La Serie Universitaria de la Fundación Juan March presenta resúmenes, realizados por el propio autor, de algunos estudios e investigaciones llevados a cabo por los becarios de la Fundación y aprobados por los Asesores Secretarios de los distintos Departamentos.

El texto íntegro de las Memorias correspondientes se encuentra en la Biblioteca de la Fundación (Castello, 77. Madrid-6).

La lista completa de los trabajos aprobados se presenta, en forma de fichas, en los Cuadernos Bibliográficos que publica la Fundación Juan March.

Estos trabajos abarcan las siguientes especialidades: Arquitectura y Urbanismo; Artes Plásticas; Biología; Ciencias Agrarias; Ciencias Sociales; Comunicación Social; Derecho; Economía; Filosofía; Física; Geología; Historia; Ingeniería; Literatura y Filología; Matemáticas; Medicina, Farmacia y Veterinaria; Música; Química; Teología. A ellas corresponden los colores de la cubierta.

Edición no venal de 300 ejemplares,
que se reparte gratuitamente a investigadores,
Bibliotecas y Centros especializados de toda España.

Este trabajo fue realizado con una Beca de España, 1975, individual.
Departamento de Filosofía.
Centro de trabajo: Facultad de Filosofía. Universidad Central. Barcelona.

Fundación Juan March

FJM-Uni 62-Man
Sistemas intermedios /
Manzano Arjona, María Gracia.
1031739
Biblioteca FJM

SERIE UNIVERSITARIA

Fundación Juan March

Sistemas intermedios

María Manzano Arjona

Sistemas intermedios/María Manzano Arjona

FJM
Uni-
62
Man
62

Fundación Juan March (Madrid)

Fundación Juan March (Madrid)

Fundación Juan March
Serie Universitaria
62

Sistemas intermedios

María Manzano Arjona

FUNDACION JUAN MARCH
EX-LIBRIS

Fundación Juan March
Castelló, 77. Teléf. 225 44 55
Madrid - 6

Fundación Juan March (Madrid)

La Fundación Juan March no se solidariza necesariamente con las opiniones de los autores cuyas obras publica.

Depósito Legal: M - 21369 - 1978
I.S.B.N. 84 - 7075 - 092 - 5
Ibérica, Tarragona 34 - Madrid - 7

Fundación Juan March (Madrid)

INDICE

	Página
SISTEMAS INTERMEDIOS	1
1. Sistemas	9
2. Interpretaciones	10
3. Denotación y satisfacción	11
4. Sistemas generales	13
5. Sistemas intermedios	14
6. La relación de identidad en los sistemas intermedios	17
7. Teorema	22
8. Algebras de Boole	24
9. Cardinalidad de los universos A_n en sistemas intermedios	26
10. Sistemas generales no intermedios	28
BIBLIOGRAFIA	31

Fundación Juan March (Madrid)

Fundación Juan March (Madrid)

SISTEMAS INTERMEDIOS

La lógica de segundo orden se caracteriza por la utilización de variables cuantificables que se refieren a relaciones. Si aceptamos como origen próximo de la lógica el trabajo de Frege, diremos que las nociones primeras sobre lógica de segundo orden se desarrollan en los inicios de la lógica. Efectivamente, al introducir su notación cuantificacional en la primera parte de Begriffsschrift, Frege plantea la doble opción de usar variables que se refieran a individuos o a relaciones. Sin embargo, la separación efectiva entre la lógica de primer orden y la de segundo orden, aunque implícita en la teoría de los tipos de Russell, no se consolida hasta el trabajo de Hilbert y Ackermann.

La cuantificación sobre variables relacionales confiere a estos formalismos una gran potencia expresiva. Para ilustrar este incremento de poder expresivo, supongamos que nuestras variables individuales varían sobre los números naturales. En la lógica de primer orden no podemos decir que para cada dos propiedades de los naturales existe otra propiedad que cumplen aquellos naturales que verifican la primera de las propiedades y no verifican la segunda. Sin embargo, en la lógica de segundo orden podemos formalizar este pensamiento como si

Fundación Juan March (Madrid)

gue:

$$\bigwedge X\, Y \bigvee Z \bigwedge x\, (Z\, x \leftrightarrow X\, x \wedge \neg\, Y\, x)$$

Varias importantes teorías matemáticas tales como la aritmética natural y el álgebra real se formalizan adecuadamente en segundo orden. En efecto, debido a la capacidad expresiva de esta lógica, el principio de inducción natural puede formalizarse así:

$$\bigwedge Z\, (Z\, o \wedge \bigwedge x\, (Z\, x \rightarrow Z\, s\, x) \rightarrow \bigwedge x\ Z\, x)$$

Aparte del interés histórico que tiene el poder expresar un principio explícitamente formulado y usado por Pascal, la formalización en segundo orden de este principio posee ventajas en sí misma. Me estoy refiriendo a la fuerza de la cuantificación sobre todos los conjuntos de números naturales. En primer orden, usando un número infinito de axiomas, no se consigue dar tanta generalidad; de hecho, sólo nos podemos referir a los conjuntos de naturales definibles mediante fórmulas de primer orden.

Por otra parte, si N es la aritmética de Peano de segundo orden, se puede demostrar que todos los sistemas standard de segundo orden que sean modelos de N son isomorfos. Es decir, N constituye un conjunto de fórmulas categórico. Sin embargo, la aritmética de Peano de primer orden no es categórica.

De forma similar, el álgebra de los reales es expresable categóricamente y mediante sólo un número finito de axiomas en segundo orden. Por supuesto, estos resultados son inconseguibles en primer orden. Estas importantes diferencias entre teorías de primero y segundo orden existen no sólo en los casos citados de la aritmética y el álgebra, sino también

Fundación Juan March (Madrid)

en los de otras teorías matemáticas entre las que se cuentan varias teorías de geometría.

Otro aspecto en el que las teorías de segundo orden son superiores a las de primer orden es que, a causa del aumento de capacidad expresiva, algunos conceptos tomados como primitivos en la lógica de primer orden pueden introducirse por definición en la de segundo orden. Tal es el caso de la igualdad que en segundo orden puede definirse formalizando el principio de identidad de los indiscernibles de Leibniz. En segundo orden tenemos una doble opción. Podemos introducir la igualdad del mismo modo que en primer orden; es decir, añadiendo una constante predicativa binaria que denote la relación de identidad. Podemos también definir $\underline{x} = \underline{y}$ mediante la fórmula

$$\wedge \underline{Y}\ (\underline{Y}\ \underline{x} \leftrightarrow \underline{Y}\ \underline{y})$$

En los sistemas standard esta fórmula es satisfecha siempre que y sólo cuando las denotaciones de las variables libres $\underline{x}$ e $\underline{y}$ coincidan. Esto significa que en los sistemas standard la denotación de la constante "=" es la prototípica relación de identidad. Es decir, la relación que mantiene un objeto consigo mismo y que falla con cualquier otro objeto.

Por otra parte, en la lógica de segundo orden podemos hacer uso del abstractor. El signo λ de abstracción fué introducido por Church y permite construir predicados a partir de fórmulas. El concepto de abstracción de clases y relaciones, aunque haciendo uso de una notación menos cómoda, fue extensamente usado por Frege. Russell y Whitehead también lo utilizaron en los Principia.

Fundación Juan March (Madrid)

Es también interesante observar cómo en los formalismos de segundo orden con abstracción se lleva a cabo una antigüa aspiración. Me refiero a la posibilidad de construir un cálculo lógico de segundo orden usando como únicos conceptos primitivos los de identidad y abstracción. En efecto, ya en 1923 Tarski planteó la cuestión. Más tarde Quine obsevó que los cuantificadores podían ser definidos en función de la igualdad en un formalismo que contuviera el abstractor. Por ejemplo, si $\lambda \underline{x}\, \varphi(\underline{x})$ es el predicado monario obtenido por abstracción a partir de la fórmula $\varphi(\underline{x})$, entonces podemos definir $\lambda \underline{x}\, \varphi(\underline{x})$ mediante: $\lambda x\, \varphi(x) = \lambda x \quad x = x$

El desarrollo completo de un cálculo lógico con estos únicos conceptos primitivos se lo debemos a Henkin.

