La Serie Universitaria de la Fundación Juan March presenta resúmenes, realizados por el propio autor, de algunos estudios e investigaciones llevados a cabo por los becarios de la Fundación y aprobados por los Asesores Secretarios de los distintos Departamentos.

El texto íntegro de las Memorias correspondientes se encuentra en la Biblioteca de la Fundación (Castello, 77. Madrid-6).

La lista completa de los trabajos aprobados se presenta, en forma de fichas, en los Cuadernos Bibliográficos que publica la Fundación Juan March.

Estos trabajos abarcan las siguientes especialidades: Arquitectura y Urbanismo; Artes Plásticas; Biología; Ciencias Agrarias; Ciencias Sociales; Comunicación Social; Derecho; Economía; Filosofía; Física; Geología; Historia; Ingeniería; Literatura y Filología; Matemáticas; Medicina, Farmacia y Veterinaria; Música; Química; Teología. A ellas corresponden los colores de la cubierta.

Edición no venal de 300 ejemplares, que se reparte gratuitamente a investigadores, Bibliotecas y Centros especializados de toda España.

Este trabajo fue realizado con una Beca de España, 1975. Departamento de Matemáticas.

Fundación Juan March

AD·MAIVS·HISPANIAE·LVMEN

Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos/José Luis Blasco Olcina

39

SERIE UNIVERSITARIA

Fundación Juan March

Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos. Productos finitos de espacios con topologías proyectivas de funciones reales

José Luis Blasco Olcina

39

Fundación Juan March
Serie Universitaria
39

Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos. Productos finitos de espacios con topologías proyectivas de funciones reales

José Luis Blasco Olcina

Fundación Juan March
Castelló, 77. Teléf. 225 44 55
Madrid - 6

Depósito Legal M-31450-1977
I.S.B.N. - 84 - 7075 - 064 - X
Ibérica, Tarragona, 34.– Madri

I N D I C E

0. Definiciones y notación

Escribiremos $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{R}$) para el conjunto de los números naturales (resp. reales), $|A|$ para el número cardinal del conjunto A y $\mathbf{N}^*$ para la compactación de Alexandroff del espacio discreto $\mathbf{N}$.

La palabra espacio servirá para designar un espacio topológico de Hausdorff. La compactación de Stone-Čech de un espacio X completamente regular vendrá denotada por βX . Dos compactaciones K_1 y K_2 de un espacio Y se dice que son iguales si existe un homeomorfismo de K_1 sobre K_2 cuya restricción a Y es la identidad. En este caso escribiremos $K_1 = K_2$.

El anillo de las funciones reales continuas (resp. y acotadas) en un espacio X vendrá denotado por $C(X)$ (resp. $C^*(X)$). Un subconjunto A de X se dice que es C-sumergible (resp. C^*-sumergible) en X si toda función de $C(A)$ (resp. $C^*(A)$) admite una extensión continua a X . Escribiremos $C_u(X)$ (resp. $C_c(X)$) para $C(X)$ provisto de la topología de convergencia uniforme (resp. compacta-abierta) en X .

El producto tensorial $C^*(X) \otimes C^*(Y)$ será el conjunto de las funciones de la forma $h(x,y) = \sum f_i(x) g_i(x)$, donde la suma es finita, $f_i \in C^*(X)$ y $g_i \in C^*(Y)$. Si f es una función real definida en $X \times Y$, escribiremos $\Psi_X(f)$ para la aplicación de X en R^Y definida por

$$\Psi_X(f)(x) = f(x, \ ) \quad , \ x \in X$$

Si α es un ordinal, escribiremos $\alpha+1$ para el ordinal que le sigue y $W(\alpha)$ para el conjunto de todos los ordinales menores que α , dotado de la topología del orden. El primer ordinal infinito (resp. no numerable) vendrá denotado por ω_0 (resp. ω_1).

Se dice que una aplicación entre dos espacios topológicos es cerrada (resp. Z-cerrada, α-cerrada) si la imagen de todo conjunto cerrado (resp. cero, cerrado de cardinal $\leq \alpha$) es un conjunto cerrado. La proyección de $X \times Y$ sobre X vendrá denotada por p_X y lo mismo para los subespacios de X . Si K es un espacio compacto, Frolík (11) ha probado que la proyección p_X de $X \times K$ sobre X es siempre cerrada.

Se dice que un espacio X es pseudocompacto si $C(X) = C^*(X)$. Evidentemente todo espacio compacto es pseudocompacto. Un espacio X es sucesionalmente compacto si toda sucesión en X posee una subsucesión convergente. Sea $\alpha \geq \aleph_0$, diremos que un espacio X es α-compacto si de todo cubrimiento abierto de X de cardinal $\leq \alpha$, se puede extraer un subcubrimiento finito. Todo subespacio cerrado de cardinal $\leq \alpha$ en un espacio α-compacto, es compacto. Desde luego todo espacio sucesionalmente compacto es $\aleph_0$-compacto, sin embargo βN es compacto pero no sucesionalmente compacto.

Todo espacio $\aleph_0$ -compacto es pseudocompacto sin embargo el recíproco no es cierto como ha probado Mrowka (25).

Un subconjunto A de un espacio X se dice que es <u>acotado</u> si para toda $f \in C(X)$, la función f/A está acotada. Escribiremos $\mathcal{B}$ (resp. K , $\mathcal{S}$) para la familia de todos los conjuntos acotados (resp. compactos, sucesiones convergentes con su límite) de un espacio. Si Ω es un cubrimiento cerrado de un espacio X , escribiremos $\sigma(\Omega)$ para la topología sobre X para la cual un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y sólo si $A \cap F$ es cerrado en X para todo $F \in \Omega$. Diremos que un espacio es un k <u>-espacio</u> (resp. s <u>-espacio</u>) si su topología coincide con la topología $\sigma(K)$ (resp. $\sigma(\mathcal{S})$). Evidentemente todo s -espacio es un k -espacio, sin embargo βN no es un s -espacio. El k <u>-espacio</u> (resp. s <u>-espacio</u>) <u>asociado</u> a un espacio X , denotado por kX (resp. sX), será X con la topología $\sigma(K)$ (resp. $\sigma(\mathcal{S})$). Se dice que X es un k_R <u>-espacio</u> (resp. b_R <u>-espacio</u>, s_R <u>-espacio</u>)si toda función real, continua desde cada conjunto compacto(resp. acotado, sucesión convergente con su límite) de X , es continua en X . Todo s_R -espacio es un k_R -espacio y todo k_R -espacio es un b_R -espacio, siendo falsos los dos recíprocos. El k_R <u>-espacio</u> <u>asociado</u> a un espacio X completamente regular, denotado por k_RX , será X con la topología proyectiva correspondiente a la familia de todas las funciones reales continuas desde compactos.

