La Serie Universitaria de la Fundación Juan March presenta resúmenes, realizados por el propio autor, de algunos estudios e investigaciones llevados a cabo por los becarios de la Fundación y aprobados por los Asesores Secretarios de los distintos Departamentos.

El texto íntegro de las Memorias correspondientes se encuentra en la Biblioteca de la Fundación (Castello, 77. Madrid-6).

La lista completa de los trabajos aprobados se presenta, en forma de fichas, en los Cuadernos Bibliográficos que publica la Fundación Juan March.

Estos trabajos abarcan las siguientes especialidades: Arquitectura y Urbanismo; Artes Plásticas; Biología; Ciencias Agrarias; Ciencias Sociales; Comunicación Social; Derecho; Economía; Filosofía; Física; Geología; Historia; Ingeniería; Literatura y Filología; Matemáticas; Medicina, Farmacia y Veterinaria; Música; Química; Teología. A ellas corresponden los colores de la cubierta.

Edición no venal de 300 ejemplares, que se reparte gratuitamente a investigadores, Bibliotecas y Centros especializados de toda España.

Beca de España, 1974

Departamento de Matemáticas

Fundación Juan March

SERIE UNIVERSITARIA

Fundación Juan March

Contribución al estudio de las estructuras algebraicas de los sistemas lógicos deductivos

José Plá Carrera

8

Fundación Juan March

Serie Universitaria

8

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS DE LOS SISTEMAS LOGICOS DEDUCTIVOS

JOSE PLA CARRERA

Fundación Juan March
Castelló, 77. Teléf. 225 44 55
Madrid - 6

Depósito Legal: M - 30434 - 1976
Ibérica, Tarragona, 34 – Madrid-7

INDICE

NOMENCLATOR

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS DE LOS SISTEMAS LOGICOS DEDUCTIVOS.

Introducción.

A la hora de introducir algebraicamente la idea de sistema lógico, los lógicos y los matemáticos han adoptado dos caminos :

David HILBERT [1923] y Antonio MONTEIRO (hacia [1950]) definen una lógica como una terna $(A,.,D)$, en donde $(A,.)$ es una álgebra abstracta y $D \subseteq A$, $D \neq \emptyset$.

Intuitivamente, A es el conjunto de las proposiciones, . es la implicación entre proposiciones - que es una ley de composición interna - y D es un conjunto elegido de antemano que representa las proposiciones verdaderas : ser verdadero es una elección.

La diferencia entre D. Hilbert y A. Monteiro es una diferencia de generalización : para D. Hilbert, $D = \{1\}$ y la relación : "$x \leq y \Longleftrightarrow x.y = 1$" es una relación de orden ; para A. Monteiro, $D \neq \emptyset$ y la relación : "$x \leq y$ si, sólo si, $x.y \in D$" es una relación de preorden.

Si, como hizo Fco. de Asís SALES [1971], las álgebras de Hilbert se pueden considerar como álgebras dotadas de operaciones y sistemas ordenadores, así también las álgebras introducidas por A. Monteiro y llamadas preálgebras de Hilbert se pueden mirar como álgebras dotadas de operaciones y de sistemas preordenadores.

Alfred TARSKI [1930] llama lógica a un sistema (A, Cn), en donde A es un conjunto $\neq \emptyset$ y Cn es un operador de consecuencia en A ; es decir, una aplicación de $P(A)$ en $P(A)$ que verifica: (i) Para todo $X \subseteq A$, $X \subseteq Cn(X) = Cn(Cn(X))$; (ii) para todo par $X, Y \in P(A)$, $X \subseteq Y$ implica $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$.

Definido el sistema lógico de esta manera, resulta que un elemento x de A es una consecuencia de $X \subseteq A$ si, y sólo si, $x \in Cn(X)$.

El mismo A. Tarski en el trabajo "Untersuchungen über den Aussagenkalkül" demuestra que en el cálculo de proposiciones clásico:

la relación $H \vdash p$, definida por: "existen $h_1, \ldots, h_n$ de H tales que

$$h_1 \to (h_2 \to (\ldots (h_n \to p) \ldots))$$

es un teorema", permite asociar a cada subconjunto H de proposiciones el conjunto $H' = \{p : H \vdash p\}$.

La aplicación $H \longmapsto H' = Cn(H)$ es un operador consecuencia en el conjunto P de las proposiciones.

Este hecho nos sugiere un método para relacionar las dos definiciones algebraicas de lógica: dada la lógica $(A,.,D)$ le podemos asociar la lógica (A,C_D), en donde C_D es el operador definido por:

$$C_D(X) = \{ x \in A: \text{ existen } x_1,\ldots,x_n \text{ de } S \text{ y } x_1.(\ldots .(x_n.x)\ldots) \in D\}.$$

Al realizar esta construcción del operador C_D se nos presenta una dificultad: lo más probable es que C_D no sea, en absoluto, un operador consecuencia.

Los dos primeros capítulos de este trabajo se mueven en esta línea: hallar qué condiciones deben cumplir los subconjuntos D de A para que ciertos operadores C_D - bien determinados - sean operadores consecuencia en A. El tercer capítulo - apartándose de esta línea - construye sistemas deductivos no clásicos, que llamamos <u>sistemas deductivos completos</u>: con ellos podemos realizar un estudio lógico que culmina el tercer capítulo y el trabajo.

Primer capítulo.

I.1. En una terna $(A,.,D)$, ¿qué condiciones debemos imponer a D para que el operador consecuencia inmediata

$$C_D(S) = \{ x \in A : (\exists y)(y \in S \text{ e } y.x \in D)\}$$

sea un operador consecuencia en A?

La respuesta a la pregunta anterior nos la da el teorema : "una condición necesaria y suficiente para que C_D sea un operador consecuencia en A es que D sea un conjunto preordenador (es decir, tal que la relación

$$x \leq y \quad \text{si, y sólo si,} \quad x.y \in D$$

es un preorden en A, o equivalentemente :

i) para todo x de A, $x.x \in D$;

ii) para todo x,y,z de A, $x.y \in D$ e $y.z \in D$ implican $x.z \in D$)".

Es claro que C_D está definido sólo en $P(A)^* = P(A) - \{\emptyset\}$. Más adelante nos preocuparemos de extenderlo.

I.2. ¿Es posible establecer una aplicación Φ entre el conjunto $PO(A)$ - de los sistemas preordenadores de A - y el conjunto $\Delta(P(A)^*)$ - de los operadores consecuencia sobre $P(A)^*$? Efectivamente, en virtud de I.1.

Vemos, sin embargo, que tal aplicación no es exhaustiva; los C_D son morfismos respecto de las reuniones arbitrarias y, en cambio, un $\delta \in \triangle(P(A)^*)$, en general, no lo es.

Tampoco es inyectiva, pero una condición necesaria y suficiente para que lo sea es que todo elemento x de A factorice (esto es, que existan y, z de A tales que $x = y.z$).

De esta manera, la aplicación $\Phi : PO(A) \longrightarrow \operatorname{Im} \Phi$ es una biyección y, por lo tanto, dado que

$$(PO(A), \wedge, \vee),$$

en donde

$$D_1 \wedge D_2 = D_1 \cap D_2 ; \quad D_1 \vee D_2 = \bigcap_{D \supseteq D_1 \cup D_2} D,$$

es un retículo y que Φ es un isomorfismo de orden, resulta que Φ es un isomorfismo reticular, si en Im Φ definimos las operaciones:

$$C_{D_1} \vee C_{D_2} = C_{D_1 \vee D_2} \quad y \quad C_{D_1} \wedge C_{D_2} = C_{D_1 \wedge D_2}.$$

Se observa, sin embargo, que el retículo $(\operatorname{Im} \Phi, \wedge, \vee)$ no es un subretículo del retículo $(\triangle(P(A)^*), \underline{\wedge}, \bar{\vee})$.