Con el paso del tiempo, la identidad se ha reafirmado en su posición de concepto base. A ello hay que sumar su importancia histórica en el desarrollo de la lógica. En cualquier punto de este desarrollo en que nos situemos -piénsese en Aristóteles, Leibniz, Frege, Tarski, Quine o Henkin- encontraremos precisiones y utilizaciones de este concepto. Y como hemos señalado, la realización de las aspiraciones centradas en la igualdad pasa por el uso de la cuantificación sobre variables predicativas; es decir, por la lógica de segundo orden.

A pesar de todas estas ventajas evidentes de la lógica de segundo orden sobre la de primer orden, existe una gran desventaja: la de segundo orden es incompleta en un sentido muy importante. Es decir, la clase de las sentencias válidas en todo sistema standard no coincide con la de las sentencias dedu

Fundación Juan March (Madrid)

cibles sin premisas en el cálculo; hay fórmulas lógicamente válidas que no son teoremas lógicos.

El problema es que la lógica de segundo orden no sólo es incompleta, sino incompletable: no se pueden añadir axiomas y reglas de inferencia hasta hacer coincidir la clase de las fórmulas lógicamente válidas con la de los teoremas lógicos. Estos resultados se siguen a partir del trabajo de Gödel. Concretamente, Gödel probó que la identificación de fórmulas verdaderas de la aritmética con fórmulas formalmente derivables de los axiomas de Peano era insostenible y también, que si existiera una prueba de consistencia tal como Hilbert la planteaba, entonces la aritmética sería incompleta.

Debido en parte al problema de la incompletud, los formalismos de segundo orden no han sido muy estudiados. Sin embargo, recientemente se observa un incremento de la atención prestada a éstos y a formalismos cuya capacidad expresiva se sitúa entre el primero y el segundo orden. Estos estudios quedan englobados en el ámbito de la teoría de modelos.

En la lógica actual muchas de las cuestiones estudiadas son de la forma: ¿Tiene una cierta estructura matemática una propiedad dada? En la teoría de modelos se estudian todas las propiedades, o mejor, una restringida pero extensa clase de propiedades. Normalmente, estas propiedades se pueden expresar en un cierto lenguaje. Por ejemplo, la propiedad de ser un grupo o de ser un grupo abeliano son expresables en un lenguaje de primer orden. Entonces, en vez de decir que el grupo G es abeliano, podemos decir que es un modelo de la sentencia de primer orden $\wedge\, x\, y \quad f\, x\, y = f\, y\, x$

Fundación Juan March (Madrid)

Sucede que existen resultados aplicables a todas las propiedades expresables en primer orden. Estos resultados se basan en el modo especial en que las propiedades se expresan; es decir, en los lenguajes de primer orden.

Algunos de los resultados son muy convenientes; por ejemplo, los teoremas de completud, compacidad y el de Löwenheim-Skolem. Este último data de 1915, fecha en la que Löwenheim probó que si una teoría finitamente axiomatizable tenia un modelo, entonces tenía un modelo numerable. Más tarde Skolem lo extendió a teorías numerables. Otras remodelaciones y extensiones del teorema se deben a Tarski y a Henkin. El teorema de completud fué demostrado por Gödel y más tarde, en 1950 Henkin dió una nueva versión del mismo.

A pesar de todas estas ventajas de los formalismos de primer orden y de que por supuesto se pueden decir cosas interesantes en ellos, la lógica de primer orden no es suficientemente expresiva, no sirve de lenguaje universal para toda la matemática. De hecho, sólo pueden ser descritas categóricamente mediante sentencias de primer orden las estructuras finitas.

Es natural por tanto, investigar otros lenguajes más expresivos. Convendría que los nuevos lenguajes conservaran en lo posible las ventajas de los de primer orden; es decir, que se cumplieran para ellos los teoremas antes citados. Esto a veces resulta imposible pues algunas de las ventajas llevan como consecuencia la merma del poder expresivo. Concretamente esto es lo que sucede en el caso de los teoremas de compacidad y de Löwenheim-Skolem respecto de

Fundación Juan March (Madrid)

la imposibilidad de caracterizar estructuras infinitas mediante axiomas categóricos. Por tanto, uno tiene que elegir qué virtudes le interesa preservar.

En el caso de la lógica de segundo orden se puede demostrar un teorema débil de completud. En 1950 Henkin mostró que existe una cierta completud para la teoría de los tipos siempre que se admitan nociones no clásicas de verdad. Se trata de ampliar el concepto de modelo a fin de poder extraer de entre las sentencias verdaderas en el sentido clásico o standard, aquellas que son formalmente probables en el cálculo. Las sentencias válidas de los nuevos modelos son deducibles en el cálculo; es decir, la teoría de los tipos es completa respecto de estos modelos.

La definición de los nuevos modelos no es constructiva, no proporciona un procedimiento algebraico que permita construirlos. Este problema está en el núcleo de mi investigación.

Para caracterizar algebraicamente a los sistemas generales es preciso traducir en requisitos de dicha naturaleza algebraica la condición de posibilidad o existencia en ellos de todas las relaciones definibles en estos sistemas. Los requisitos definitivos, caso de existir, serían los que permitiesen probar la semejanza total de los sistemas construídos mediante ellos con los sistemas generales.

El problema de la caracterización algebraica de todos los sistemas generales no parece tener una solución fácil. En efecto, según se desprende del trabajo de Jon Barwise, Admissible Sets and Structures, no es siempre el caso de que la intersección de sistemas generales sea así mismo un sistema general.

Fundación Juan March (Madrid)

De esto modo, se descarta al candidato natural que sería precisamente esta intersección.

Sin embargo, he demostrado que existe una extensa clase de sistemas generales, a los que llamo sistemas intermedios, que pueden ser definidos algebraicamente. Para hacerlo utilizo cinco reglas. En los sistemas intermedios se cumplen las obvias expectativas; por ejemplo, si $\langle A, \langle A_n \rangle_{n \in N} \ldots \rangle$ es un sistema intermedio, y si $X \in A_1$, entonces $A - X \in A_1$ y si $X, Y \in A_1$, entonces $X \cap Y \in A_1$. También, si $X \in A_2$, entonces su inversa está en A_2 y su dominio primero está en A_1.

Una vez presentados los sistemas intermedios, pruebo que son generales. Es decir, que si $\mathcal{A}$ es un sistema intermedio, entonces todas las relaciones definibles en $\mathcal{A}$ son posibles en $\mathcal{A}$.

Pruebo además una serie de teoremas que me sirven para demostrar la cardinalidad de los universos A_n de un sistema intermedio. Los resultados que arrojan dichos teoremas califican a los A_n como álgebras de Boole completas y atómicas que cumplen además ciertas condiciones suplementarias. Estas condiciones relacionan entre sí los universos de distinto número ario.

Se sigue del hecho de que los universos A_n sean álgebras de Boole completas y atómicas, el que sean conjuntos finitos o supernumerables, pero no numerables. Es por esto por lo que no todos los sistemas generales son intermedios. En efecto, el sistema general del teorema de completud de Henkin tiene uni

Fundación Juan March (Madrid)

versos relacionales numerables.