1. Pseudocompacidad de espacios producto

Dados dos espacios (✱) X e Y, en general no es cierto que $\beta(X\times Y)=\beta X\times\beta Y$. Por ejemplo $\beta N\times\beta N$ es una compactación de $N\times N$ distinta de $\beta(N\times N)$, ya que en $\beta(N\times N)$ la clausura de todo conjunto abierto es abierta, sin embargo $\beta N\times\beta N$ no posee esta propiedad.

Los primeros resultados sobre la igualdad $\beta(X\times Y)=$ $=\beta X\times\beta Y$ se deben a Henriksen e Isbell (18); posteriomente Glicksberg en (15) prueba el siguiente resultado fundamental:

Teorema 1.1.- Sea $\{X_i : i\in I\}$ una familia de espacios tal que el conjunto $\prod\{X_i : i\in I, i\neq i_0\}$ es infinito para todo $i_0\in I$. Se verifica la igualdad

$$\beta\left(\prod\{X_i : i\in I\}\right)=\prod\{\beta X_i : i\in I\}$$

si y sólo si el espacio $\prod\{X_i : i\in I\}$ es pseudocompacto.

El estudio de la distributividad del operador β es por lo tanto equivalente al estudio de la pseudocompacidad de espacios producto.

La pseudocompacidad no es propiedad productiva, como ha probado Terasaka (33) dando un ejemplo de dos espacios

---

(✱) En esta sección la palabra espacio designará un espacio topológico de Hausdorff completamente regular.

numerablemente compactos, cuyo producto no es pseudocompacto. Surge entonces, la cuestión de en que condiciones el producto de dos espacios pseudocompactos es pseudocompacto. En esta dirección , Tamano ha probado lo siguiente:

Teorema 1.2.- Para dos espacios X e Y las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Los espacios X e Y son pseudocompactos y la proyección p_X es z-cerrada.

(b) El producto tensorial $C^*(X) \otimes C^*(Y)$ es denso en $C^*_u(X \times Y)$.

(c) El espacio $X \times Y$ es pseudocompacto.

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que, el producto de un espacio compacto por un espacio pseudocompacto, es pseudocompacto. Este resultado permite deducir la pseudocompacidad del producto de un k-espacio pseudocompacto por un espacio pseudocompacto.

Aparece entonces la siguiente cuestión: ¿Que condiciones debe verificar un espacio para que su producto por cualquier espacio pseudocompacto, sea psedocompacto?. Esta cuestión ha sido resuelta por Frolík en (12), con la siguiente caracterización de la clase $\mathfrak{P}$, de todos los espacios con la anterior propiedad.

Teorema 1.3.- Un espacio X pertenece a $\mathfrak{P}$ si y sólo si dada una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in N\}$ de abiertos, no vacíos, disjuntos dos a dos, existe una subsucesión $\{\mathcal{U}_{n_k} : k \in N\}$, tal que cuando $\mathcal{F}$ es un filtro de subconjuntos infinitos de N se verifica

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{\bigcup_{k \in F} \mathcal{U}_{n_k}}^{X} \neq \emptyset$$

Nosotros hemos obtenido otra caracterización de la clase $\mathfrak{P}$, que damos a continuación.

Teorema 1.4.- Un espacio X pertenece a $\mathfrak{P}$ si y sólo si cuando Z es un subespacio pseudocompacto de βN que contiene a N , el producto de $X \times Z$ es pseudocompacto.

Demostración.- Supongamos que $X \notin \mathfrak{P}$, entonces por la caracterización de Frolík existe una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in N\}$ de abiertos, no vacíos, disjuntos dos a dos, tal que cuando N_0 es un subconjunto infinito de N , existe un filtro $\mathcal{F}(N_0)$ de partes infinitas de N_0 para el cual

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}(N_0)} \overline{\bigcup_{n \in F} \mathcal{U}_n}^{X} = \emptyset$$

Sea $\mathcal{U}_{N_0}$ un ultrafiltro en N que contenga a la base de filtro $\mathcal{F}(N_0)$ y consideremos el siguiente subespacio Y de βN ,

$$N \cup \{ p_{N_0} \in \beta N \sim N : \mathcal{U}_{N_0} \text{ converge a } p_{N_0}, N_0 \subset N, |N_0| = \aleph_0 \}$$

Entonces Y es un espacio pseudocompacto y la familia $\{\mathcal{U}_m \times \{n\} : m \in N\}$ de abiertos, no vacíos, es localmente finita en $X \times Y$, por lo que $X \times Y$ no es pseudocompacto.

El siguiente teorema se debe a Frolík (11) y nos permitirá establecer la cardinalidad de algunos espacios de la clase $\mathfrak{P}$.

Teorema 1.5.- Sea X un espacio métrico separable y sea $M \subset \beta X \sim X$ un conjunto de cardinal $< 2^{2^{\aleph_0}}$. Entonces existe un espacio $\aleph_0$-compacto T de cardinal $\leq 2^{\aleph_0}$ tal que $X \subset T \subset \beta X \sim M$.

Como consecuencia de este resultado se tiene:

Teorema 1.6.- Si $N \subset Y \subset \beta N$ e $Y \in \mathfrak{P}$, entonces $|Y| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Demostración. Supongamos que $|Y| < 2^{2^{\aleph_0}}$, entonces $|Y \sim N| < 2^{2^{\aleph_0}}$ y por el teorema anterior, existe un espacio Z numerablemente compacto tal que $N \subset Z \subset \beta N \sim (Y \sim N)$. Ahora bien, el conjunto $\{(n,n) : n \in N\}$ es abierto y cerrado en $Y \times Z$ y por lo tanto $Y \times Z$ no es pseudocompacto.

Si $\mathfrak{P}^*$ es la clase de todos los espacios X tales que cuando $\{V_n : n \in N\}$ es una sucesión de abiertos en X, no vacíos, disjuntos dos a dos, existe un compacto que corta a infinitos V_n, Frolík (12) ha probado que $\mathfrak{P}^*$ es una subclase propia de $\mathfrak{P}$.