La demostración de que Φ es isomorfismo de orden utiliza el hecho de que todo elemento de A factoriza:

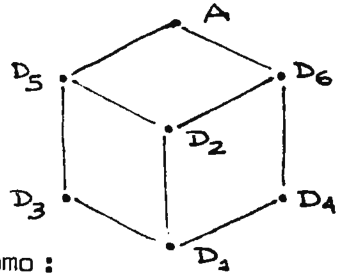
$\Delta_{D_1} \leq \Delta_{D_2}$ y $z \in D_1$ (con $z = x.y$) y, por lo tanto, $y \in \Delta_{D_1}(x) \subseteq \Delta_{D_2}(x)$; luego $x.y = z \in D_2$.

Un ejemplo concreto nos permite comprobar que, en general, $(PO(A), \wedge, \vee)$ no es distributivo.

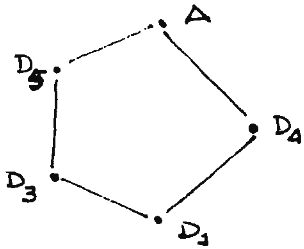
El ejemplo es $A = \{x,y,z,t\}$ con la operación :

$\cdot$	x	y	z	t
x	x	z	z	z
y	y	x	z	z
z	t	t	x	z
t	t	t	t	x

Los sistemas preordenadores de $(A,.)$ son: $D_1 = \{x\}$; $D_2 = \{x,y\}$; $D_3 = \{x,z\}$; $D_4 = \{x,t\}$; $D_5 = D_2 \cup D_3$; $D_6 = D_2 \cup D_4$; A. Disponemos, pues, del retículo



que contiene el pentágomo :



Por lo tanto no es ni siquiera modular.

I.3. Deseamos extender C_D a $P(A)$ entero. Es preciso que, para cada x de A, $C_D(\emptyset) \subseteq C_D(x)$ o, equivalentemente, que

$$C_D(\emptyset) \subseteq \bigcap_{x \in A} C_D(x).$$

Si $\bigcap_{x \in A} C_D(x) = \emptyset$, entonces la única extensión posible es $C_D(\emptyset) = \emptyset$ y decimos que C_D es un operador clausura topológica en A.

Si $\bigcap_{x \in A} C_D(x) = T \neq \emptyset$, entonces disponemos de las opciones $C_D(\emptyset) = T' \subseteq T$, siempre que $C_D(T') = T'$.

Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

I.4. Dada una estructura algebraica $(A,.)$, ¿cómo son los sistemas preordenadores?

Si llamamos A^2 el conjunto $A^2 = \{x^2 : x \in A\}$, resulta que, si D es un sistema preordenador de $(A,.)$, $A^2 \subseteq D$.

Centrando nuestra atención al caso particular de los grupos $(A,.)$ se demuestra que $H \subseteq A$ es un sistema preordenador de $(A,.)$ si, y sólo si, H es un subgrupo normal que contiene los cuadrados perfectos .

Entonces disponemos de dos relaciones de equivalencia inducidas por el subgrupo : en tanto que subgrupo normal y en tanto que sistema preordenador. Disponemos, pues, de dos conjuntos cocientes : A/H y $A/\equiv_H$.

El primero es un *grupo*; el segundo es un conjunto *totalmente desordenado*, pero se demuestra que constituyen el mismo conjunto cociente. Por lo tanto, $A/H = A/\equiv_H$ es un *grupo totalmente desordenado*.

La demostración de "si H es un sistema preordenador, H es un subgrupo de $(A,.)$ que contiene A^2" es la siguiente: i) $e = e.e \in H$, pues $A^2 \subseteq H$; ii) $x \in H$, $y \in H$ implican $x = x.e$, $y = e.y \in H$ que, por la transitividad, implican $x.y \in H$; iii) $x \in H$ implica $x = e.x$ y $e = x.x^{-1} \in H$ y, de nuevo, por la transitiva, $x^{-1} = e.x^{-1} \in H$.

Esta demostración se puede extender a sistemas algebraicos con neutro e incluso a estructuras algebraicas con neutro por la izquierda que sea absorbente por la derecha (elementos tales como el máximo en una álgebra de Boole). Entonces se obtiene "si H es un sistema preordenador de un sistema algebraico $(A,.)$ con elemento distinguido de uno de los tipos indicados, entonces H es una subestructura que contiene A^2".

La demostración recíproca, en cambio, no admite extensión puesto que utiliza la existencia de inversos. Vemos también que existen subestructuras con neutro que contienen A^2 y que no son sistemas preordenadores: en $(N,.)$ se considera $D = \{ n^2.m^3 : n, m \in N \}$. Entonces $n^2.m^2.m \in D$ y $1.n^2.m^2 \in D$ y, en cambio, m puede no pertenecer a D. Finalmente, si $(A,.)$ no dispone de elementos distinguidos como los indicados más arriba pueden existir sistemas preordenadores que no sean subestructuras: $(Z,-)$ y $D = aN$, $a > 0$.

I.5 y I.6. En lógica son conocidos los enunciados:

(1) Cualquier proposición implica un teorema (absorción por la derecha);

(2) De un teorema sólo se pueden deducir teoremas (modus ponens: M.P.).

Algebraicamente estos enunciados se traducen en:

(1) si $x \in D$, entonces, para todo $y \in A$, $y.x \in D$ (o equivalentemente, $y.D \subseteq D$, para todo $y \in A$);

(2) si $x.y \in D$ y $x \in D$, entonces $y \in D$ (o equivalentemente, D es un filtro del preorden $\leqslant_D$).

¿Es posible caracterizar por medio del operador C_D el hecho de que D verifique (1) ó (2)? Sí.

(1) D es absorbente por la derecha si, y sólo si, para todo $S \in P(A)^*$, $D \subseteq C_D(S)$.

(2) D verifica M.P. si, y sólo si, existe un $S \in P(A)^*$ tal que $C_D(S) = D$; si, y sólo si, $C_D(D) = D$.

Un sistema preordenador que verifica M.P. se llama sistema deductivo débil.

Si D es un sistema preordenador absorbente por la derecha que verifica M.P. resulta que, si intentamos extender C_D, nos encontramos con que C_D no es un operador clausura topológica. En efecto: en virtud de la absorción $D \subseteq C_D(\emptyset)$ y, en virtud del M.P., $C_D(\emptyset) \subseteq C_D(D) = D$. Por lo tanto, $C_D(\emptyset) = D \neq \emptyset$.

En una estructura $(A,.)$ asociativa - o conmutativa - el único sistema deductivo débil y absorbente por la derecha es A. En otras palabras las estructuras asociativas y conmutativas son inconsistentes.

$(x.x).(x.x) \in D$ implica $(x.(x.x)).x \in D$ implica $x \in D$;

$x.y \in D$ si $y \in D$ y $x \in A$. Luego, si $y \in D$ y $x \in A$, $y.x = x.y \in D$ y, por M.P., $x \in D$.

I.7. La existencia de neutro por la izquierda implica que todo sistema preordenador D sea sistema deductivo débil.

La existencia de neutro por la izquierda que sea absorbente por la derecha implica que todo sistema preordenador D sea absorbente por la derecha.

I.8. Una cuestión que no hemos tratado hasta ahora y que se aleja del intríngulis de este primer capítulo es la siguiente: $(A,.,D)$ está dotado de la relación de equivalencia:

$$x \equiv_D y \quad \text{si, y sólo si, } x.y \in D \text{ e } y.x \in D.$$

¿Podemos asegurar que D es clase de equivalencia?

La respuesta a esta pregunta es negativa y, más todavía, ni tan siquiera podemos asegurar que D está contenido totalmente en una clase de equivalencia.

Hemos podido demostrar que:

1. $D \subseteq [x]_D$, $x \in D$, si, y sólo si, D es <u>cerrado</u> $(D.D \subseteq D)$.
2. Cuando $[x]_D \supseteq D$, $x \in D$, $[x]_D$ es máximo en $A/\equiv_D$ si, y sólo si, D es absorbente por la derecha.
3. Cuando $[x]_D \supseteq D$, $x \in D$, y D es absorbente por la derecha, $[x]_D = D$ si, y sólo si, D verifica M.P.
4. $D \in A/\equiv_D$ si, y sólo si, D es <u>maximalmente</u> <u>cerrado</u>.