1. Sistemas

1.1. Definición

Σ es un sistema si y sólo si

$$\Sigma = \langle S, \langle S_n \rangle_{n \in N}, \langle\langle c_i \rangle_{i \in I}, \langle R_j \rangle_{j \in J} \rangle\rangle$$

dónde:

i $S \neq \emptyset$ es el universo del sistema.

ii $\langle S_n \rangle_{n \in N}$ es una familia numerable de universos relacionales no vacíos. Para cada natural n, $S_n \subset P(S^n)$.

iii $\langle c_i \rangle_{i \in I}$ es una sucesión de elementos de S.

iv $\langle R_j \rangle_{j \in J}$ es una sucesión de relaciones definidas sobre S. Estas relaciones están ordenadas a su vez por la sucesión creciente de números naturales $\langle n_j \rangle_{j \in J}$. Para cada $j \in J$, R_j es una relación n_j-aria definida sobre S.

v Para cada $j \in J$: $R_j \in S_{n_j}$.

vi Para cada $i \in I$: $\{c_i\} \in S_1$.

Fundación Juan March (Madrid)

Nota: Σ es un sistema de tipo $\langle I , \langle n_j \rangle_{j \in J} \rangle$

1.2. Sistemas standard y no-standard.

Σ es un sistema standard si y sólo si para cada $n \in N$: $S_n = P(S^n)$.

Σ es un sistema no-standard si y sólo si para algún $n \in N$: $S_n \neq P(S^n)$

2. Interpretaciones

2.1. Definición

Sea $\mathcal{L}$ un formalismo de segundo orden cuyos signos peculiares están ordenados, $\langle \langle \underline{c}_i \rangle_{i \in I} \langle \underline{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$. Sea Σ un sistema del mismo tipo que $\mathcal{L}$.

$\mathcal{J}$ es una interpretación de $\mathcal{L}$ definida sobre Σ si y sólo si $\mathcal{J}$ es una función tal que:

i A cada variable individual $\mathcal{J}$ le asigna un individuo de S.

ii A cada variable predicativa n-aria del formalismo $\mathcal{J}$ le asigna una relación n-aria del universo S_n.

Fundación Juan March (Madrid)

iii Para cada $i \in I$: $\mathcal{J}(\underline{c}_i) = c_i$.

iv Para cada $j \in J$: $\mathcal{J}(\underline{R}_j) = R_j$.

2.2. Interpretación $\underline{v}$-variante de una dada.

Sea $\mathcal{J}$ una interpretación sobre $\mathcal{E}$, $\underline{v}$ una variable de $\mathcal{L}$ (individual o predicativa) y v un elemento de $\mathcal{E}$ (v es un individuo de S si $\underline{v}$ es una variable individual y v es una relación de S_n si $\underline{v}$ es una variable predicativa n-aria).

Df. $\mathcal{J}^{v}_{\underline{v}} = (\mathcal{J} - \{\langle \underline{v}, \mathcal{J}(\underline{v})\rangle\}) \cup \{\langle \underline{v}, v\rangle\}$

3. Denotación y satisfacción.

Dado un sistema $\mathcal{E}$ de universo S y una interpretación $\mathcal{J}$ definida sobre $\mathcal{E}$, cada término de $\mathcal{L}$ denota un individuo de S , cada predicado n-ario de $\mathcal{L}$ una relación n-aria definida sobre S -Es decir, un subconjunto de S^n- y cada fórmula de $\mathcal{L}$ es satisfecha o no por $\mathcal{J}$.

Notación:

Para indicar que $\underline{t}$ denota x en $\mathcal{E}$ mediante $\mathcal{J}$ es-

Fundación Juan March (Madrid)

cribo $\mathfrak{J}(\underline{t}) = x$.

Para indicar que $\underline{P}^n$ denota X^n en $\mathfrak{S}$ mediante $\mathfrak{J}$ escribo $\mathfrak{J}(\underline{P}^n) = X^n$.

Para indicar que φ es satisfecha por $\mathfrak{J}$ en $\mathfrak{S}$ escribo $\mathfrak{J}$ sat φ .

Df. -Por inducción semiótica-

$\mathfrak{J}(\underline{x}) = \mathfrak{J}(\underline{x})$

$\mathfrak{J}(\underline{c}_i) = c_i$, para cada $i \in I$

$\mathfrak{J}(\underline{X}^n) = \mathfrak{J}(\underline{X}^n)$

$\mathfrak{J}(\underline{R}_j) = R_j$, para cada $j \in J$

$\mathfrak{J}$ sat $\underline{P}^n \underline{t}_1 \dots \underline{t}_n$ syss $\langle \mathfrak{J}(\underline{t}_1) \dots \mathfrak{J}(\underline{t}_n) \rangle \in \mathfrak{J}(\underline{P}^n)$

$\mathfrak{J}$ sat $\neg \varphi$ syss no $\mathfrak{J}$ sat φ

$\mathfrak{J}$ sat $\alpha \wedge \beta$ syss $\mathfrak{J}$ sat α y $\mathfrak{J}$ sat β

$\mathfrak{J}$ sat $\alpha \vee \beta$ syss $\mathfrak{J}$ sat α o $\mathfrak{J}$ sat β

$\mathfrak{J}$ sat $\alpha \rightarrow \beta$ syss si $\mathfrak{J}$ sat α , entonces $\mathfrak{J}$ sat β

$\mathfrak{J}$ sat $\alpha \leftrightarrow \beta$ syss $\mathfrak{J}$ sat α syss $\mathfrak{J}$ sat β

$\mathfrak{J}$ sat $\bigwedge \underline{z} \varphi$ syss para cada $z \in S$: $\mathfrak{J}^z_{\underline{z}}$ sat φ

$\mathfrak{J}$ sat $\bigvee \underline{z} \varphi$ syss para algún $z \in S$: $\mathfrak{J}^z_{\underline{z}}$ sat φ

$\mathfrak{J}$ sat $\bigwedge \underline{Z}^n \varphi$ syss para cada $Z^n \in S_n$: $\mathfrak{J}^{Z^n}_{\underline{Z}^n}$ sat φ

Fundación Juan March (Madrid)

$\mathcal{J}$ sat $\bigvee \underline{Z}^n \varphi$ syss para algún $Z^n \in S_n$: $\mathcal{J}^{Z^n}_{\underline{Z}^n}$ sat φ

$\mathcal{J}(\lambda \underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n \varphi) = \{\langle x_1 \ldots x_n \rangle / \mathcal{J}^{x_1 \ldots x_n}_{\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n}$ sat $\varphi\}$

4. Sistemas generales.

No todos los sistemas proporcionan una base correcta para interpretar $\mathcal{L}$. El problema reside en que dado un sistema y una interpretación, los predicados n-arios de $\mathcal{L}$ denotan subconjuntos de S^n, pero no necesariamente elementos del universo S_n del sistema. Este es el problema que se pretende evitar al introducir los sistemas generales.

4.1. Relaciones definibles en un sistema.

Sea $\mathfrak{S}$ un sistema del mismo tipo que $\mathcal{L}$.

Df. $R \subset S^n$ es una relación definible en $\mathfrak{S}$ si y sólo si existe una fórmula φ de $\mathcal{L}$, distintas variables individuales $\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n$ y una interpretación $\mathcal{J}$ sobre $\mathfrak{S}$ tal que:

$$\mathcal{J}(\lambda \underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n \varphi) = R$$

Df. $\mathfrak{S}$ es un sistema general si y sólo si para cada $\mathcal{J}$ sobre $\mathfrak{S}$, para cada $\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n$ distintas y para cada φ de $\mathcal{L}$, en dónde las variables individuales libres son a lo sumo $\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n$, se verifica:

$$\mathcal{J}(\lambda \underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n \varphi) \in S_n$$

Fundación Juan March (Madrid)

5. Sistemas intermedios

5.1. Definición

Nota: Los signos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$,

-Negador, conyunctor, disyunctor, condicionador, bicondicionador, generalizador, particularizador-

son usados aquí como paráfrasis de las posibles expresiones correspondientes del castellano.