Mas resultados sobre estas clases los ha dado Noble en (27), donde demuestra que si el k_R-espacio asociado a un espacio dado es pseudocompacto, entonces dicho espacio pertenece a la clase $\mathfrak{P}^*$, y propone como cuestión abierta encontrar un ejemplo de un espacio de la clase $\mathfrak{P}^*$ cuyo k_R-espacio asociado no sea pseudocompacto. Este problema lo hemos resuelto con el ejemplo que damos a continuación (3).

<u>Ejemplo 1.-</u> Sea Z_0 el subespacio de $W(\omega_2+1)$ constituído por $\{\omega_2\}$ y todos los puntos que poseen una base numerable de entornos. El subespacio $S = Z_0 \sim \{\omega_2\}$ es sucesionalmente compacto y por lo tanto Z_0 tambien lo es. El punto ω_2, resulta no ser de acumulación de ningún subespacio compacto de Z_0, por lo que la función cuyo valor es 1 en ω_2 y 0 en $Z_0 \sim \{\omega_2\}$, es continua desde cada conjunto compacto de Z_0. Entonces $\{\omega_2\}$ es un conjunto abierto en $k_R Z_0$.

Sea X el espacio $(Z_0 \times W(\omega_0+1)) \sim \{(\omega_1,\omega_0)\}$ y vamos a ver que pertenece a $\mathfrak{P}^*$. Puesto que S es sucesionalmente compacto, $W(\omega_0+1)$ es compacto y la clase $\mathfrak{P}^*$ es cerrada para productos ((27), T.3.4.), se tiene que el espacio $Y = S \times W(\omega_0+1) \in \mathfrak{P}^*$ y como Y es denso en X, se sigue que $X \in \mathfrak{P}^*$. Por otra parte, el conjunto $\{(\omega_2,n)\}$ es abierto en $k_R X$ para todo $n \in N$, por lo que la función cuyo valor en (ω_2,n) es n y se anula en los demás puntos de X, es continua en $k_R X$ y no acotada.

En su estudio sobre la clase $\mathfrak{P}$, Frolík caracteriza la clase $\mathfrak{P}_F$ de los espacios tales que todo subespacio cerrado pertenece a $\mathfrak{P}$, con el siguiente teorema.

Teorema 1.7.- Para un espacio X las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $X \in \mathfrak{P}_F$.

(b) Si M es un subconjunto infinito de X, existe un subespacio compacto K de X cuya intersección con M es infinita.

(c) Si $\{x_n : n \in N\}$ es una sucesión en X, existe una subsucesión $\{x_{n_k} : k \in N\}$ tal que el conjunto $\bigcup\{x_{n_k} : k \in N\}$ es relativamente compacto.

Isiwata (20) investiga las relaciones entre algunas de las clases introducidas por Frolík en (11), (12), dando dos nuevas caracterizaciones de la clase $\mathfrak{P}_F$, sin embargo una de ellas es errónea, como probamos nosotros con el siguiente ejemplo de un espacio X perteneciente a $\mathfrak{P}_F$, que contiene una copia H de N de forma que el espacio $H \cup (\beta X \sim X)$ es pseudocompacto.

<u>Ejemplo</u> <u>2.-</u> Sea Y el espacio producto

$$W(\omega_1+1) \times W(\omega_0+1) \times W(\omega_1+1)$$

y sea X el subespacio

$$Y \sim \{ W(\omega_1) \times W(\omega_0+1) \times \{\omega_1\} \}$$

Como X es unión de los espacios sucesionalmente compactos

$$W(\omega_1+1) \times W(\omega_0+1) \times W(\omega_1), \quad \{\omega_1\} \times W(\omega_0+1) \times \{\omega_1\}$$

se tiene que X es sucesionalmente compacto y por lo tanto pertenece a $\mathfrak{P}_F$ ((12), 4.2.2)

Del teorema de Glisksberg se deduce que

$$Y = \beta(W(\omega_1+1) \times W(\omega_0+1) \times W(\omega_1))$$

luego $Y = \beta X$.

Si $H = \{\omega_1\} \times W(\omega_0) \times \{\omega_1\}$, se tiene que H es una copia de N contenida en X y $Z = H \cup (\beta X \sim X)$ es pseudocompacto, ya que este espacio es homeomorfo a

$$\{ W(\omega_1+1) \times W(\omega_0+1) \} \sim \{(\omega_1, \omega_0)\}$$

El siguiente teorema es una modificación del dado por Isiwata para caracterizar la clase $\mathfrak{B}_F$.

<u>Teorema 1.8.- Para un espacio</u> X <u>las siguientes condiciones son equivalentes</u>:

(a) $X \in \mathfrak{B}_F$

(b) <u>Sea</u> H <u>una copia de</u> N <u>contenida en</u> X , <u>sea</u> K <u>una compactación de</u> X <u>y sea</u> V <u>un entorno abierto de</u> H <u>en</u> K . <u>Si</u> $Y = X \cup V$ <u>y</u> $S \subset K \sim Y$, <u>el espacio</u> $H \cup S$ <u>no es pseudocompacto</u>.

(c) <u>Si</u> $\{a_n : n \in N\}$ <u>es una sucesión infinita y discreta en</u> X , <u>existe una subsucesión</u> $\{a_{n_K} : K \in N\}$ <u>tal que para todo filtro</u> $\mathcal{F}$ <u>de subconjuntos infinitos de</u> N <u>se tiene</u>

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{\bigcup_{K \in F} \{a_{n_K}\}}^{X} \neq \emptyset$$

<u>Demostración.-</u> (a) $\rightarrow$ (b) Supongamos que $X \in \mathfrak{B}_F$ y que H es una copia de N contenida en X . Del teorema 1.7 se deduce que existe un conjunto compacto $K_0 \subset X$ tal que $H_0 = K_0 \cap H$ es infinito. Entonces H_0 es un subconjunto abierto y cerrado de $H \cup S$, por lo tanto $H \cup S$ no es pseudocompacto. (b) $\rightarrow$ (c) Si $H = \bigcup \{a_n : n \in N\}$ y V es un entorno abierto de H en βX , por hipótesis el espacio

$$Z = H \cup (\overline{H}^{\beta X} \sim Y)$$

no es pseudocompacto, donde $Y = X \cup V$. Eso quiere decir que existe una sucesión $\{U_K : K \in N\}$ de abiertos, no vacíos, disjuntos dos a dos, que es localmente finita en Z. Si $a_{n_K} \in H \cap U_K$, $K = 1, 2, \ldots$ y $\mathcal{F}$ es un filtro de partes infinitas de N, se tiene que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{\bigcup_{K \in F} \{a_{n_K}\}}^{X} \neq \emptyset$$

pues si esa intersección fuese vacía, se tendría que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{\bigcup_{K \in F} \{a_{n_K}\}}^{Z} \neq \emptyset$$

y la sucesión $\{U_K : K \in N\}$ no sería localmente finita en Z.