Un sistema preordenador D es <u>maximalmente</u> <u>cerrado</u> (M.C.) si, y sólo si, i) $D.D \subseteq D$; ii) si existe $T \subseteq A$, $T \supsetneq D$, entonces $D.T \not\subseteq D$ ó $T.D \not\subseteq D$.

5. D absorbente por la derecha: M.P. y M.C. son equivalentes.

Sin embargo es posible demostrar - consideramos los grupos - que M.P. y M.C. no implican la absorción por la derecha.

La introducción del concepto de M.C. nos permite plantearnos la siguiente pregunta : Dado un sistema preordenador D, ¿es posible construir un sistema preordenador M.C. que lo contenga? La respuesta es afirmativa y se puede dar utilizando dos métodos :

el primer método : se considera el conjunto

$$\mathcal{S} = \{ D' : D' \text{ es M.C. y } D' \geq D \} \ (\neq \emptyset, \text{ pues } A \neq \emptyset).$$

Se construye $D_0 = \bigcap_{D' \in \mathcal{S}} D'$ y se demuestra que D_0 es un sistema M.C. que contiene a D y es, precisamente, el engendrado por D.

el segundo método : sea D un sistema preordenador cerrado (debemos asegurarnos de la clase engendrada por D contiene D : ver 1.). Construímos

$$D \subseteq C_0 \subseteq D_1 \subseteq C_1 \subseteq D_2 \subseteq C_2 \subseteq \dots ,$$

en donde D_1 es, precisamente, el menor sistema preordenador que contiene C_0 y satisface $D_1 . D_1 \subseteq D_1$. Sea $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Se demuestra que C es M.C. (preordenador y clase).

Tenemos dos métodos, pero mientras el primero es aplicable a todo sistema preordenador, el segundo sólo lo es a los sistemas preordenadores cerrados. Pero esta diferencia es sólo aparente. En efecto: dado un sistema preordenador D, construímos D_0 por medio del primer método. Por otro lado, a partir de D, construímos D' - que es el menor sistema preordenador que contiene D y es cerrado - y, a partir de él y aplicando el segundo método, construímos C. Se demuestra que $D_0 = C$.

El capítulo II sigue un desarrollo paralelo al que se ha seguido en el capítulo I.

II.1 y II.2. Se define una aplicación

$$K_D : P(A)^* \longrightarrow P(A)$$

por medio de

$$K_D(S) = \{x \in A : (\exists s)(s \in S_F(S) \text{ y } s.x \in D\},$$

en donde $S_F(S)$ designa el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de S y, si $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $s.x = s_1.(\ldots .(s_n.x) \ldots)$ que, por cuestiones de brevedad, escribiremos $s_1. \ldots .s_n.x$. En particular, si $s_i = t$, para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces $t^{(n)}.x = t.\overset{(n)}{\ldots}.t.x$.

¿Qué condiciones debemos imponer al conjunto D para que K_D sea un operador consecuencia? Para responder a esta pregunta se introduce el concepto de <u>sistema preordenador fuerte</u>: es todo subconjunto D de A que satisface: i) para todo x de A, $x.x \in D$; ii) si $h_1. \ldots .h_n.x \in D$ y, para cada $i = 1, \ldots, n$, $h^i_1. \ldots .h^i_{m_i}.h_i \in D$, entonces

$$h^1_1. \ldots .h^1_{m_1}. \ldots .h^n_1. \ldots .h^n_{m_n}.x \in D.$$

Introducido este concepto, se demuestra que, para que K_D sea un operador consecuencia es <u>suficiente</u> que D sea un sistema preordenador fuerte.

A continuación se analiza si es posible dar un concepto de sistema preordenador fuerte que permita generalizar el teorema dado en el capítulo I ; es decir, ¿es posible dar una definición de sistema preordenador fuerte que permita establecer que la condición es también necesaria? La respuesta es afirmativa, pero al hacerlo deberíamos renunciar a que el concepto de sistema preordenador fuerte generalizase el concepto de sistema preordenador débil (es decir, un sistema preordenador fuerte no sería débil). Y nosotros deseamos que un sistema preordenador fuerte sea débil. Por este motivo, renunciamos a generalizar el resultado anterior. Se demuestra, además, que, en general, los sistemas preordenadores débiles no son fuertes.

II.3. Definimos la aplicación

$$\overline{\Phi} : POF(A) \longrightarrow \Delta(P(A)^{*})$$

por medio de: $\overline{\Phi}(D) = K_D$. Se demuestra que $\overline{\Phi}$ no es exhaustiva – para verlo nos basamos en el hecho de que la condición anterior no sea necesaria. En relación con la inyectividad: "si es inyectiva, entonces todo elemento de A es factorizable". Sin embargo, no sabemos si esta condición es o no suficiente.

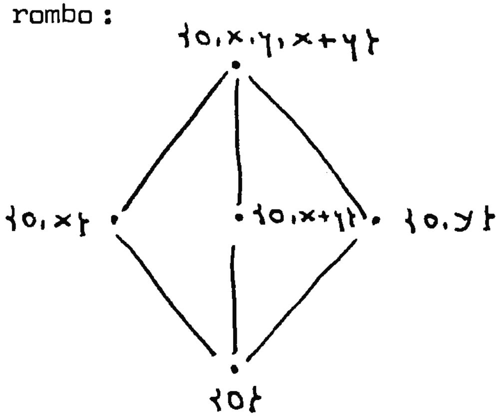
A pesar de que $\overline{\Phi}$ es un morfismo de orden, no es posible generalizar los resultados del capítulo I.

Vemos también que $(POF(A), \wedge, \vee)$, en general, **no es distributivo.**

Para verlo se considera un grupo de Boole $(A,.)$ con tres elementos 0, x e y. Los subgrupos

$$\{0,x\}, \quad \{0,y\}, \quad \{0,x+y\}, \quad \{0,x,y,x+y\}$$

son sistemas preordenadores fuertes (II.4) y constituyen un rombo :



II.4. Todo sistema preordenador fuerte es débil y, por lo tanto, si $(A,.)$ dispone de elementos distinguidos como los descritos en I.4, es una **subestructura** que contiene A^2. Vemos, además, que, en el caso de los grupos, todo subgrupo que contiene los cuadrados perfectos es un sistema preordenador fuerte y recíprocamente. Es decir, en el caso de los grupos, los sistemas preordenadores fuertes y débiles coinciden.

La demostración que debemos realizar para demostrar tal resultado es totalmente distinta de la dada en el caso débil : es preciso recorrer al hecho de que todo subgrupo que contiene los cuadrados perfectos es normal y también a la asociatividad de la operación.

II.5. Puesto que todo sistema preordenador fuerte es débil resulta que, si D es un sistema preordenador fuerte, entonces podemos considerar simultáneamente los operadores C_D y K_D. Este párrafo los compara y obtiene los siguientes resultados :

1. Para todo $S \in P(A)^*$, $C_D(S) \subseteq K_D(S)$, pero, en general, no coinciden.

   Para ver que pueden ser distintos hacemos uso de los grupos y también de las álgebras de Hilbert.

2. K_D no es morfismo respecto de las reuniones arbitrarias.
3. K_D es un operador <u>finitario</u> o de tarski.
4. $K_D \circ C_D = C_D \circ K_D$, que es un resultado conocido.

II.6. Del mismo modo que en el capítulo I pretendemos caracterizar la absorción por la derecha y el M.P. por medio del operador K_D. Se obtiene :

1. Si D es un sistema preordenador fuerte, absorbente por la derecha, entonces, si $S \in P(A)^*$, $S \subseteq K_D(S)$. Para ver que el recíproco en general falla es suficiente analizar el caso de los grupos.
2. Si D es un sistema preordenador fuerte, entonces D satisface M.P. si, y sólo si, existe un subconjunto S de A, $S \neq \emptyset$, tal que $K_D(S) = D$; si, y sólo si, $K_D(D) = D$.