$\mathcal{A} = \langle A, \langle A_n \rangle_{n \in N} \langle \langle c_i \rangle_{i \in I} \langle R_j \rangle_{j \in J} \rangle \rangle$ es un sistema intermedio si y sólo si:

i $\forall n X (n \in N \wedge X \in A_n \Rightarrow A^n - X \in A_n)$

ii $\forall n p X (n \in N - \{1\} \wedge p \in \{0, 1, \ldots n-1\} \wedge X \in A_n \Rightarrow \{\langle x_1 \ldots x_{n-p} \rangle / \exists z_1 \ldots z_p \langle x_1 \ldots x_{n-p} z_1 \ldots z_p \rangle \in X\} \in A_{n-p})$

iii $\forall n X (n \in N \wedge X \in A_n \Rightarrow X \times A \in A_{n+1})$

iv $\forall n X \varphi (n \in N - \{1\} \wedge X \in A_n \wedge \varphi \in S_n \Rightarrow \{\langle x_1 \ldots x_n \rangle / \langle x_{\varphi(1)} \ldots x_{\varphi(n)} \rangle \in X\} \in A_n)$

v $\forall n D (n \in N \wedge D \subset A_n \Rightarrow \cup D \in A_n)$

5.2. Teoremas.

Fundación Juan March (Madrid)

Nota: En cada uno de los teoremas siguientes, que cito sin pruebas $\langle A, \langle A_n \rangle_{n\in N} \dots \rangle$ es un sistema intermedio.

5.2.1. $\forall n\, D\, (n\in N \wedge D \subset A_n \Rightarrow \bigcap D \in A_n)$

5.2.2. $\forall n\, X\, Y\, (n\in N \wedge X,Y \in A_n \Rightarrow X \cap Y \in A_n)$

5.2.3. $\forall n\, X\, Y\, (n\in N \wedge X,Y \in A_n \Rightarrow X \cup Y \in A_n)$

5.2.4. $\forall n\, (n\in N \Rightarrow A^n \in A_n)$

5.2.5. $\forall n\, (n\in N \Rightarrow \emptyset \in A_n)$

5.2.6. $\forall n\, X\, Y\, (n\in N \wedge X,Y \in A_n \Rightarrow X - Y \in A_n)$

5.2.7. $\forall n\, X\, Y\, (n\in N \wedge X,Y \in A_n \Rightarrow X \rightsquigarrow Y \in A_n)$
dónde $X \rightsquigarrow Y = A^n - (X - Y)$

5.2.8. $\forall n\, X\, Y\, (n\in N \wedge X,Y \in A_n \Rightarrow X \leftrightsquigarrow Y \in A_n)$
dónde $X \leftrightsquigarrow Y = (X \rightsquigarrow Y) \cap (Y \rightsquigarrow X)$

5.2.9. $\forall n\, p\, X\, (n\in N - \{1\} \wedge X \in A_n \wedge p\in\{0,1,\dots n-1\} \wedge \langle i_1 \dots i_p \rangle \in \{1 \dots n\}^p \wedge i_1 < \dots < i_p \Longrightarrow$

Fundación Juan March (Madrid)

$$\{\langle x_1 \dots x_{i_1 - 1}\ x_{i_1 + 1} \dots x_{i_p - 1}\ x_{i_p + 1} \dots x_n \rangle / \exists z_1 \dots z_p \langle x_1 \dots x_{i_1 - 1}\ z_1\ x_{i_1 + 1} \dots x_{i_p - 1}\ z_p\ x_{i_p + 1} \dots x_n \rangle \in X \} \in A_{n-p})$$

5.2.10. $\forall n\, m\, X\, Y\ (n, m \in N \wedge X \in A_n \wedge Y \in A_m \Rightarrow X \times Y \in A_{n+m})$

5.3. Ejemplos de sistemas intermedios que no son standard.

Ejemplo 1. $\mathcal{A} = \langle A, \langle A_n \rangle_{n \in N} \rangle$ dónde para cada $n \in N$, $A_n = \{\emptyset\ A^n\}$

Ejemplo 2. Sea N el conjunto de los números naturales menos el cero.
Sea G el conjunto de todas las permutaciones sobre los naturales. Es decir, de todas las bifunciones $g : N \longrightarrow N$.
Sea G_k el conjunto de todas las permutaciones sobre los números naturales que dejan fijos $1, 2, \dots, k$.

Es decir,

$$G_k = \{ g \in G / \forall n\ (n \in \{1 \dots k\} \Rightarrow g(n) = n)$$

Para cada $X \in P(N^n)$ y para cada $g \in G$, se define $g(X) \in P(N^n)$ del siguiente modo:

Fundación Juan March (Madrid)

$g(X) = \{ \langle g(x_1) \dots g(x_n) \rangle \ / \ \langle x_1 \dots x_n \rangle \in X \}$

Por otra parte, $X \in P(N^n)$ es G_k-invariante si y sólo si $X = g(X)$ para cada $g \in G_k$.

Para cada $n \in N$, $A_n^{(k)}$ es el conjunto de las relaciones n-arias sobre N que son G_k-invariantes.

Proposición: $\mathcal{A}^{(k)} = \langle N, \langle A_n^{(k)} \rangle_{n \in N} \rangle$ es un sistema intermedio

6. La relación de identidad en los sistemas intermedios.

En los formalismos de segundo orden se suele introducir la identidad mediante la definición

$$\underline{x} = \underline{y} \leftrightarrow_{Df} \bigwedge \underline{Z} \ (\underline{Z}\ \underline{x} \leftrightarrow \underline{Z}\ \underline{y}).$$

La identidad del formalismo, o lo que es lo mismo, el predicado $\lambda\, \underline{x}\, \underline{y} \bigwedge \underline{Z} \ (\underline{Z}\ \underline{x} \leftrightarrow \underline{Z}\ \underline{y})$, denota en cada sistema una relación binaria a la que llamo identidad del sistema. En los sistemas sin adjetivos esta relación pudiera no pertenecer al universo de relaciones binarias. Sin embargo, en los sistemas intermedios, la identidad del sistema está en el universo de relaciones binarias.

En efecto, si $\mathcal{A} = \langle A, \langle A_n \rangle_{n \in N} \dots \rangle$ es un sistema intermedio y $\mathcal{J}$ una interpretación sobre $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{J}(\lambda\, \underline{x}\, \underline{y} \bigwedge \underline{Z} \ (\underline{Z}\ \underline{x} \leftrightarrow \underline{Z}\ \underline{y})) =$

$$= \bigcap_{Z \in A_1} (Z^2 \cup (A - Z)^2) \in A_2$$

Fundación Juan March (Madrid)

La relación de identidad de un sistema intermedio puede diferir de la prototípica relación de identidad; es decir, de la relación que mantiene un objeto consigo mismo y que falla con cualquier otro objeto.

En el ejemplo 1 de sistema intermedio, siempre que A no sea una clase unitaria, la relación de identidad del sistema será distinta de la identidad prototípica.

En este sistema para cada $\mathfrak{F}$ sobre $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{F} \text{ sat } \bigwedge \underline{Z}\ (\underline{Z}\ \underline{x} \longleftrightarrow \underline{Z}\ \underline{y})$$

incluso cuando $\mathfrak{F}(\underline{x}) = 1$ y $\mathfrak{F}(\underline{y}) = 2$

De forma parecida, en el ejemplo 2 de sistema intermedio la relación de identidad del sistema es

$$\{\langle x\ x\rangle / x \leq k\} \cup (N - \{1 \ldots k\})^2$$

Fácilmente se comprueba que esta relación es G_k-invariante y que por tanto está en el universo de relaciones binarias del sistema.

En este sistema se verifica que si $\mathfrak{F}$ es una interpretación sobre él, $\mathfrak{F}$ sat $\bigwedge \underline{Z}\ (\underline{Z}\ \underline{x} \longleftrightarrow \underline{Z}\ \underline{y})$ incluso cuando $\mathfrak{F}(\underline{x}) \neq \mathfrak{F}(\underline{y})$ siempre que $\mathfrak{F}(\underline{x})$ e $\mathfrak{F}(\underline{y})$ sean mayores que k.

