del Plan Europa 2.000 a través de la Fundación Europea de la Cultura)

10.— *El teatro español en Francia (1935—1973) / F. Torres Monreal*
(Literatura y Filología. Extranjero, 1971)

11.— *Simulación electrónica del aparato vestibular/J.M. Drake Moyano*
(Métodos Físicos aplicados a la Biología. España, 1974)

12.— *Estructura de los libros españoles de caballerias en el siglo XVI.*
Federico Francisco Curto Herrero (Literatura y Filología. España, 1972)

13.— *Estudio geomorfológico del Macizo Central de Gredos*
M. Paloma Fernández García (Geología. España, 1975)

14.— *La obra gramatical de Abraham Ibn ᶜ Ezra/Carlos del Valle Rodriguez*
(Literatura y Filología. Extranjero, 1970)

15.– *Evaluación de Proyectos de Inversión en una Empresa de producción y distribución de Energía Eléctrica.*
Felipe Ruíz López (Ingeniería. Extranjero, 1974)

16.– *El significado teórico de los términos descriptivos/Carlos Solís Santos (Filosofía. España, 1973)*

17.– *Encaje de los modelos econométricos en el enfoque objetivos-instrumentos relativos de política económica./ Gumersindo Ruíz Bravo (Sociología. España, 1971)*

18.– *La imaginación natural (estudio sobre la literatura fantástica norteamericana). / Pedro García Montalvo (Literatura y Filología. Extranjero, 1974)*

19.– *Estudio sobre la hormona Natriurética. / Andrés Purroy Unanua (Medicina, Farmacia y Veterinaria. Extranjero, 1973)*

20.– *Análisis farmacológico de las acciones miocárdicas de bloqueantes Beta–Adrenérgicos./ José Salvador Serrano Molina (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1970)*

21.– *El hombre y el diseño industrial./Miguel Durán–Lóriga (Artes Plásticas. España, 1974)*

22.– *Algunos tópicos sobre teoría de la información./ Antonio Pascual Acosta (Matemáticas. España, 1975)*

23.– *Un modelo simple estático. Aplicación a Santiago de Chile*
Manuel Bastarreche Alfaro (Arquitectura y Urbanismo. Extranjero, 1973)

24.– *Moderna teoría de control: método adaptativo-predictivo Teoría y realizaciones. /Juan Manuel Martín Sánchez (Ingeniería. España, 1973)*

25.– *Neurobiología (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*

26.– *Genética (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*

27.– *Genética (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*

28.– *Investigación y desarrollo de un analizador diferencial digital (A.D.D.) para control en tiempo real. /Vicente Zugasti Arbizu (Física. España, 1975)*

29.– *Transferencia de carga en aleaciones binarias./ Julio A. Alonso (Física. Extranjero, 1975)*

30.– *Estabilidad de osciladores no sinusoidales en el rango de microondas. / José Luis Sebastian Franco. (Física. Extranjero, 1974)*

31.– *Estudio de los transistores FET de microondas en puerta común. Juan Zapata Ferrer. (Ingeniería. Extranjero, 1975).*

32.– *Estudio sobre la moral de Epicuro y el Aristóteles esotérico./ Eduardo Acosta Mendez (Filosofía. España, 1973)*

33.– *Las Bauxitas Españolas como mena de aluminio./ Salvador Ordoñez Delgado (Geología. España, 1975).*

34 *Los grupos profesionales en la prestación de trabajo: obrero y empleados./Federico Durán López (Derecho. España, 1975)*

35.– *Obtención de Series aneuploides (monosómicas y ditelosómicas) en variedades españolas de trigo común./ Nicolás Jouve de la Barreda. (Ciencias Agrarias. España, 1975).*

36.– *Efectos dinámicos aleatorios en túneles y obras subterráneas./ Enrique Alarcón Alvarez. (Ingeniería. España, 1975).*

37.– *Lenguaje en periodismo escrito./Fernando Lázaro Carreter, Luis Michelena Elissalt, Robert Escarpit, Eugenio de Bustos, Víctor de la Serna, Emilio Alarcos Llorach y Juan Luis Cebrián. (Seminario organizado por la Fundación Juan March los días 30 y 31 de mayo de 1977).*

38.– *Factores que influyen en el espigado de la remolacha azucarera, Beta vulgaris L./ José Manuel Lasa Dolhagaray y Antonio Silván López. (Ciencias Agrarias. España, 1974).*

39.– *Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos. Productos finitos de espacios con topologías proyectivas de funciones reales./José Luis Blasco Olcina (Matemáticas. España, 1975).*

40.– *Estructuras de la épica latina./ Mª. del Dulce Nombre Estefanía Alvarez. (Literatura y Filología, España, 1971).*

41.– *Comunicación por fibras ópticas./ Francisco Sandoval Hernandez (Ingeniería. España, 1975).*

42.– *Representación tridimensional de texturas en chapas metálicas del sistema cúbico./ José Antonio Pero-Sanz Elorz (Ingeniería. España, 1974).*

43.– *Virus de insectos: Multiplicación, aislamiento y bioensayo de baculovirus./ Cándido Santiago-Alvarez. (Ciencias Agrarias. Extranjero, 1976).*

44.– *Estudio de mutantes de saccharamyces cerevisiae alterados en la biosíntesis de proteinas./ Lucas Sanchez Rodriguez. (Biología. España, 1976).*

45.– *Sistema automático para la exploración del campo visual. José Ignacio Acha Catalina (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1975).*

46.– *Propiedades físicas de las variedades de tomate para recolección mecánica/ Margarita Ruiz Altisent (Ciencias Agrarias.España 1975)*

47.– *El uso del ácido salicílico para la medida del p^H intracelular en las celulas de Ehrlich y en escherichia coli/ Francisco Javier García-Sancho Martín. (Medicina, Farmacia y Veterinaria. Extranjero, 1974).*

48.– *Relación entre iones calcio, fármacos ionóforos y liberación de noradrenalina en la neurona adrenérgica periférica./ Antonio García García. (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1975).*