Un sistema preordenador fuerte que satisfaga M.P. se llama un <u>sistema deductivo fuerte</u>.

II.7. En este apartado - que es quizás el más importante de esta segunda parte - se recoge un resultado de Sales [1974] y de él se extraen consecuencias que serán útiles más adelante. Este resultado dice : "si D es un sistema deductivo fuerte, absorbente por la derecha, $K_D(S)$ es un sistema deductivo débil".

i) Por II.6(1) tenemos que, si $S \in P(A)^*$, $D \subseteq K_D(S)$ y, por lo tanto, $x.x \in K_D(S)$, para todo x de A.

ii) Si $x.y \in K_D(S)$ e $y.z \in K_D(S)$, entonces existen $s_1, \dots, s_n$ y $t_1, \dots, t_m$ de S tales que

$$s_1. \dots .s_n.x.y \in D \quad y \quad t_1. \dots .t_m.y.z \in D$$

y, por ser D un sistema deductivo fuerte, resulta :

$$t_1 . \dots . t_m . s_1 . \dots . s_n . x . z \in D$$

y por lo tanto $x.z \in K_D(S)$.

iii) Si $x.y \in K_D(S)$ y $x \in K_D(S)$, entonces

$$s_1 . \dots . s_n . x . y \in D \quad y \quad t_1 . \dots . t_m . x \in D,$$

en donde los s_i y los t_j pertenecen a S y, dado que D es un sistema preordenador fuerte, resulta que

$$s_1 . \dots . s_n . t_1 . \dots . t_m . y \in D$$

y, por lo tanto, $y \in K_D(S)$.

De este resultado se siguen :

A. $K_D(S)$ es el sistema deductivo débil engendrado por $S \cup D$.

Es claro que $K_D(S)$ es un sistema deductivo débil que contiene $S \cup D$; si D' es un sistema deductivo débil que contiene $S \cup D$, entonces, si $z \in K_D(S)$, $s_1 . \dots . s_n . z \in D$, en donde $s_i \in S$. Por lo tanto, $s_1 . \dots . s_n . z \in D'$ y $s_i \in D'$ y, por M.P., $z \in D'$.

B. $C_{K_D(S)}(S) = K_D(S)$.

Este resultado es importante puesto que nos dice que "toda consecuencia fuerte es una consecuencia débil, si cambiamos de sistema deductivo". Si D es un sistema deductivo fuerte, absorbente por la derecha, $K_D(S)$ es un sistema deductivo débil.

El inconveniente de este resultado es que el sistema deductivo al que se refieren las consecuencias débiles depende del conjunto S y, en general, no es posible asegurar la existencia de un $K_D(S)$ que valga para todo subconjunto Y de A.

II.8. En este apartado se introduce, en A, una relación de equivalencia, que llamaremos la <u>relación de equivalencia fuerte</u> y que es, precisamente, la relación inducida por el operador K_D sobre el conjunto de los conjuntos unitarios de A:

$$x \sim_D y \quad \text{si, y sólo si,} \quad K_D(x) = K_D(y)$$

si, y sólo si,

existen n, m $\geqslant 1$ tales que $x^{(n)}.y \in D$ e $y^{(m)}.x \in D$.

Si llamamos $[x]_D$ la clase de equivalencia débil de x (ver I.8) y $\bar{x}_D$ la clase de equivalencia fuerte de x, resulta:

1. $[x]_D \subseteq \bar{x}_D$ pero, en general, no coinciden.

Para ver que no coinciden, consideremos $((0,1], .)$, en donde $x.y = 1$ si $x \leqslant y$ y $x.y = y/x$ en otro caso.

Vemos que $[x]_D \neq \bar{x}_D$, ya que $[x]_D = \{x\}$, para cada $x \in (0,1]$ y, en cambio, $\bar{x}_D = (0,1)$, si $x \in (0,1)$.

2. $[x]_D = \bar{x}_D$ si, y sólo si, para todo y de A, $K_D(x) = K_D(y)$ equivale a $C_D(x) = C_D(y)$.

De esta condición necesaria y suficiente se deduce una condición suficiente para que $[x]_D = \bar{x}_D$. Dice: "para todo par x, y de A, $x^{(n)}.y \in D$ implica $x.y \in D$" que equivale a "para todo x de A, $C_D(x) = K_D(x)$".
Esta condición, sin embargo, no es necesaria: basta considerar el caso de los grupos.

Podría parecer que la condición suficiente de 2) es extraña - y que, por lo tanto, no se da a menudo - pero no es así: la verifican las álgebras de Hilbert, la verifican los sistemas deductivos que, para toda terna x, y, z de A,

$$(x.(y.z)).((x.y).(x.z)) \in D.$$

La verifican asímismo los sistemas deductivos de los grupos, pero el motivo es la normalidad de los sistemas deductivos y la existencia de inversos.

En el capítulo tercero, analizando las propiedades de los sistemas deductivos clásicos, encontramos los <u>sistemas deductivos completos</u>. Estos se parecen mucho a aquellos, si bien son diferentes. Con ellos se construye una lógica positiva en el sentido de A. Monteiro [1971].

III.1. Recordemos que, si $(A,.)$ es una estructura algebraica y D es un conjunto no vacío $\subseteq A$, se dice que D es un <u>sistema deductivo clásico</u> si, y sólo si, satisface:

DC1. $x.(y.x) \in D$, para todo x, y de A;

DC2. $(x.(y.z)).((x.y).(x.z)) \in D$, para todo x, y, z de A;

DC3. M.P.

Diremos que D es <u>propio</u> si $D \neq A$ y que es <u>maximal</u> si es propio y, además, si $D' \supseteq D$, en donde D' es un sistema deductivo clásico, entonces $D' = D$ o $D' = A$.

Las <u>tesis clásicas</u> de A son los elementos de la intersección de todos los sistemas deductivos clásicos; es decir, si $\mathfrak{D}$ es la familia de todos los sistemas deductivos clásicos, entonces

$$T = \bigcap_{D \in \mathfrak{D}} D .$$

$(A,.)$ es <u>consistente desde el punto de vista clásico</u> si, y sólo si, $T \neq A$.

Se demuestra, es un resultado conocido, que todo sistema deductivo clásico es un sistema deductivo débil y absorbente por la derecha. Al revés, en cambio, es falso.

Es conocido también que en todo sistema deductivo clásico se verifican las siguientes propiedades:

1. $\leq_D$ es un preorden y $\equiv_D$ es una relación de equivalencia;
2. $x \leq_D y.x$;
3. $z \leq_D x.y$ implica $z.x \leq_D z.y$;
4. $z \leq_D x.y$ implica $x \leq_D z.y$ (conmutación de premisas: C.P.);
5. $x \leq_D y$ implica $z.x \leq_D z.y$ (isotonía por la izquierda);
6. $x \leq_D y$ implica $y.z \leq_D x.z$ (antiisotonía por la derecha);
7. $x.y \leq_D (z.x).(z.y)$ (leyes del silogismo);
8. $x.y \leq_D (y.z).(x.z)$
9. $x.(y.z) \equiv_D (x.y).(x.z)$ (la operación inducida en $A/\equiv_D$ es "autodistributiva por la izquierda");
10. $x.y \equiv_D y$ para todo y de A si, y sólo si, $x \in D$ (la operación cociente posee "neutro por la izquierda");
11. $x.(x.y) \equiv_D x.y$;
12. $x \leq_D (x.y).y$;
13. $\equiv_D$ es una <u>congruencia</u> (compatible con la operación).

Este último punto es el que abre el fuego del tercer capítulo. En I.8 hemos visto que, si D es un sistema deductivo débil y absorbente por la derecha, es clase de equivalencia. Ahora debemos preguntarnos si la relación y la operación son "compatibles".