6.1. Sistemas intermedios con identidad.

A algunos, entre los que me cuento, puede molestarles el hecho de que en muchos sistemas intermedios la identidad del sistema difiera de la identidad prototípica. Se me ocurren dos soluciones para este problema.

Fundación Juan March (Madrid)

La primera consiste en introducir la igualdad del mismo modo que en primer orden; es decir, como concepto primitivo, haciendo que el relator diádico = esté entre las constantes del formalismo y estipulando reglas de uso de este signo. En la interpretación del formalismo se postulará que si $\mathcal{A}$ es un sistema y $\mathcal{J}$ una interpretación sobre $\mathcal{A}$, $\mathcal{J}$ sat $\underline{x} = \underline{y}$ si y sólo si $\mathcal{J}(\underline{x}) = \mathcal{J}(\underline{y})$. Los sistemas intermedios con identidad adecuados a estos formalismos, sólo se diferencian de los sistemas intermedios en que la prototípica relación de identidad está en el universo de relaciones binarias.

Otra solución es introducir la igualdad mediante la definición

$$\underline{x} = \underline{y} \leftrightarrow_{Df} \bigwedge \underline{Z}^2 (\bigwedge \underline{u}\ \underline{Z}^2 \underline{u}\ \underline{u} \rightarrow \underline{Z}^2 \underline{x}\ \underline{y})$$

y utilizar sistemas intermedios con identidad.

Si $\mathcal{A}$ es un sistema intermedio tal que

$$\{\langle x\ y\rangle \in A^2 / x = y\} \in A_2$$

y $\mathcal{J}$ una interpretación sobre $\mathcal{A}$, entonces

$$\mathcal{J} \text{ sat } \bigwedge \underline{Z}^2 (\bigwedge \underline{u}\ \underline{Z}^2 \underline{u}\ \underline{u} \rightarrow \underline{Z}^2 \underline{x}\ \underline{y})$$
$$\text{syss } \mathcal{J}(\underline{x}) = \mathcal{J}(\underline{y})$$

6.1.1. Definición.

$\mathcal{A}$ es un sistema intermedio con identidad si y sólo si $\mathcal{A}$ es un sistema intermedio y

vi $\bigwedge n\ (n \in N \Rightarrow \{\langle x_1 \ldots x_n\rangle \in A^n / x_1 = \ldots = x_n\} \in A_n)$

Fundación Juan March (Madrid)

Es decir, las diagonales de las potencias de A son posibles en $\mathcal{A}$.

6.2. Ejemplos de sistemas intermedios con identidad.

Ejemplo 1. Sea $A = \{ 1,2 \}$

Sea $h : A \longrightarrow A$

$1 \longrightarrow 2$

$2 \longrightarrow 1$

Para cada $X \subset A^n$, $h(X) =$

$$= \{ \langle h(x_1) \ldots h(x_n) \rangle \; / \; \langle x_1 \ldots x_n \rangle \in X \}$$

El sistema $\mathcal{A} = \langle A, \langle A_n \rangle_{n \in N} \rangle$ dónde para cada $n \in N$, $A_n = \{ X \subset A^n \; / \; X = h(X) \}$ es un sistema intermedio con identidad.

Ejemplo 2. El sistema $\mathcal{A} = \langle A, \langle A_n \rangle_{n \in N} \rangle$ del ejemplo 2 de 5.3. es un sistema intermedio con identidad.

Este sistema es intermedio y posee la identidad. Sin embargo, pese a poseerla,

$\exists (\lambda \underline{x}\, \underline{y} \; \wedge \underline{Z} (\underline{Z}\, \underline{x} \longleftrightarrow \underline{Z}\, \underline{y}))$ no es la identidad. Todo depende de cómo se introduzca la igualdad en el formalismo.

6.3. Notaciones y teoremas.

Como se ha visto, depende de cómo se introduzca la

Fundación Juan March (Madrid)

igualdad en el formalismo y de si el sistema intermedio posee o no la identidad, el que

$\mathcal{F}\,(\lambda\, \underline{x}\, \underline{y} \quad \underline{x} = \underline{y})$ sea o no la identidad prototípica.

Sin embargo, utilizaré la notación unificada I_{A^2} para hacer referencia a la relación binaria

$\mathcal{F}\,(\lambda\, \underline{x}\, \underline{y} \quad \underline{x} = \underline{y})$ siendo $\mathcal{A}$ un sistema y $\mathcal{F}$ una interpretación sobre $\mathcal{A}$.

En los casos en que $\underline{x} = \underline{y}$ sea una fórmula del formalismo $\mathcal{L}$ en dónde la igualdad se introduce mediante $\wedge\, \underline{Z}\, (\underline{Z}\, \underline{x} \leftrightarrow \underline{Z}\, \underline{y})$ y $\mathcal{A}$ sea un sistema intermedio, $I_{A^2} = \bigcap_{Z \in A_1} (Z^2 \cup (A - Z)^2)$.

Cuando $\underline{x} = \underline{y}$ sea una fórmula de un formalismo de segundo orden con igualdad o en dónde la ingualdad se introduce mediante

$\wedge\, \underline{Z}^2\, (\wedge\, \underline{u} \quad \underline{Z}^2\, \underline{u}\, \underline{u} \rightarrow \underline{Z}^2\, \underline{x}\, \underline{y})$ y $\mathcal{A}$ sea un sistema intermedio con identidad,

$$I_{A^2} = \{ \langle x\ y \rangle \in A^2 \ / \ x = y \}$$

De forma similar, introduzco la notación I_{A^n} para hacer referencia a la relación n-ádica

$\mathcal{F}\,(\lambda\, \underline{x}_1 \ldots\, \underline{x}_n \quad \underline{x}_1 = \underline{x}_2 \wedge \ \ldots \wedge\, \underline{x}_{n-1} = \underline{x}_n)$

6.3.1. $\forall\, n\ p\ X\ (n \in N - \{1\} \wedge X \in A_n \wedge\ p \in$

$\in \{0,1,\ldots,n-1\} \wedge \langle i_1 \ldots\, i_p \rangle \in \{1 \ldots\, n\}^p \wedge\ i_1 < \ldots$

Fundación Juan March (Madrid)

$$\ldots < i_p \wedge < j_1 \ldots j_p > \in (\{1 \ldots n\} - \{i_1 \ldots i_p\})^p \Rightarrow$$
$$\{< x_1 \ldots x_n > / < x_1 \ldots x_n > \in X \wedge \forall s\ (s \in \{1 \ldots p\}$$
$$\Rightarrow < x_{i_s}\ x_{j_s} > \in I_{A^2})\} \in A_n)$$

6.3.2. $\forall n\ p\ X\ (n \in N - \{1\} \wedge X \in A_n \wedge p \in$
$\in \{0, 1, \ldots, n-1\} \wedge < i_1 \ldots i_p > \in \{1 \ldots n\}^p$
$\wedge\ i_1 < \ldots < i_p \wedge < j_1 \ldots j_p > \in (\{1 \ldots n\} -$
$- \{i_1 \ldots i_p\})^p \Rightarrow$
$\{< x_1 \ldots x_{i_1 - 1}\ x_{i_1 + 1} \ldots x_{i_p - 1}\ x_{i_p + 1} \ldots x_n > /$
$\exists z_1 \ldots z_p < x_1 \ldots x_{i_1 - 1}\ z_1\ x_{i_1 + 1} \ldots x_{i_p - 1}\ z_p$
$x_{i_p + 1} \ldots x_n > \in X \wedge \forall s\ (s \in \{1 \ldots p\} \Rightarrow$
$< z_s\ x_{j_s} > \in I_{A^2})\} \in A_{n-p})$

Para hacer referencia a esta relación escribo:

$$PROY_{< i_1 \ldots i_p >}\ I^{< j_1 \ldots j_p >}\ X$$

7. Teorema.

Si $\mathcal{A}$ es un sistema intermedio, entonces para cada $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{A}$, para cada $\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n$ distintas y para cada φ de $\mathcal{L}$ en dónde las variables indivi-

Fundación Juan March (Madrid)

duales libres son a lo sumo $\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n$, se verifica:

$$\mathcal{F}(\lambda \underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n \varphi) \in A_n$$

Con este teorema demuestro que la clase de los sistemas intermedios es un subconjunto de la de los generales.