(c)$\rightarrow$(a). La misma demostración de ((20), T.2.1).

2. Compacidad numerable de espacios producto

Como en el caso de los espacios pseudocompactos, la compacidad numerable no es propiedad productiva, como lo han probado Novak (31) y Terasaka (33).

En (11), Frolík estudia la clase $\mathfrak{C}$ de todos los espacios completamente regulares X tales que, cuando Y es un espacio completamente regular $\aleph_0$-compacto, el espacio producto $X \times Y$ es $\aleph_0$-compacto. Es suya la siguiente caracterización de esta clase.

Teorema 2.1 Un espacio X completamente regular no pertenece a $\mathfrak{C}$ si y sólo si existe una copia H de N contenida en X tal que, cuando K es una compactación de X, existe un subconjunto $S \subset K - X$ tal que el espacio $H \cup S$ es $\aleph_0$-compacto.

A continuación damos una caracterización de la clase $\mathfrak{C}$, similar a la que hemos dado para la clase $\mathfrak{P}$ en el teorema 1.4.

Teorema 2.2.- Un espacio X completamente regular pertenece a $\mathfrak{C}$ si y sólo si cuando Z es un subespacio $\aleph_0$-compacto de βN que contiene a N, el producto $X \times Z$ es $\aleph_0$-compacto.

Demostración.- Supongamos que Y es un espacio $\aleph_0$--compacto, que X satisface la condición del teorema (por lo tanto es $\aleph_0$-compacto) y que $X\times Y$ no es $\aleph_0$-compacto. Entonces existen dos copias de N, $N_1=\bigcup\{a_n: n\in N\}\subset X$, $N_2=\bigcup\{b_n: n\in N\}\subset Y$, de forma que el conjunto $\{(a_n,b_n): n\in N\}$ es cerrado en $X\times Y$. Evidentemente $\overline{N_2}^Y$ es $\aleph_0$-compacto y $X\times\overline{N_2}^Y$ no lo es. Si τ es la aplicación $n\rightsquigarrow b_n$ de N sobre N_2, sea $\bar\tau$ la extensión Stone de τ, que va de βN sobre $\overline{N_2}^{\beta Y}$. Si $Z=\bar\tau^{-1}(\overline{N_2}^Y)$, se tiene que Z es $\aleph_0$-compacto, ya que $\bar\tau$ es continua, cerrada y $\bar\tau^{-1}(y)$ es compacto para todo $y\in\overline{N_2}^Y$ ((11), P.1.1). Como $X\times\overline{N_2}^Y$ es la imagen continua de $X\times Z$, resulta que $X\times Z$ no es $\aleph_0$-compacto.

Según se ha visto en la demostración del teorema 1.6, si $N\subset Y\subset\beta N$ y $|Y|<2^{2^{\aleph_0}}$, existe un espacio $\aleph_0$-compacto Z tal que $Y\times Z$ no es pseudocompacto. Como consecuencia de este hecho se tiene que:

Teorema 2.3.- Si Y es un espacio en $\mathfrak{C}$ que contiene un subespacio C^*-sumergible no pseudocompacto, entonces $|Y|\geq 2^{2^{\aleph_0}}$.

Demostración.- Supongamos que X es C^*-sumergible en Y y que X no es pseudocompacto. Si H es una copia de N,

C-sumergible en X ((13), C.1.21), se tiene que $\beta H = \overline{H}^{\beta X} = \overline{H}^{\beta Y}$, ya que $\overline{X}^{\beta Y} = \beta X$. Ahora bien como $Y \in \mathfrak{C}$, resulta que $\overline{H}^{Y} \in \mathfrak{C}$, y de $\overline{H}^{Y} \subset \beta H$ se sigue que $|\overline{H}^{Y}| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Corolario.- Si Y es un espacio en $\mathfrak{C}$ que contiene un subespacio denso C^*-sumergible separable no pseudocompacto, entonces $|Y| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Algunos ejemplos de espacios pertenecientes a la clase $\mathfrak{C}$ nos los proporcionan los siguientes resultados debidos a Frolík (11) y Noble (27) - Franklin (10) respectivamente.

Teorema 2.4.- Si X es un espacio completamente regular $\aleph_0$-compacto que posee una compactación K tal que $|K \sim X| < 2^{\aleph_0}$, entonces X pertenece a $\mathfrak{C}$.

Teorema 2.5.- Si Y y kX son espacios $\aleph_0$-compactos, entonces $X \times Y$ es $\aleph_0$-compacto.

Aun no hemos analizado sin embargo, la cuestión de en que condiciones el producto de dos espacios $\aleph_0$-compactos, es $\aleph_0$-compacto. Nosotros vamos a dar mas adelante una condición necesaria y suficiente para que ello se verifique, en términos de una clase especial de proyecciones en los espacios producto, definidas anteriormente (p.4) y que llamaremos proyecciones $\aleph_0$-cerradas.

En primer lugar estableceremos dos resultados sobre proyecciones α-cerradas, $\alpha \geq \aleph_0$, que utilizaremos posteriormente.

<u>Proposición 2.6.</u>- <u>Sea Ω un cubrimiento cerrado de un espacio X y supongamos que X está provisto de la topología $\sigma(\Omega)$. Entonces, la proyección p_X de $X \times Y$ sobre X es α-cerrada si y sólo si para todo $F \in \Omega$, la proyección p_F de $F \times Y$ sobre F es α-cerrada.</u>

<u>Demostración</u>.- La necesidad es evidente ya que los conjuntos de Ω son cerrados en X. La suficiencia es consecuencia de la definición de $\sigma(\Omega)$ y de que si $A \subset X \times Y$, entonces $p_E(A_0) = E \cap p_X(A)$, donde $A_0 = A \cap (E \times Y)$, $E \in \Omega$.