Una condición suficiente - y vemos que no es necesaria - para que $\equiv_D$ sea una congruencia - en el supuesto de que D sea un sistema deductivo débil y absorbente por la derecha - es que verifique las leyes del silogismo.

Este resultado permite introducir el concepto de sistema deductivo semicompleto: es todo sistema deductivo débil y absorbente por la derecha que, además, satisface las leyes del silogismo.

Se demuestra entonces, por medio de ejemplos, que un sistema deductivo semicompleto - que cumple las propiedades 1), 5), 6), 7), 8) y M.P. - no tiene porque cumplir ninguna más. Los sistemas deductivos semicompletos se hallan bastante alejados de los sistemas deductivos clásicos. Por este motiov introducimos una nueva definición: llamaremos sistema deductivo completo a todo sistema deductivo semicompleto que, además, verifique C.P. Un sistema deductivo completo satisface 1), 2), 4), 5), 6), 7), 8), 10), 12), DC1 y DC3. Se comprueba que hay sistemas deductivos completos que no verifican las propiedades restantes.

III.2. La definición de sistema deductivo completo que hemos dado es superabundante. En este apartado la damos por medio de cinco axiomas independientes que son:

SDC1. reflexiva: $x.x \in D$, para todo x de A;

SDC2. M.P.: si $x.y \in D$ y $x \in D$, entonces $y \in D$;

SDC3. la absorción por la derecha: $A.D \subseteq D$;

SDC4. una ley del silogismo: $(x.y).((z.x).(z.y)) \in D$;

SDC5. C.P.: $x.(y.z) \leq_D y.(x.z)$.

Para comprobar que estos axiomas son independiemtes, consideramos los ejemplos siguientes:

<u>Independencia de SDC1.</u> $A = \{x,y,z\}$ y la operación:

.	x	y	z
x	x	y	y
y	x	x	x
z	x	y	y

$D = \{x\}$ verifica SDC2, 3, 4 y 5, pero no verifica SDC1.

<u>Independencia de SDC2.</u> $A = \{x,y\}$, dotado de la operación: $x.x = y.y = x.y = y.x = x$. No se verifica SDC2, si $D = \{x\}$.

<u>Independencia de SDC3</u>. $A = Z$ y la operación $+$ y $D = 2Z$. Vemos que SDC3 es falso.

<u>Independencia de SDC4</u>. $A = \{x,y,z,t\}$ y la operación:

.	x	y	z	t
x	x	y	z	t
y	x	x	z	x
z	x	y	x	x
t	x	x	x	x

y $D = \{x\}$.

<u>Independencia de SDC5</u>. $A = \{x,y,z\}$ y la operación:

.	x	y	z
x	x	z	z
y	x	x	z
z	x	x	x

y $D = \{x\}$.

III.3. En este apartado se estudian las diferencias entre los sistemas deductivos clásicos y los sistemas deductivos completos. Vemos, en primer lugar, que "todo sistema deductivo clásico es completo, pero que al revés es falso".

Para comprobar que existen sistemas deductivos completos no clásicos, basta analizar el siguiente ejemplo: $A = \{x,y,z\}$, la operación dada por la tabla:

$\cdot$	x	y	z
x	x	y	z
y	x	x	y
z	x	x	x .

Sea $D = \{x\}$. No es clásico, puesto que $y.(y.z) \not\equiv_D y.z$ lo que hace que falle 11). En cambi es clásico.

Todo sistema deductivo completo – y, por ende, todo sistema deductivo clásico – es fuerte. Este resultado vincula este capítulo con el capítulo II que, hasta ahora, parecían independientes.

La demostración utiliza el hecho de que sea congruencia y, por lo tanto, la ley del silogismo ; utiliza también C.P. y M.P.

Para obtener el resultado pretendido se demuestra, en primer lugar, que si $s_{ij} = (h_1, \ldots, h_i, \ldots, h_j, \ldots, h_n)$ y $s_{ji} = (h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_i, \ldots, h_n)$, entonces $s_{ij}.x \in D$ si, y sólo si, $s_{ji}.x \in D$. Visto esto y aplicando la ley del silogismo, la demostración sale fácilmente.

Pero el resultado más interesante es haber demostrado que, si un sistema deductivo completo D verifica cualquiera de las propiedades DC2, 3), 9) y 11) – que son las que le faltan a un sistema completo de las que verifica un sistema deductivo clásico – es clásico ; es decir, cualquiera de estas propiedades caracteriza la diferencia entre un sistema deductivo completo y un sistema deductivo clásico.

Es claro que, si un sistema deductivo completo satisface DC2 ó 9), es clásico.

Lo que no resulta tan claro es que, si un sistema deductivo completo verifica 11), sea clásico.

La demostración se basa en el hecho de que todo sistema deductivo completo es fuerte y, por lo tanto, $K_D(S)$ es un sistema deductivo débil, cualquiera que sea $S \subseteq A$. Elegimos el subconjunto $S = \{ x.y,\ y.(x.z) \}$. Entonces por la transitiva de $K_D(S)$ resulta que $x.(x.z) \in K_D(S)$; para todo x, z de A y todo y de A tenemos una de las tres posibilidades siguientes:

$$(x.y).(x.z) \in D\ ;$$

$$(y.(x.z)).(x.z) \in D\ ;$$

$$(y.(x.z)).((x.y).(x.z)) \in D \qquad \text{(en virtud de 11))}.$$

A partir de aquí la demostración es inmediata.

Si se verifica 3), puesto que $x \leqslant_D (x.y).y$ para todo x, y de A, resulta que, para todo x, y de A, $x.(x.y) \leqslant_D x.y$; por lo tanto, se verifica 11).

Este teorema nos dice que la diferencia entre un sistema deductivo completo y un sistema deductivo clásico se puede considerar desde un punto de vista algebraico y desde un punto de vista lógico.

Desde el punto de vista algebraico resulta que, si D es un sistema deductivo completo - no clásico - $A/\equiv_D$ no es una álgebra de Hilbert puesto que la operación inducida no es autodistributiva por la izquierda.

Desde el punto de vista lógico tenemos que, si D es un sistema deductivo completo - no clásico -, puede ocurrir que un elemento y de A sea consecuencia fuerte de un cierto elemento x de A y, en cambio, no ser consecuencia débil de este elemento. En otras palabras,

$$y \in K_D(x) \text{ no implica necesariamente } y \in C_D(x).$$

Por lo tanto, en un sistema deductivo completo se puede hablar del grado de una premisa: si $n_{x,y} > 0$, $n_{x,y} \in N$ y $x^{(n_{x,y})}.y \in D$ y, para todo $m < n_{x,y}$, $x^{(m)}.y \notin D$, diremos que $n_{x,y}$ es el grado de la premisa x en la deducción de y.

En lógica clásica el grado de una premisa es siempre igual a 1, puesto que un sistema deductivo clásico satisface la propiedad 11). Otra diferencia entre los sistema deductivos completos y los sistemas deductivos clásicos es que, si estos últimos verifican $\equiv_D = \sim_D$, aquellos, no.

Un último resultado que se obtiene en este apartado es una caracterización de los sistemas deductivos completos por medio del operador K_D. Dice : "D es un sistema deductivo completo si, y sólo si, para todo $S \subseteq A$, $K_D(S)$ también lo es". (Este resultado es válido también si cambiamos la palabra 'completo' por la palabra 'clásico'.)

Los apartados que faltan para cerrar el trabajo están destinados a dar resultados lógicos - válidos en el caso clásico - para el caso completo. En otras palabras, en ellos se hace lógica con sistemas deductivos completos. La inspiración de estos apartados se debe al trabajo de A. Monteiro [1971].

III.4. Para distinguir los sistemas deductivos clásicos y los sistemas deductivos completos engendrados por $S \subseteq A$, los designaremos, respectivamente, $D(S)$ y $\langle S \rangle$.

Dado que el conjunto de los sistemas deductivos completos contiene el conjunto de los sistemas deductivos clásicos resulta que

$$\langle S \rangle \subseteq D(S)$$

y, en general, no coinciden.