La demostración es por inducción semiótica sobre la construcción de fórmulas.

En el caso de fórmulas simples consideramos toda la posible complicación que pueda darse en ellas; que aparezcan constantes, que algunas variables estén repetidas y que la secuencia de aparición de las variables $\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n$ como términos de la fórmula simple sea distinta de la marcada por los subíndices $1, \ldots n$. La pertenencia a A_n de la relación $\mathcal{F}(\lambda \underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n \varphi)$, cuando φ es una fórmula simple, se sigue de la definición de los sistemas intermedios y de los teoremas algebraicos que se cumplen en ellos; en especial, de la regla iv de 5.1. y de los teoremas 5.2.10. y 6.3.2.

Por otra parte, si el teorema se cumple para una fórmula φ , es fácil probar que también se cumple para $\neg\varphi$ usando la regla i de 5.1. Si el teorema se cumple para fórmulas cualesquiera α y β , también se cumple para su conyunción, disyunción, condicional y bicondicional. Se usarán respectivamente, los teoremas 5.2.2., 5.2.3., 5.2.7. y 5.2.8.

Por último, si el teorema se cumple para φ , también se cumple para $\bigvee \underline{z} \varphi$ y para $\bigvee \underline{z}^m \varphi$. En el primer caso usando la regla ii de 5.1. , en el segundo, la regla v .

Fundación Juan March (Madrid)

8. Algebras de Boole.

De los sistemas intermedios puede hablarse en el lenguaje de las álgebras de Boole. Concretamente, puede demostrarse que los universos relacionales de un sistema intermedio o son finitos o son supernumerables.

8.1. Definiciones.

8.1.1. Algebra de Boole de un conjunto de subconjuntos.

Df. $\mathfrak{B} = \langle B, \cup, \cap, ' \rangle$ dónde B es un conjunto de subconjuntos de un cierto H - es decir, $B \subset P(H)$ - y B está provisto de las operaciones binarias $\cup$, $\cap$ junto con la operación monaria $'$ - dónde $X' = H - X$ - es un álgebra de Boole si:

i $\quad \emptyset \in B, \quad H \in B$

ii $\quad \forall X\, Y\, (X, Y \in B \Rightarrow X \cup Y \in B)$

iii $\quad \forall X\, (X \in B \Rightarrow X' \in B)$

Nota: La anterior definición sólo abraza a los casos en que las operaciones $\cup$, $\cap$ sean la unión e intersección de conjuntos.

8.1.2. Algebra de Boole completa.

Df. El álgebra de Boole $\mathfrak{B} = \langle B, \cup, \cap, ', \bigcup, \bigcap \rangle$ es completa si verifica además,

iv $\quad \forall D\, (D \subset B \Rightarrow \bigcup D \in B)$

Nota: En este caso $\bigcup$ es la gran unión.

Fundación Juan March (Madrid)

8.1.3. Atomos.

Df. $X \in B$ es un átomo si y sólo si $X \neq \emptyset$ y

$$\forall Y\ (Y \in B \Rightarrow X \subset Y \vee X \cap Y = \emptyset)$$

Es decir, un elemento de B es un átomo si no es vacío y si está contenido en todos los elementos de B que tienen al menos un elemento en común con él.

8.1.4. Algebra de Boole atómica.

Df. $\mathfrak{B}$ es atómica si y sólo si $\forall X\ (X \in B \wedge X \neq \emptyset \Rightarrow \exists Y\ (Y \in B \wedge Y$ es un átomo $\wedge\ Y \in X))$

Es decir, un álgebra de Boole es atómica si para cada elemento de B hay un átomo contenido en él.

8.2. Teorema.

Para cada $n \in N$, A_n es un álgebra de Boole completa.

Demostración.

Sea $n \in N$. Por definición $A_n \subset P(A^n)$ es un conjunto de subconjuntos de A^n.

Además,

$\emptyset \in A_n$ - Por 5.2.5. -

$A^n \in A_n$ - Por 5.2.4. -

$\forall X\ Y\ (X, Y \in A_n \Rightarrow X \cup Y \in A_n)$

- Por 5.2.3. -

$\forall X\ (X \in A_n \Rightarrow A^n - X \in A_n)$

- Por regla i de 5.1. -

Fundación Juan March (Madrid)

Se verifican por tanto las condiciones i , ii y iii que califican a A_n como álgebra de Boole.

$$\forall D\,(D \subset A_n \Rightarrow \bigcup D \in A_n)$$

- Por regla v de 5.1. -

A_n es por tanto un álgebra de Boole completa.

8.3. Definición alternativa de los sistemas intermedios.

$\mathfrak{A} = \langle A, \langle A_n \rangle_{n \in N} \langle \langle c_i \rangle_{i \in I} \langle R_j \rangle_{j \in J} \rangle$ es un sistema intermedio si y sólo si:

i Para cada $n \in N$, $\langle A_n , \cup , \cap , * , \bigcup , \bigcap \rangle$ es un álgebra de Boole completa siendo $\emptyset$ el cero del álgebra y A^n el elemento unidad.

ii $\forall n\, p\, X\,(n \in N - \{1\} \wedge p \in \{0, 1, \ldots , n-1\} \wedge X \in A_n \Rightarrow \{\langle x_1 \ldots x_{n-p} \rangle / \exists z_1 \ldots z_p \langle x_1 \ldots x_{n-p} z_1 \ldots z_p \rangle \in X\} \in A_{n-p})$

iii $\forall n\, X\,(n \in N \wedge X \in A_n \Rightarrow X \times A \in A_{n-1})$

iv $\forall n\, X\, \varrho\,(n \in N - \{1\} \wedge X \in A_n \wedge \varrho \in S_n \Rightarrow \{\langle x_1 \ldots x_n \rangle / \langle x_{\varrho(1)} \ldots x_{\varrho(n)} \rangle \in X\} \in A_n)$

La equivalencia de esta definición con la definición 5.1. se sigue del teorema 8.2.

9. Cardinalidad de los universos A_n en sistemas inter-

Fundación Juan March (Madrid)

medios.

Demuestro que para cada $n \in N$, A_n es finito o supernumerable. La cardinalidad de A_n es una consecuencia del hecho de ser $\langle A_n, \cup, \cap, \dashv^n, \bigcup, \bigcap \rangle$ un álgebra de Boole completa y atómica.

9.1. Teorema.

Para cada $n \in N$, $\langle A_n, \cup, \cap, \dashv, \bigcup, \bigcap \rangle$ es un álgebra de Boole atómica.

Demostración.

Sea $\mathfrak{A}$ el conjunto de los átomos de A_n.

Es decir, $\mathfrak{A} = \{ X \in A_n - \{\emptyset\} / \forall Y\, (Y \in A_n \Rightarrow X \subset Y \vee X \cap Y = \emptyset) \}$

Demuestro que para cada relación n-aria no vacía, existe un elemento de $\mathfrak{A}$ contenido en él.

En efecto,

Sea $X \in A_n$ y $X \neq \emptyset$

Por ser X no vacío, existirá al menos un elemento en X. Digamos $e \in X$.

Sea E la gran intersección de los elementos de A_n a los que pertenece e. Es decir,

$$E = \bigcap \{ Y \in A_n / e \in Y \}$$

Usando 5.2.1. demuestro que $E \in A_n$. Es también fácil comprobar que E es un átomo y que contiene a X.

Queda demostrado pues que el álgebra de Boole A_n es atómica.