<u>Corolario</u>.- <u>Si X es un k-espacio e Y es un espacio $\aleph_0$-compacto, entonces la proyección p_X es α-cerrada.</u>

<u>Demostración</u>.- Por la proposición anterior basta ver que si K es un espacio compacto e Y es α-compacto, la proyección p_K es α-cerrada. Como el producto $K \times Y$ es $\aleph_0$-compacto ((11), T.1.3), si H es un subconjunto cerrado de $K \times Y$ tal que $|H| \leq \alpha$, entonces H es compacto. Pero p_K es continua, luego $p_K(H)$ es compacto y por lo tanto cerra_

do en K .

El siguiente resultado es en parte una condición necesaria y suficiente para la compacidad numerable del producto de dos espacios $\aleph_0$-compactos. Una generalización de esta condición para $\alpha > \aleph_0$ veremos con un ejemplo que no es probable.

Teorema 2.7.- Si el producto $X \times Y$ es α-compacto, entonces la proyección p_X es α-cerrada. Si X e Y son espacios $\aleph_0$-compactos y p_X es $\aleph_0$-cerrada, el producto $X \times Y$ es $\aleph_0$-compacto.

Demostración.- La prueba de la primera afirmación es la misma que para p_K en el corolario anterior. Veamos entonces la segunda. Si H es un subconjunto cerrado numerable de $X \times Y$, entonces $p_X(H)$ es cerrado en X y por lo tanto es compacto. El espacio $p_X(H) \times Y$ es $\aleph_0$-compacto ((11), T.1.3) y como H es cerrado en ese producto, será compacto. Como todo subconjunto numerable cerrado de $X \times Y$ es compacto, se tiene que $X \times Y$ es $\aleph_0$-compacto ((13), 5.H.5).

Como vamos a ver con un ejemplo, la caracterización ((13) 5.H.5) de compacidad numerable no es válida en general para

$\alpha > \aleph_0$, con lo cual conjeturamos que las proyecciones α -cerradas no caracterizan los productos α -compactos, para $\alpha > \aleph_0$.

Ejemplo 3.- Sea X el conjunto de todos los ordinales no mayores que ω_1 provisto de la topología para la cual los puntos distintos de ω_1 son aislados, y una base de entornos de ω_1 es la familia de todos los conjuntos de la forma

$\{\sigma \in X : \alpha \leq \sigma \leq \omega_1\}$, $\alpha \in X \sim \{\omega_1\}$.

Como todo punto de X posee una base de entornos que son a la vez abiertos y cerrados, se deduce que X es completamente regular. Evidentemente, todo conjunto de la forma $C(\alpha_0) = \{\sigma \in X : 1 \leq \sigma \leq \alpha_0\}$, $\omega_0 \leq \alpha_0 < \omega_1$ es homeomorfo a N y C -sumergible en X , por lo tanto $\overline{C(\alpha_0)}^{\beta X} = \beta(C(\alpha_0))$. Si $Y = \beta X \sim \{\omega_1\}$, se tiene que todo subconjunto cerrado infinito de Y tiene cardinal mayor o igual que $2^{2^{\aleph_0}}$. Como $X \sim \{\omega_1\}$ se puede considerar como una red en Y sin subredes convergentes, resulta que Y no es $\aleph_1$ -compacto, sin embargo todo subconjunto cerrado de Y con cardinal $\leq \aleph_1$, es finito y por lo tanto compacto.

Como consecuencia del teorema anterior y del corolario de la proposición 2.6 se deduce el teorema 2.5, que generaliza C.1.10.1. de (9). Sin embargo la clase de los espacios X tales que kX es $\aleph_0$-compacto, es una subclase propia de la clase $\mathfrak{C}$ como vamos a probar a continuación.

Ejemplo 4.- Suponiendo la hipótesis del continuo, el conjunto $P(N)$ de P-puntos de $\beta N \sim N$ no es vacío. Sea $X = \beta N \sim P(N)$, entonces como ha probado Isiwata ((20), E.3.1.), X pertenece a $\mathfrak{C}$. Por otra parte, teniendo en cuenta que $P(N)$ es denso en $\beta N \sim N$ ((13), 9.M.3.), se deduce que N corta a los subconjuntos compactos de X en conjuntos finitos, por lo tanto N es abierto y cerrado en kX.

Finalizamos esta sección con unas caracterizaciones de los espacios sucesionalmente compactos y los $\aleph_0$-compactos por proyecciones.

Lema.- Si la proyección p_Y de $X \times Y$ sobre Y es $\aleph_0$-cerrada e Y contiene una copia de N no cerrada, entonces X es $\aleph_0$-compacto.

Proposición 2.8.- El espacio sX es $\aleph_0$-compacto si y sólo si para todo espacio infinito $\aleph_0$-compacto Y, la proyección p_Y de $Y \times sX$ sobre Y es $\aleph_0$-cerrada.

Demostración.- La suficiencia es consecuencia del lema anterior. Recíprocamente, por ser sX un k-espacio $\aleph_0$-compacto, el producto $Y \times sX$ es $\aleph_0$-compacto y por el teorema 2.7, la proyección p_Y es $\aleph_0$-cerrada.

Noble ((27), T.4.1.) caracteriza los espacios sucesionalmente compactos, como aquellos espacios tales que su S-espacio asociado es $\aleph_0$-compacto. De la proposición anterior se deduce entonces:

Teorema 2.9.- Un espacio X es sucesionalmente compacto si y sólo si para todo espacio Y infinito $\aleph_0$-compacto, la proyección p_Y de $Y \times sX$ sobre Y es $\aleph_0$-cerrada.

Del teorema 2.7 se sigue la siguiente caracterización de la compacidad numerable.

Teorema 2.10.- Si K es un espacio compacto infinito, la proyección p_K de $K \times X$ sobre K es $\aleph_0$-cerrada si y sólo si X es $\aleph_0$-compacto.

Teniendo en cuenta que si X es un espacio sequencial e Y es $\aleph_0$-compacto, la proyección p_X es cerrada ((7), p.77) se deduce:

Corolario.- Si K es un espacio compacto sequencial infinito, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es $\aleph_0$-compacto.

(b) P_K es $\aleph_0$-cerrada.

(c) P_K es cerrada.

PROBLEMA ABIERTO.- Encontrar un ejemplo de dos espacios α-compactos tales que su producto no sea α-compacto, sin embargo sus proyecciones sean α-cerradas.