Ya hemos dicho que, si D es un sistema deductivo completo, entonces $K_D(S)$ también lo es ; pues bien, $K_D(S)$ es, precisamente, el sistema deductivo completo engendrado por $S \cup D$. Es decir,

$$K_D(S) = \langle S \cup D \rangle .$$

La demostración se basa en el hecho de que, lo hemos dicho en II.7, $K_D(S)$ es el sistema deductivo débil engendrado por $S \cup D$. Este hecho nos da la inclusión en un sentido. La inclusión en el otro sentido proviene del hecho siguiente: $K_D(S)$ es completo y contiene $S \cup D$.

Si designamos $\mathcal{D}_c$ el conjunto de todos los sistemas deductivos completos, el conjunto

$$T_c = \bigcap_{D \in \mathcal{D}_c} D$$

se denomina <u>conjunto de las tesis completas</u>.

Estas definiciones nos llevan de una manera natural al resultado siguiente: "Si $(A,.)$ es completamente inconsistente, es clásicamente inconsistente".

Al revés, en cambio, es falso. Ello hace que sistemas inconsistentes desde el punto de vista clásico - y, por lo tanto, carentes de interés a la hora de realizar con ellos lógica clásica - puedan no ser inconsistentes desde el punto de vista completo - y, por lo tanto, en ellos se puede hacer todavía lógica "completa".

Vemos también que una condición necesaria y suficiente para que todo sistema completo sea clásico es que T_c sea un sistema deductivo clásico.

El resultado se obtiene fácilmente si se observa que, si un sistema deductivo de cualquier tipo contiene un sistema deductivo clásico,es clásico.

A pesar de esto un sistema deductivo clásico puede contener sistemas deductivos completos no clásicos.

Todo sistema deductivo completo D coincide con un cierto conjunto de consecuencias fuertes respecto de T_c :

$$D = \langle D \rangle = \langle D \cup T_c \rangle = K_{T_c}(D).$$

De esta manera hemos obtenido el <u>teorema de compacidad</u> :

$$S = K_{T_c}(S).$$

La diferencia que existe entre este teorema y el teorema clásico de compacidad es que, <u>en el caso completo</u>,

$x \in \langle S \rangle$ si, y sólo si, existe una sucesión finita de elementos de S tal que $s'.x \in T_c$,

mientras que <u>en el caso clásico</u>,

$x \in D(S)$ si, y sólo si, existe un subconjunto finito H de S tal que $H.x \in T$.

Es evidente que, si existe un subconjunto H, existe una sucesión – el orden de los elementos no es importante, puesto que se verifica C.P. en ambos casos – pero puede existir una sucesión y no existir ningún subconjunto, puesto que en una sucesión está permitido que los elementos se repitan, y en un conjunto no lo está. Véase el ejemplo del apartado III.3 :

$$z \in \langle y \rangle \quad y, \text{ en cambio, } z \notin D(y).$$

Otro resultado realmente importante que hemos obtenido es el teorema de la deducción ; dice :

$x \in K_{T_c}(D \cup \{z\}) = \langle D \cup \{z\} \rangle$ si, y sólo si, existe un número natural $n \geq 1$ tal que $z^{(n)}.x \in D$.

Daremos su demostración y algunas consideraciones :

$z \in D \cup \{z\} \subseteq \langle D \cup \{z\} \rangle$; si $z^{(n)}.x \in D$, aplicando M.P., resulta que $x \in \langle D \cup \{z\} \rangle = K_{T_c}(D \cup \{z\})$.

$x \in K_{T_c}(D \cup \{z\})$ si, y sólo si, $z_1. \ldots .z_n.x \in T_c$, en donde $z_i = z$ ó $z_i \in D$ y, por C.P., resulta que

$$y_1. \ldots .y_{n-k}.z. \overset{k)}{\ldots} .z.x \in T_c \text{ y, por M.P.,}$$

$$z. \overset{k)}{\ldots} .z.x \in D \quad (\text{ya que cada } y_j \in D).$$

Si $k = 0$, entonces por la absorción por la derecha:

$z.x \in D$.

Este teorema generaliza el teorema de la deducción de

Tarski pues, si D es un sistema deductivo clásico, entonces $\langle D \cup \{z\} \rangle$ también lo es y, por lo tanto, $n = 1$ (los sistemas deductivos clásicos satisfacen 11)).

Este teorema - de forma análoga a como se hace en el caso clásico - nos permite caracterizar los sistemas deductivos completos engendrados por D y por $z \in A$. Tenemos:

$$\langle D \cup \{z\} \rangle = D \vee \langle z \rangle = \{x \in A: z \leq_D z^{(n-1)}.x,\ n \geq 1\}.$$

III.5. En este apartado deseamos caracterizar los sistemas deductivos completos y maximales.

Un sistema deductivo completo M de $(A,.)$ es <u>maximal</u> si, y sólo si, para cualquier otro sistema deductivo completo D, $D \supseteq M$ implica $D = M$ ó $D = A$. Suponemos $M \neq A$.

Una caracterización de los sistemas deductivos completos y maximales en términos de la ley de composición de $(A,.)$ es la siguiente:

Un sistema deductivo completo de $(A,.)$ es maximal si, y sólo si,

1. $M \neq A$;
2. si $x, y \notin M$, existe un número natural $n_{x,y} \geq 1$ tal que $x^{(n_{x,y})}.y \in M$.

La diferencia entre esta caracterización y la caracterización de los sistemas deductivos clásicos y maximales es que, en la de estos últimos, $n_{x,y} = 1$, para todo par $x,y \in A$. Esta diferencia proviene del teorema de la deducción.

El hecho de que $n_{x,y} = 1$ para todo $x, y \in A$ es tan característico de los sistemas deductivos clásicos y maximales que, si un sistema deductivo completo satisface tal condición, es clásico.

Concretando, si un sistema deductivo completo D es tal que, si $x \notin D$ e $y \notin D$, implica $x.y \in D$, entonces D es clásico y, por lo tanto, maximal y clásico.

Debemos demostrar que, para todo par de elementos x, y de A,

$$x^{(2)}.y \leqslant_D x.y \quad .$$

En efecto:

- si $x \notin D$ e $y \notin D$, por hipótesis, $x.y \notin D$;
- si $y \in D$, por la absorción, $x.y \in D$;
- si $y \notin D$ y $x \in D$, entonces no existe ningún entero natural $n \geqslant 1$ tal que $x^{(n)}.y \in D$. Por lo tanto, $x^{(2)}.y \notin D$ y $x.y \notin D$ y, aplicando de nuevo la

hipótesis, $(x^{(2)}.y).(x.y) \in D$.

La condición "$x \notin D$, $y \notin D$ implica $x.y \in D$" es tan característica que, si un subconjunto D que verifica M.P. y la absorción por la derecha la verifica, entonces es un sistema deductivo clásico y maximal.

Debemos demostrar que D es un sistema deductivo completo ; es decir, que cumple SDC1, SDC4 y SDC5.

<u>SDC1</u>. si $x \notin D$, por la hipótesis, $x.x \in D$;
si $x \in D$, por la absorción, $x.x \in D$.

<u>SDC4</u>. Debemos ver que, para toda terna x, y, z de A, $(y.z).((x.y).(x.z)) \in D$.

- Si $z \in D$, por la absorción, es inmediato;
- si $z \notin D$ y $x \notin D$, entonces, por hipótesis $x.z \in D$ y aplicando la absorción, terminado;
- si $z \notin D$ y $x \in D$ e $y \notin D$, entonces $x.z \notin D$ y $x.y \notin D$ (por M.P.) y $(x.y).(x.z) \in D$ y, por la absorción, hemos terminado ;
- si $z \notin D$ y $x \in D$ e $y \in D$, entonces, por M.P., $x.z \notin D$ y $x.y \in D$, de donde, por M.P., $(x.y).(x.z) \notin D$ y, de nuevo, por M.P., $y.z \notin D$. Por hipótesis, $(y.z).((x.y).(x.z)) \in D$.