Fundación Juan March (Madrid)

9.2. Teorema.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es biyectable con $P(\mathfrak{N})$.

Demostración.

Sea $f : P(\mathfrak{N}) \longrightarrow A_n$

$B \subset \mathfrak{N} \longrightarrow \bigcup B \in A_n$

Es fácil demostrar que f es inyectiva y epiyectiva. En efecto, sean B_1 y B_2 conjuntos de átomos. Si $\bigcup B_1 = \bigcup B_2$ entonces $B_1 = B_2$ ya que los elementos de B_1 y B_2 son átomos.

Por otra parte, toda relación $X \in A_n$ puede ser expresada como la gran unión de un cierto conjunto de átomos. Concretamente, $X = \bigcup B$ dónde $B = \{ D / D = \bigcap \{ Y \in A_n / x \in Y \}, x \in X \}$

9.3. Teorema.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es finito o supernumerable.

Se sigue del teorema 9.2. ya que el conjunto de las partes de $\mathfrak{N}$ es finito si $\mathfrak{N}$ es finito y supernumerable si $\mathfrak{N}$ es numerable.

10. Sistemas generales no intermedios.

Como se ha visto, los sistemas intermedios se caracterizan por tener conjuntos finitos o supernumerables como universos relacionales. Es este el motivo por el que no todos los sistemas generales son intermedios. En efecto, en la demostración del teorema de completud se hace uso de un conjunto Δ máximamente consistente y

Fundación Juan March (Madrid)

ejemplificado de sentencias para construir con su ayuda un sistema general. Puesto que Δ es numerable y el sistema construído consiste básicamente en tomar como universo S el de las constantes individuales y como elementos de los universos S_n las relaciones

$\{\langle \underline{c}_1 \dots \underline{c}_n \rangle / \ \underline{D}^n \ \underline{c}_1 \dots \underline{c}_n \in \Delta\}$, tanto S como los S_n son numerables. Para construir el sistema

$\langle S \ \langle S_n \rangle_{n \in N} \dots \rangle$ se utilizan ciertas relaciones de equivalencia. Esto no modifica la argumentación que estoy haciendo en lo fundamental; los universos podrán ser finitos en vez de numerables, pero nunca podrán ser supernumerables. Concretamente, los universos S_n serán numerables siempre que esté en Δ alguno de los axiomas de infinitud; como por ejemplo,

$$\bigvee \underline{Z} \bigwedge \underline{x} \bigvee \underline{y} \ (\neg \ \underline{Z} \ \underline{x} \ \underline{x} \wedge \underline{Z} \ \underline{x} \ \underline{y} \wedge \bigwedge \underline{z} \ \underline{u} \ (\underline{Z} \ \underline{x} \ \underline{z} \wedge \underline{Z} \ \underline{z} \ \underline{u} \rightarrow \underline{Z} \ \underline{x} \ \underline{u}))$$

J. W. Robbin, en su libro Mathematical Logic, cita como sistema general el siguiente:

$\langle N , \langle A_n \rangle_{n \in N} \rangle$ dónde para cada $n \in N$, $A_n = \bigcup_{k \in N} A_n^{(k)}$ siendo $A_n^{(k)}$ el conjunto de las relaciones n-arias sobre N que son G_k-invariantes. Como se recordará el sistema

$\langle N , \langle A_n^{(k)} \rangle_{n \in N} \rangle$ fué utilizado en 5.3. como ejemplo de sistema intermedio. Pues bien, aunque cada

Fundación Juan March (Madrid)

uno de los sistemas $\langle N , \langle A_n^{(k)} \rangle_{n \in N} \rangle$ son intermedios, $\langle N , \langle A_n \rangle_{n \in N} \rangle$ no es un sistema intermedio.

De hecho, $\langle N , \langle A_n \rangle_{n \in N} \rangle$ tiene todas las propiedades de los sistemas intermedios excepto la de la completud del álgebra.

Esto nos permite apreciar la importancia de la propiedad de ser un álgebra de Boole completa en la delimitación de la frontera entre los sistemas generales intermedios y los que no lo son.

Fundación Juan March (Madrid)

Bibliografía

Barwise, J. Admissible Sets and Structures.
(Springer Verlag, Berlin 1975)
Bell and Slonson. Models and Ultraproducts.
(North Holland, Amsterdam)
Chang, C. C. and Keisler, H. J. Model Theory.
(North Holland, Amsterdam 1970)
Church, A. Introduction to Mathematical Logic.
(Princeton University Press, Princeton 1956)
Halmos, P Boolean Algebras.
(Van Nostrand)
Henkin, L. The Completeness of the First Order Functional Calculus.
(Journal of Symbolic Logic 1949)
" Completeness in the Theory of Types.
(Journal of Symbolic Logic 1950)
" Banishing the rule of Substitution for Functional Variables.
(Journal of Symbolic Logic 1953)
" Identity as a Logical Primitive.
(Philosophia. Philosophical Quarterly of Israel 1975)
Hilbert, D. and Ackermann, W. Elementos de Logica Teórica.
(Editorial Tecnos, Madrid)
Keisler, H. J. Model Theory for Infinitary Logic.
(North Holland, Amsterdam 1971)
Mosterín, J. Logica de Primer Orden.
(Editorial Ariel, Barcelona 1970)
" Teoría Axiomática de Conjuntos.
(Editorial Ariel, Barcelona 1971)
Rasiowa, H. and Sikorski, R. The Mathematics of Metamathematics.
(Polish Scientific Publishes 1962)

Fundación Juan March (Madrid)

Rasiowa, H. A Generalization of a Formalized Theory of Fields of Sets on Non-classical Logics. (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 1964)

Robbin, J. W. Mathematical Logic: A First Course. (W.A. Benjamin, Inc. New York 1969)

Rogers, R. Mathematical Logic and Formalized Theories. (North Holland, Amsterdam 1971)

Suppes, P. Axiomatic Set Theory. (Dover Publications, Inc. New York 1972)

" Introducción a la Lógica Simbólica. (Compañía Editorial Continental, Mexico 1966)

Vaught, R. L. Some Aspects of the Theory of Models. (The American Mathematical Monthly 1973)

Fundación Juan March (Madrid)

FUNDACION JUAN MARCH
SERIE UNIVERSITARIA

Títulos Publicados:

1.— *Semántica del lenguaje religioso./ A. Fierro (Teología. España, 1973)*

2.— *Calculador en una operación de rectificación discontinua./ A. Mulet (Química. Extranjero, 1974)*

3.— *Skarns en el batolito de Santa Olalla./ F. Velasco (Geología. España, 1974)*

4.— *Combustión de compuestos oxigenados./ J. M. Santiuste (Química. España, 1974)*

5.— *Películas ferromagnéticas a baja temperatura./ José Luis Vicent López (Física. España, 1974)*

6.— *Flujo inestable de los polímeros fundidos./ José Alemán Vega (Ingeniería. Extranjero, 1975)*

7.— *Mantenimiento del hígado dador in vitro en cirugía experimental./ José Antonio Salva Lacombe (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1973)*

8.— *Estructuras algebraicas de los sistemas lógicos deductivos./ José Plá Carrera (Matemáticas. España, 1974)*

9.— *El fenómeno de inercia en la renovación de la estructura urbana./ Francisco Fernández-Longoria Pinazo (Urbanización del Plan Europa 2.000 a través de la Fundación Europea de la Cultura)*

10.— *El teatro español en Francia (1935–1973)./ F. Torres Monreal (Literatura y Filología. Extrajero, 1971)*

11.— *Simulación electrónica del aparato vestibular./ J. M. Drake Moyano (Métodos Físicos aplicados a la Biología. España, 1974)*

12.— *Estructura de los libros españoles de caballerías en el siglo XVI./ Federico Francisco Curto Herrero (Literatura y Filología. España, 1972)*