3. Productos finitos de k_R-espacios, b_R-espacios y s_R-espacios

Los resultados de Glicksberg, Tamano y Frolík sobre la distributividad del operador β y por lo tanto sobre la pseudocompacidad de los espacios producto, son obtenidos en gran parte utilizando la aplicación exponencial Ψ_X de $C^*(X\times Y)$ en $C(X, C^*_\mu(Y))$ y el teorema de Ascoli. Con una generalización conveniente de estas técnicas, nosotros hacemos un estudio de la productividad finita de k_R-espacios, b_R-espacios y s_R-espacios.

Brown (4) ha dado el siguiente resultado sobre productividad de k_R-espacios:

Teorema 3.1.- Si X e Y son k_R-espacios completamente regulares, se tiene que

$$\Psi_X\left[C(k_R(X\times Y))\right] = C(X, C_c(Y))$$

De este resultado deduce Hušek (19) la siguiente condición necesaria y suficiente para que el producto de dos espacios completamente regulares sea un k_R-espacio.

Teorema 3.2.- Sean X e Y espacios completamente regulares. El espacio producto $X \times Y$ es un k_R-espacio si y sólo si X e Y son k_R-espacios y se verifica la igualdad

$$\psi_X [C(X \times Y)] = C(X, C_c(Y))$$

Del teorema anterior obtiene Hušek una caracterización de la clase de espacios completamente regulares con la propiedad de que su producto por un k_R-espacio completamente regular, es un k_R-espacio.

Teorema 3.3.- Sea X un k_R-espacio completamente regular. Entonces el producto de X por cualquier k_R-espacio completamente regular es un k_R-espacio si y sólo si X es localmente acotado.

Este resultado es similar al obtenido por Michael (23) para caracterizar los espacios localmente compactos por sus productos con k-espacios.

A continuación damos unos resultados previos que utilizaremos para establecer los principales teoremas. Sean X e Y dos espacios y f una función real definida en $X \times Y$.
Con la misma demostración de que (a) implica (c) en ((32),

T.1) se tiene que:

Proposición 3.4.- Si $f\in C(X\times Y)$ y la proyección p_X es $\mathcal{Z}$-cerrada, entonces la aplicación $\psi_X(f)$ de X en $C_u(Y)$ es continua.

Proposición 3.5.- La familia $\{f(x,\ ) : x\in X\}$ es equicontinua en Y si y sólo si la aplicación $\psi_Y(f)$ de Y en $C_u(X)$ es continua.

Proposición 3.6.- Si V es un entorno de $x_0\in X$, W es un entorno de $y_0\in Y$ y la aplicación $\psi_V(f)$ de V en $C_u(W)$ es continua, entonces f es continua en (x_0,y_0).

Proposición 3.7.- Si A es un subconjunto acotado de X y K es un subconjunto compacto de Y, entonces $A\times K$ es un subconjunto acotado de $X\times Y$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X cuya unión sea X. Una función real definida en X se dice que es $\mathcal{F}_R$-continua si su restricción a cada $A\in\mathcal{F}$ es continua. Un $\mathcal{F}_R$-espacio será un espacio en el que toda función real $\mathcal{F}_R$-continua sea continua. Con estas definiciones se tiene que $\mathcal{B}_R$-espacio = b_R-espacio, K_R-espacio = k_R-espacio y $\mathcal{S}_R$-espacio = s_R-espacio.

Como consecuencia de que un espacio Z es completamente regular si y sólo si su topología coincide con la topología proyectiva inducida por $C(Z)$ y de que en este caso una aplicación σ de un espacio Y en Z es continua si y sólo si $g\circ\sigma\in C(Y)$ para toda $g\in C(Z)$, se tiene:

Proposición 3.8.- Si φ es una aplicación de un $\mathcal{F}_R$-espacio X en un espacio completamente regular tal que su restricción φ/A es continua para todo $A\in\mathcal{F}(X)$, entonces φ es continua.

En el siguiente teorema consideramos únicamente familias $\mathcal{F}$ con las siguientes propiedades: 1) $\mathcal{F}\subset\mathcal{B}$ 2). Si $A\in\mathcal{F}(X)$, $B\in\mathcal{F}(Y)\cap\mathcal{K}(Y)$ y f es una función $\mathcal{F}_R$-continua en $X\times Y$, entonces $f/_{A\times B}\in C(A\times B)$. Evidentemente $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ verifican estas condiciones y de la proposición 3.7 se decuce que $\mathcal{B}$ tambien las verifica.

Teorema 3.9.- Si $\mathcal{L}\subset\mathcal{K}\cap\mathcal{F}$, X es un $\mathcal{L}_R$-espacio e Y es un $\mathcal{F}_R$-espacio localmente acotado, entonces $X\times Y$ es un $\mathcal{F}_R$-espacio.

Demostración.- Sea f una función $\mathcal{F}_R$-continua en

$X\times Y$ y sea $K\in\mathcal{L}(X)$. Si $M\in\mathcal{F}(Y)$, como K es compacto resulta que $f|_{K\times M}\in C(K\times M)$ y por la proposición 3.4 la aplicación $\Psi_M(f)$ de M en $C_u(K)$ es continua. Como Y es un $\mathcal{F}_R$-espacio, de la proposición 3.8 se deduce que la aplicación $\Psi_Y(f)$ de Y en $C_u(K)$ es continua. Sea y_0 un punto de Y y sea V un entorno acotado de y_0 . Como el conjunto $\Psi_Y(f)(V)$ es relativamente compacto en $C_u(K)$, la familia $\{f(\ ,y): y\in V\}$ es equicontinua en K por el teorema de Ascoli. Por la proposición 3.5 la aplicación $\Psi_K(f)$ de K en $C_u(V)$ es continua y puesto que X es un $\mathcal{L}_R$-espacio, la aplicación $\Psi_X(f)$ de X en $C_u(V)$ es continua. De la proposición 3.6 se sigue que la función f es continua en (x,y_0) para todo $x\in X$.

Corolario 3.9.1.- El producto de un k_R-espacio (resp s_R-espacio) y un k_R-espacio (resp. s_R-espacio) localmente acotado, es un k_R-espacio (resp. s_R-espacio).

Corolario 3.9.2.- El producto de un k_K-espacio y un b_K-espacio localmente acotado es un b_R-espacio.