<u>SDC5.</u> El razonamiento es análogo.

Un hecho importante que es preciso constatar aquí es que, en el caso clásico, un sistema deductivo M es maximal si, y sólo si, $A/\equiv_M$ tiene exactamente dos clases.

Esto no ocurre si el sistema deductivo es completo:

Consideremos $\langle (0,1], . \rangle$, en donde $x.y = 1$ si $x \leqslant y$ y $x.y = \frac{y}{x}$ si $y < x$. Podemos demostrar fácilmente que $M = \{1\}$ es un sistema deductivo completo (Sales [1974]) y maximal. Ahora bien, $x \equiv_{\{1\}} y$ si, y sólo si, $x = y$ y, por lo tanto, $A/\equiv_{\{1\}}$ tiene la misma potencia que A, lo cual contradice que el cociente tiene dos clases.

La dificultad radica en el hecho de que la relación de equivalencia que hemos utilizado no es la adecuada. La adecuada es la relación de equivalencia fuerte. Es decir, D es un sistema deductivo completo y maximal si, y sólo si, $A/\sim_D$ tiene dos clases.

La demostración va de la siguiente manera:

Si D es un sistema deductivo completo y maximal y $x, y \in D$, entonces $x.y \in D$ e $y.x \in D$ y $x \sim_D y$; si $x, y \notin D$, entonces existen dos números $n, m \geqslant 1$ tales que $x^{(n)}.y \in D$ e $y^{(m)}.x \in D$ y, por lo tanto, $x \sim_D y$; si $x \in D$ e $y \notin D$, entonces $y.x \in D$ pero en cambio, cualquiera que sea $n \geqslant 1$, $x^{(n)}.y \notin D$.

Por lo tanto, $A/\sim_D$ tiene sólo dos clases que son $A-D$ y D.

Si $A/\sim_D$ tiene dos clases, entonces una de ellas contiene D y, por lo tanto, $D \subseteq \bar{x}_D$, en donde $x \in D$. Si $D \subsetneq \bar{x}_D$, entonces existe un $y \in \bar{x}_D$ tal que $y \notin D$, pero esto no es posible puesto que $y \in \bar{x}_D$ implica $x^{(n)}.y \in D$ y, por M.P., $y \in D$.
Por lo tanto, $A/\sim_D = \{D, A-D\}$ y entonces, si $x \notin D$ e $y \notin D$, $x \sim_D y$ y, en virtud de la definición de $\sim_D$ y de la caracterización de los sistemas deductivos completos y maximales, D es maximal.

Se llama radical completo de A y se designa $R_c(A)$ la intersección de todos los sistemas deductivos completos y maximales de A.

Resulta que $R_c(A) \subseteq R(A)$, en donde $R(A)$ designa el radical clásico de A, pero en general no coinciden.

Si $(A,.)$ no admite sistemas deductivos completos y maximales, entonces $R_c(A) = R(A) = A$.

III.6. Si $x \notin T_c$, entonces existen sistemas deductivos completos que no contienen el elemento x; la colección formada por estos sistemas deductivos completos es inductiva superiormente. El lema de Zorn garantiza la existencia de maximales.

Cada uno de estos sistemas deductivos - maximales entre los que no contienen x - se llama un <u>sistema deductivo completo ligado a x</u> y se designa D_x. Hemos hallado una caracterización de los sistemas deductivos completos ligados a x. Es la siguiente: un sistema deductivo completo D está ligado a x ($x \notin T_c$) si, y sólo si, cumple:

1. $x \notin D$;
2. si $y \notin D$, entonces existe un $n_{x,y} \geqslant 1$ tal que $y^{(n_{x,y})}.x \in D$.

Una parte de la demostración está basada en el teorema de la deducción.

Si D está ligado a x, es preciso que $x \notin D$ y 1) se satisface; supongamos ahora que $y \notin D$, entonces $\langle D \cup \{y\} \rangle \supsetneq D$ y, puesto que D es maximal entre los que no contienen x, $x \in \langle D \cup \{y\} \rangle$ y, aplicando el teorema de la deducción, 2) está probado.

Recíprocamente, si $x \in D$ y D' es un sistema deductivo completo tal que $D \subsetneq D'$, consideremos un elemento $y \in D'$ tal que $y \notin D$. Por 2) existe $n \geqslant 1$ tal que

$$y^{(n)}.x \in D \subsetneq D'$$

y, por M.P., $x \in D'$; resulta pues que D es maximal entre los que no contienen x.

La familia de los sistemas deductivos completos que contienen D y no contienen x es inductiva superiormente y, por el lema de Zorn, admite un maximal D' tal que

$$x \notin D' \qquad y \qquad D' \supseteq D.$$

La proposición que enunciamos es que D' es un sistema deductivo completo ligado a x.

Si $D'' \supsetneq D'$, entonces $D'' \supsetneq D$ y, por lo tanto, $x \in D''$, pues, en caso contrario, $D'' \supseteq D$ y $x \in D''$ y D' es el máximo con estas condiciones. Contradicción.

III.7. Recordemos que los <u>elementos piercianos</u> de (A,.) son los elementos de la forma $((x.y).x).x$. Recordemos también qúe, si P designa el conjunto de los elementos piercianos, $D(P) = R(A)$.

Deseamos, ¡por qué no!, dar una generalización de este resultado en el caso de los sistemas deductivos completos. Nos encontramos con que, en general, $\langle P \rangle \neq R_c(A)$,

Consideremos $((0,1],.,\{1\})$ y entonces tendremos

$R_c(A) = \{1\}$ y, en cambio, $\langle P \rangle = A$. Basta observar que

$$((\frac{2}{3}.\frac{1}{3}).\frac{2}{3}).\frac{2}{3} \neq 1.$$

Esto nos lleva a introducir un nuevo concepto de elemento pierciano. Llamamos <u>elemento pierciano en sentido amplio</u> todo elemento de la forma

$$((x.y)^{(n)}.x).x$$

y P' el conjunto de todos los elementos piercianos en sentido amplio.

Es fácil comprobar que $P \subseteq P'$; que $D(P) = D(P')$; que $\langle P \rangle \subseteq \langle P' \rangle$. Todo ello nos proporciona la siguiente configuración :

$$\langle P \rangle \subseteq \langle P' \rangle \subseteq D(P') = D(P) = R(A).$$

En el caso completo se verifica el siguiente teorema :

$$R_c(A) \subseteq \langle P' \rangle,$$

pero en general no son iguales.

Supongamos que $x \notin \langle P' \rangle$; existe, entonces, un sistema deductivo completo D_x ligado a x tal que $\langle P' \rangle \subseteq D_x$. Para todo z de A tenemos que

$$((x.z)^{(n)}.x).x \in D_x$$

para todo $n \in N^*$; por lo tanto, por M.P.,

$$(x.z)^{(n)}.x \notin D_x$$

para ningún $n \in N^*$. Esto implica, puesto que D_x

es un sistema deductivo completo ligado a x, que $x.z \in D_x$ y, por lo tanto,

$$z \in \langle D_x \cup \{x\} \rangle .$$

La arbitrariedad de z hace que $\langle D_x \cup \{x\} \rangle = A$. Esto nos asegura que D_x es maximal en A. Por lo tanto, $x \notin R_c(A)$.

Para ver que no son iguales basta considerar de nuevo $((0,1],.,\{1\})$ y vemos que $\langle P' \rangle = A$.

Todo lo expuesto nos da la siguiente configuración:

$$\begin{array}{l} R_c(A) \subsetneq \\ \langle P \rangle \subsetneq \end{array} \langle P' \rangle \subseteq D(P') = D(P) = R(A).$$

No hemos sido capaces de hallar ninguna relación entre $R_c(A)$ y P .

Hemos hallado, esto sí, una justificación de porque $R_c(A)$ y $\langle P' \rangle$ no coinciden y es que $\langle P' \rangle$ es un sistema deductivo clásico, mientras que $R_c(A)$, en general, no lo es.