13.— *Estudio geomorfológico del Macizo Central de Gredos./ M. Paloma Fernández García (Geología. España, 1975)*

14.— *La obra gramatical de Abraham Ibn ᶜ Ezra./ Carlos del Valle Rodríguez (Literatura y Filología. Extranjero, 1970)*

Fundación Juan March (Madrid)

15.– *Evaluación de Proyectos de Inversión en una Empresa de producción y distribución de Energía Eléctrica./ Felipe Ruíz López (Ingeniería. Extranjero, 1974)*

16.– *El significado teórico de los términos descriptivos./ Carlos Solís Santos (Filosofía. España, 1973)*

17.– *Encaje de los modelos econométricos en el enfoque objetivos-instrumentos relativos de política económica./ Gumersindo Ruíz Bravo (Economía. España, 1971)*

18.– *La imaginación natural (estudios sobre la literatura fantástica norteamericana)./ Pedro García Montalvo (Literatura y Filología. Extranjero, 1974)*

19.– *Estudios sobre la hormona Natriurética./ Andrés Purroy Unanua (Medicina, Farmacia y Veterinaria. Extranjero, 1973)*

20.– *Análisis farmacológico de las acciones miocárdicas de bloqueantes Beta-adrenérgicos./ José Salvador Serrano Molina (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1970)*

21.– *El hombre y el diseño industrial./ Miguel Durán-Lóriga (Artes Plásticas. España, 1974)*

22.– *Algunos tópicos sobre teoría de la información./ Antonio Pascual Acosta (Matemáticas. España, 1975)*

23.– *Un modelo simple estático. Aplicación a Santiago de Chile./ Manuel Bastarreche Alfaro (Arquitectura y Urbanismo. Extranjero, 1973)*

24.– *Moderna teoría de control: método adaptativo-predictivo. Teoría y realizaciones./ Juan Manuel Martín Sánchez (Ingeniería. España, 1973)*

25.– *Neurobiología (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*

26.– *Genética (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*

27.– *Genética (I Semana de Biología. Conferencias-coloquio sobre Investigaciones biológicas 1977)*

28.– *Investigación y desarrollo de un analizador diferencial digital (A.D.D.) para control en tiempo real./ Vicente Zugasti Arbizu (Física. España, 1975)*

29.– *Transferencia de carga en aleaciones binarias./ Julio A. Alonso (Física. Extranjero, 1975)*

30.– *Estabilidad de osciladores no sinusoidales en el rango de microondas./ José Luis Sebastián Franco (Física. Extranjero, 1974)*

Fundación Juan March (Madrid)

31.– *Estudio de los transistores FET de microondas en puerta común./ Juan Zapata Ferrer. (Ingeniería. Extranjero, 1975).*

32.– *Estudios sobre la moral de Epicuro y el Aristóteles esotérico./ Eduardo Acosta Méndez. (Filosofía. España, 1973).*

33.– *Las Bauxitas Españolas como mena de aluminio./ Salvador Ordóñez Delgado. (Geología. España, 1975).*

34.– *Los grupos profesionales en la prestación de trabajo: obreros y empleados./Federico Durán López. (Derecho. España, 1975).*

35.– *Obtención de Series aneuploides (monosómicas y ditelosómicas) en variedades españolas de trigo común./Nicolás Jouve de la Barreda. (Ciencias Agrarias. España, 1975).*

36.– *Efectos dinámicos aleatorios en túneles y obras subterráneas./ Enrique Alarcón Alvarez. (Ingeniería. España, 1975).*

37.– *Lenguaje en periodismo escrito./Fernando Lázaro Carreter, Luis Michelena Elissalt, Robert Escarpit, Eugenio de Bustos. Víctor de la Serna, Emilio Alarcos Llorach y Juan Luis Cebrián. (Seminario organizado por la Fundación Juan March los días 30 y 31 de mayo de 1977).*

38.– *Factores que influyen en el espigado de la remolacha azucarera, Beta vulgaris L./José Manuel Lasa Dolhagaray y Antonio Silván López. (Ciencias Agrarias. España, 1974).*

39.– *Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos. Productos finitos de espacios con topologías proyectivas de funciones reales./José Luis Blasco Olcina. (Matemáticas. España, 1975).*

40.– *Estructuras de la épica latina./Mª. del Dulce Nombre Estefanía Alvarez. (Literatura y Filología. España, 1971).*

41.– *Comunicación por fibras ópticas./Francisco Sandoval Hernández. (Ingeniería. España, 1975).*

42.– *Representación tridimensional de texturas en chapas metálicas del sistema cúbico./José Antonio Pero-Sanz Elorz. (Ingeniería. España, 1974).*

43.– *Virus de insectos: multiplicación, aislamiento y bioensayo de Baculovirus./Cándido Santiago-Alvarez. (Ciencias Agrarias. Extranjero, 1976).*

44.– *Estudio de mutantes de saccharomyces cerevisiae alterados en la biosíntesis de proteínas./Lucas Sánchez Rodríguez. (Biología. España, 1976).*

45.– *Sistema automático para la exploración del campo visual. José Ignacio Acha Catalina. (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1975).*

Fundación Juan March (Madrid)

46.— *Propiedades físicas de las variedades de tomate para recolección mecánica./Margarita Ruiz Altisent. (Ciencias Agrarias. España 1975).*

47.— *El uso del ácido salicílico para la medida del p^H intracelular en las células de Ehrlich y en escherichia coli./Francisco Javier García-Sancho Martín. (Medicina, Farmacia y Veterinaria. Extranjero, 1974).*

48.— *Relación entre iones calcio, fármacos ionóforos y liberación de noradrenalina en la neurona adrenérgica periférica./ Antonio García García. (Medicina, Farmacia y Veterinaria. España, 1975).*

49.— *Introducción a los espacios métricos generalizados./ Enrique Trillas y Claudi Alsina. (Matemáticas. España, 1974).*

50.— *Síntesis de antibióticos aminoglicosídicos modificados./Enrique Pando Ramos. (Química. España, 1975).*

51.— *Utilización óptima de las diferencias genéticas entre razas en la mejora./Fernando Orozco y Carlos López-Fanjul. (Biología Genética. España, 1973).*

52.— *Mecanismos neurales de adaptación visual a nivel de la capa plexiforme externa de la retina./Antonio Gallego Fernández. (Biología Neurobiología. España, 1975).*

53.— *Compendio de la salud humana de Johannes de Ketham./Mª. Teresa Herrera Hernández. (Literatura y Filología. España, 1976).*

54.— *Breve introducción a la historia del Señorío de Buitrago./Rafael Flaquer Montequi. (Filosofía y Letras. España, 1975).*

55.— *Una contribución al estudio de las teorías de cohomología generalizadas./Manuel Castellet Solanas. (Matemáticas. Extranjero, 1974).*

56.— *Fructosa 1,6 Bisfosfatasa de hígado de conejo: modificación por proteasas lisosomales./Pedro Sánchez Lazo. (Medicina, Farmacia y Veterinaria. Extranjero, 1975).*

57.— *Estudios sobre la expresión genética de virus animales./ Luis Carrasco Llamas. (Medicina, Farmacia y Veterinaria. Extranjero, 1975).*

58.— *Crecimiento, eficacia biológica y variabilidad genética en poblaciones de dípteros./Juan M. Serradilla Manrique. (Ciencias Agrarias. Extranjero, 1974).*

Fundación Juan March (Madrid)

59.— *Efectos magneto-ópticos de simetría par en metales ferromagnéticos.* / *Carmen Nieves Afonso Rodríguez.* *(Física. España, 1975).*

60.— *El sistema de Servet.* / *Angel Alcalá Galve.* *(Filosofía. España, 1974).*

61.— *Dos estudios sobre literatura portuguesa contemporánea.* / *David Mourão-Ferreira y Vergilio Ferreira.* *(Literatura y Filología, 1977).*

Fundación Juan March (Madrid)

Fundación Juan March (Madrid)