Teorema 3.10.- Si X es un b_R-espacio e Y es localmente compacto, el producto $X\times Y$ es un b_R-espacio.

Demostración.- Sea f una función $\mathcal{B}_R$ -continua en $X\times Y$ y sea y_0 un punto de Y. Elijamos $A\in\mathcal{B}(X)$ y un entorno compacto V de y_0. Como $A\times V\in\mathcal{B}(X\times Y)$ se tiene que $f/_{A\times V}\in C(A\times V)$ y como la proyección p_A de $V\times A$ sobre A es cerrada, la aplicación $\Psi_A(f)$ de A en $C_u(V)$ es continua. Pero X es un b_R-espacio, luego la aplicación $\Psi_X(f)$ de X en $C_u(V)$ es continua y por lo tanto f es continua en (x,y_0) para todo $x\in X$.

La necesidad de la condición del teorema 3.3, la establece Hušek construyendo para cada espacio X completamente regular no localmente acotado, un espacio sequencial paracompacto $E(X)$ y una función f que es k_R -continua en $X\times E(X)$, pero que no es continua. Sin embargo, para la definición de $E(X)$ y de f no es necesaria la completa regularidad de X, siendo además fácil probar que la función f es b_R -continua en $X\times E(X)$.

De estas consideraciones y del corolario 3.9.1 se deducen los siguientes resultados:

Teorema 3.11.- *Si para todo b_R -espacio Y, el producto $X\times Y$ es un b_R -espacio, entonces X es localmente acotado.*

Teorema 3.12.- Para un espacio X las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es un k_R -espacio (resp. s_R -espacio) localmente acotado.

(b) Si Y es un k_R-espacio (resp. s_R-espacio), el producto $X \times Y$ es un k_R -espacio (resp. s_R -espacio).

(c) Si Y es un espacio sequencial paracompacto, el producto $X \times Y$ es un k_R -espacio (resp. s_R -espacio).

Si X es completamente regular, (a), (b) y (c) son equivalentes a :

(d) X es un k_R -espacio (resp. s_R -espacio) localmente pseudocompacto.

PROBLEMAS ABIERTOS

(1) ¿Es el producto de dos espacios pseudocompactos un b_R -espacio?.

(2) ¿Es el producto de un b_R -espacio por un espacio localmente acotado un b_R -espacio?.

(3) ¿Cual es la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos b_R -espacios sea un b_R -espacio?.

B I B L I O G R A F I A

(1) BLASCO, J. L.- "Productos finitos de k_R-espacios, b_R-espacios y s_R-espacios" Real Ac. Ciencias.

(2) BLASCO, J. L.- "Compacidad numerable y psedocompacidad del producto de dos espacios topológicos (Pendiente de publicación).

(3) BLASCO, J. L.- "Two problems on k_R-spaces" Acta Matematica Hungarica (Pendiente de publicación).

(4) BROWN, R.- "Funtion spaces and product topologies" Quart. J. Math. Oxford 15 (1964) 238-250.

(5) BUCHWALTER, H.- "Sur le theoreme de Glicksberg-Frolík" C.R.Ac.Sc. Paris Ser.A-B. A11-A14 (1971).

(6) COMFORT, W. W.- "A non-pseudocompact product space whose finite products are pseudocompact" Math. Ann. 170, 41-44 (1967).

(7) FLEISCHER, I. and FRANKLIN, S. P.- "On compactness and projections" Contributions to Extension Theory of Topological Structures. (Proc. Sympos. Berlin, 1967) p. 77-79.

(8) FRANKLIN, S. P.- "On products of countably compact spaces" Proc. Amer. Math. Soc. 48, 236-38 (1975.

(9) FRANKLIN S. P.- "Spaces in which sequences suffice " Fund. Math. 57 (1965), 107-115.

(10) FRANKLIN, S. P.- "Spaces in which sequences suffice II" Fund. Math. 61 (1967), 51-56.

(11) FROLIK, Z.- "The topological product of countably compact spaces"Czech. Math. J. 10, 329-38 (1960).

(12) FROLIK, Z.- "The topological product of two pseudocompact spaces" Czech. Math. J. 10, 339-49.

(13) GILLMAN, L. and JERISON, M.- "Rings of continuous functions" Van Nostrand R. Comp. (London) 1960.

(14) GILLMAN, L. and JERISON, M.- "Stone-Čech compactifications of a product" Arch. Math. 10, 443-46 (1959).

(15) GLICKSBERG, I.- "Stone-Čech compactifications of products" Trans. Amer. Math. Soc. 90, 369-82 (1959).

(16) HAGER, A.- "Projection of zero-sets" Trans. Amer. Math. Soc. 140, 87-94 (1969).

(17) HAGER, A.- "Some remarcks on the tensor product of function rings" Math. Z. 92, 210-224.

(18) HENRIKSEN, M. y Isbell, J.R.- "On the Stone-Čech compactification of a product of two spaces"

(19) HUŠEK, M.- "Products of quotients and of k'-spaces" Comm. Univ. Car. 12, 1 (1971).

(20) ISIWATA, T.- "Some classes of countably compact spaces" Czech. Math. J. 14, 226-28 (1964).

(21) ISIWATA, T.- "Normality and perfect mappings" Proc. Japan Acad. 39, (1963), 95-97.

(22) KELLEY, J. L.- "Topología general", Eudeba (Buenos Aires). 1962.

(23) MICHAEL, E.- "Local compactness and cartesian product of quotient maps and k-spaces" Ann. Inst/Fourier 18 (1968) 281-86-.

(24) MROWKA, S. G.- "Compactness and products spaces" Colloq. Math. 7 (1952) 19-22.

(25) MROWKA, S. G.- "On completely regular spaces" Fund. Math. 41 105-106 (1954).

(26) NAGATA, J.- "Modern General Topology" Amsterdam. Nor-Holland P. C. (1968).

(27) NOBLE, N.- "Countably compact and pseudocompact products" Czech. Math. J. 19, 226-38 (1964).

(28) NOBLE, N.- "Products with closed projections" Trans. Amer. Math. Soc. 141, (1969).

(29) NOBLE, N.- "Products with closed projections II" Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971).

(30) NOBLE, N.- "The continuity of functions on cartesian products" Trans. Amer. Math. Soc. 149, 187-98 (1970).

(31) NOVAK, J.- "On the cartesian product of two compact spaces" Fund. Math. 40 (1953) 106-112.