En la demostración anterior hemos visto que, si $x \notin \langle P' \rangle$, existe un sistema deductivo completo ligado a x, D_x, que es maximal. Para demostrar que es clásico utilizaremos el hecho de que, si $z \notin D_x$ y $t \notin D_x$, entonces $t.z \in D_x$.

Hemos visto también en la demostración anterior que, para todo $z \in A$, $x.z \in D_x$.
Si $t \notin D_x$, existe un sistema deductivo completo ligado a t, D_t, tal que $D_x \subseteq D_t$. Ahora bien, $D_t \neq A$, pues $t \notin D_t$. Pero D_x es maximal, luego $D_x = D_t$. Así pues $t \in \langle P' \rangle \subseteq D_t$ e $t.z \in D_t = D_x$. Ello nos dice que $x \notin R(A)$ y entonces

$$R(A) \subseteq \langle P' \rangle$$

y $R(A)$ es un sistema deductivo clásico; por lo tanto, $\langle P' \rangle$ también lo es.

De esta manera obtenemos finalmente la configuración siguiente :

$$\begin{array}{l} R_c(A) \subsetneq \\ \langle P \rangle \subsetneq \end{array} \langle P' \rangle = D(P') = D(P) = R(A).$$

Cuando $R_c(A) = T_c$ decimos que $(A,.)$ es <u>deductivamente semisimple</u> desde un punto de vista completo.

Si $((x.y)^{(n)}.x).x \in T_c$ para todo x, y de A, entonces $\langle P' \rangle = T_c$ y, por lo tanto, $R_c(A) = T_c$. De donde $R(A) = T = T_c$.

El recíproco, en cambio, no podemos garantizarlo. Este resultado constituye el <u>teorema de semisimplicidad</u> en el caso completo.

III.8. El trabajo termina analizando los sistemas deductivos completos y <u>completamente</u> <u>irreducibles</u>.

Un sistema deductivo completo $D \neq A$ es <u>irreducible</u> si, y sólo si, $D = D_1 \cap D_2$ implica $D = D_1$ ó $D_2 = D$.

Un sistema deductivo completo $D \neq A$ es <u>completamente</u> <u>irreducible</u> si, y sólo si, $D = \bigcap_{i \in I} D_i$ implica $D = D_i$ para un cierto $i \in I$.

Hemos demostrado que :

Todo sistema deductivo completo y maximal es completamente irreducible.

Si $D = \bigcap_{i \in I} D_i$, entonces $D_i \supseteq D$ para todo $i \in I$. Pero $D \neq A$, por lo tanto existe un $x \in A$ tal que $x \notin D$. Existe un $i_o \in I$ tal que $x \notin D_{i_o}$. Pero, si D es maximal, para todo $i \in I$, $D_i = D$ ó $D_i = A$. De ahí que $D_{i_o} = D$.

Un sistema deductivo completo D es completamente irreducible si, y sólo si, existe un $x \notin D$ y $D = D_x$.

Si $D = D_x$ y $D = \bigcap_{i \in I} D_i$, entonces existe un $D_i \supseteq D$ tal que $x \notin D_i$; por lo tanto, $D_i = D$.

Si D no está asociado a ningún $x \in A - D$, consideremos $D' = \bigcap_{x \in A-D} D_x$, en donde $D_x \supsetneqq D$. Resulta que $D' \supseteq D$. Si $t \in \bigcap_{x \in A-D} D_x$, entonces, para todo $x \in A-D$, $t \in D_x$. De donde, $t \in D$. Por lo tanto $D = \bigcap_{x \in A-D} D_x$ y $D_x \supsetneqq D$ para todo $x \in A-D$. Esto termina la demostración.

Si $x \notin T_c$ y, para todo $n \in N^*$, $y \leqslant_{T_c} y^{(n-1)}.x$, entonces existe un sistema deductivo completo completamente irreducible que los separa.

Todo sistema deductivo completo propio es intersección de sistemas deductivos completos y completamente irreducibles.

T_c es la intersección de todos los sistemas deductivos completos y completamente irreducibles.

Si todo sistema deductivo completo y completamente irreducible es maximal, entonces $R_c(A) = T_c$ y, por ende, $T_c \subseteq \langle P \rangle = D(P) = R(A) = T$.

Barcelona 1975.

Bibliografía

BIRKHOFF (Garret)
(1948) Lattice Theory. Colloquium Publications. Vol.XXV.

BOURBAKI (Nicolás)
(1970) Théorie des ensembles. Gauthier-Villars. París.

CURRY (Haskell B.)
(1952) Leçons de Logique Alg'ebrique. Gauthier-Villars.

DIEGO (Antonio)
(1965) Sobre Algebras de Hilbert. Bahía blanca.
(1966) Sur les algébres de Hilbert. Gauthier-Villars.

DUBREIL (Paul), DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise)
(1964) Leçons d'algèbre moderne. Dunod. París.

DUBREIL-JACOTIN (M.L.), CROISOT (R.), LESIEUR (L.)
(1953) Leçons sur la théorie des treillis. Cahiers scientif.

ENDERTON (Herbert B.)
(1972) A mathematical introduction to logic. Ac.Press.London.

FUCHS (L.)
(1963) Partially ordered algebraic systems. Pergamon press.

HALMOS (Paul R.)
(1955) Algebraic Logic I. Compositio Math., 12.

HILBERT (david)
(1923) Die Logischen Grundlagen der Mathematik. Mat.Ann.,88.

KURATOWSKI (Casimir)
(1922) Sur l'operation $\bar{A}$ de l'Analysis Situs. Fund.Math., 3.

MENDELSON (Elliott)
(1963) Introduction to Mathematical Logic. Van Nostrand.

MONTEIRO (Antonio)
(1960) Sur le calcul propositionnel implicatif positif.

(1971) La semi-simplicité des algèbres de Boole topologiques et les sistemes deductivs. U.M.A., 25.

PORTE (jean)

(1965) Recherches sur la théorie générale des systèmes formels et sur les systemes connectifs. Gauthier-Villars.

RASIOWA (Helena)

(1974) An algebraic approach to non-classical logics. North-Holl.

RASIOWA (Helena), SIKORSKI (Roman)

(1970) The Mathematics of Metamathematics. Mon.Math.

SALES (Francisco de Asís)

(1971) Operaciones ordenadoras y álgebras de Hilbert. R.A.M.E.

(1973) Algebras de Hilbert. Curso monográfico de doctorado.

(1974) Sistemas deductivos. Ibid.

(1976) Consecuencia y deducción en sistemas lógicos. Memoria de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barna.

SZASZ (G.)

(1971) Théorie des treillis. Dunod.

TARSKI (Alfred)

(1930) Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik.

(1930) Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenchaften. Mon.Math.und Phys., 37.

(1930) Untersuchungen über der Aussagenkalkül. C.R.S.S et L.

(1935) Grundzüge des Systemenkalkül, Erster Teil. Fund.Math.,25

(1936) Idem, Zweiter Teil. Ibid., 26.

(1972) Logique, sémantique, metamathématique, tome 1.

(1974) Idem, tome 2. Armand Colin. París.

WARD (Morgan)

(1942) The closure operators of a lattices. Ann. Math., 43, 2º.

Nomenclátor

Índice

FUNDACION JUAN MARCH
SERIE UNIVERSITARIA

Libros Publicados:

1.– *Semántica del lenguaje religioso/ A. Fierro*
2.– *Calculador en una operación de rectificación discontinua/A. Mulet*
3.– *Skarns en el batolito de Santa Olalla/F. Velasco*
4.– *Combustión de compuestos oxigenados / J. M. Santiuste*
5.– *Películas ferromagnéticas a baja temperatura / José Luis Vicent López*
6.– *Flujo inestable de los polímeros fundidos /José Alemán Vega*
7.– *Mantenimiento del hígado dador in vitro en cirugía experimental*
José Antonio Salva Lacombe