(32) TAMANO, H.- "A note on the pseudocompactness of the product of two spaces" Men. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. 33 (1960) 225-30.

(33) TERASAKA, H.- "On cartesian product of compact spaces" Osaka Math. J. 4 (1952) 11-15.

(34) RUDIN, M. E.- "A technique for constructing examples" Proc. Amer. Math. Soc. 1320-23 (1965).

(35) WALKER, R. C.- "The Stone-Čech compactification" Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebite. Heidelberg-Berlin-New York : Springer 1974.

(36) WARNER, S.- "The topology of compact convergence on continuous function spaces" Duke Math. J. 25 (1958) 205-32.

(37) WILANSKY, A.- "Topology for Analisys" Ginn. and Co., Waltham Mass. 1970.

(38) WILLARD, S.- "General Topology" Reading: Addison-Wesley. 1970.

FUNDACION JUAN MARCH
SERIE UNIVERSITARIA

Títulos Publicados:

1.— *Semántica del lenguaje religioso / A. Fierro*
(Teología. España, 1973)

2.— *Calculador en una operación de rectificación discontinua/A. Mulet*
(Química. Extranjero, 1974)

3.— *Skarns en el batolito de Santa Olalla/F. Velasco*
(Geología. España, 1974)

4.— *Combustión de compuestos oxigenados/J.M. Santiuste*
(Química. España, 1974)

5.— *Películas ferromagnéticas a baja temperatura/José Luis Vicent López*
(Física. España, 1974)

6.— *Flujo inestable de los polímeros fundidos/José Alemán Vega*
(Ingeniería. Extranjero, 1975)

7.— *Mantenimiento del hígado dador in vitro en cirugía experimental*
José Antonio Salva Lacombe (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España,1973)

8.— *Estructuras algebraicas de los sistemas lógicos deductivos/José Plá Carrera*
(Matemáticas. España, 1974)

9.— *El fenómeno de inercia en la renovación de la estructura urbana.*
Francisco Fernández-Longoría Pinazo (Urbanización del Plan Europa 2.000 a través de la Fundación Europea de la Cultura)

10.— *El teatro español en Francia (1935–1973) / F. Torres Monreal*
(Literatura y Filología. Extranjero, 1971)

11.— *Simulación electrónica del aparato vestibular/J.M. Drake Moyano*
(Métodos Físicos aplicados a la Biología. España, 1974)

12.— *Estructura de los libros españoles de caballerias en el siglo XVI.*
Federico Francisco Curto Herrero (Literatura y Filología. España, 1972)

13.— *Estudio geomorfológico del Macizo Central de Gredos*
M. Paloma Fernández García (Geología. España, 1975)

14.— *La obra gramatical de Abraham Ibn ᶜ Ezra/Carlos del Valle Rodriguez*
(Literatura y Filología. Extranjero, 1970)

15.— *Evaluación de Proyectos de Inversión en una Empresa de producción y distribución de Energía Eléctrica.*
Felipe Ruíz López (Ingeniería. Extranjero, 1974)

16.— *El significado teórico de los términos descriptivos/Carlos Solís Santos (Filosofía. España, 1973)*

17.— *Encaje de los modelos econométricos en el enfoque objetivos-instrumentos relativos de política económica./ Gumersindo Ruíz Bravo (Sociología. España, 1971)*

18.— *La imaginación natural (estudio sobre la literatura fantástica norteamericana). / Pedro García Montalvo (Literatura y Filología. Extranjero, 1974)*

19.— *Estudio sobre la hormona Natriurética. / Andrés Purroy Unanua (Medicina, Farmacia y Veterinaria. Extranjero, 1973)*

20.— *Análisis farmacológico de las acciones miocárdicas de bloqueantes Beta—Adrenérgicos./ José Salvador Serrano Molina (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1970)*

21.— *El hombre y el diseño industrial./Miguel Durán—Lóriga (Artes Plásticas. España, 1974)*

22.— *Algunos tópicos sobre teoría de la información./ Antonio Pascual Acosta (Matemáticas. España, 1975)*

23.— *Un modelo simple estático. Aplicación a Santiago de Chile*
Manuel Bastarreche Alfaro (Arquitectura y Urbanismo. Extranjero, 1973)

24.— *Moderna teoría de control: método adaptativo-predictivo Teoría y realizaciones. /Juan Manuel Martín Sánchez (Ingeniería. España, 1973)*

25.— *Neurobiología (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*

26.— *Genética (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*

27.— *Genética (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*

28.— *Investigación y desarrollo de un analizador diferencial digital (A.D.D.) para control en tiempo real. /Vicente Zugasti Arbizu (Física. España, 1975)*

29.— *Transferencia de carga en aleaciones binarias./ Julio A. Alonso (Física. Extranjero, 1975)*

30.— *Estabilidad de osciladores no sinusoidales en el rango de microondas. / José Luis Sebastian Franco. (Física. Extranjero, 1974)*

31.— *Estudio de los transistores FET de microondas en puerta común. Juan Zapata Ferrer. (Ingeniería. Extranjero, 1975).*

32.— *Estudio sobre la moral de Epicuro y el Aristóteles esotérico./ Eduardo Acosta Mendez (Filosofía. España, 1973)*

33.— *Las Bauxitas Españolas como mena de aluminio./ Salvador Ordoñez Delgado (Geología. España, 1975).*

34 *Los grupos profesionales en la prestación de trabajo: obrero y empleados./Federico Durán López (Derecho. España, 1975)*

35.— *Obtención de Series aneuploides (monosómicas y ditelosómicas) en variedades españolas de trigo común./ Nicolás Jouve de la Barreda. (Ciencias Agrarias. España, 1975).*

36.— *Efectos dinámicos aleatorios en túneles y obras subterráneas./ Enrique Alarcón Alvarez. (Ingeniería. España, 1975).*

37.— *Lenguaje en periodismo escrito./Fernando Lázaro Carreter, Luis Michelena Elissalt, Robert Escarpit, Eugenio de Bustos, Víctor de la Serna, Emilio Alarcos Llorach y Juan Luis Cebrián. (Seminario organizado por la Fundación Juan March los días 30 y 31 de mayo de 1977).*

38.— *Factores que influyen en el espigado de la remolacha azucarera, beta vulgaris L./ José Manuel Lasa Dolhagaray y Antonio Silván López. (Ciencias Agrarias. España, 1974).*