

*La Serie Universitaria de la Fundación Juan March presenta resúmenes, realizados por el propio autor, de algunos estudios e investigaciones llevados a cabo por los becarios de la Fundación y aprobados por los Asesores Secretarios de los distintos Departamentos.*

*El texto íntegro de las Memorias correspondientes se encuentra en la Biblioteca de la Fundación (Castelló, 77. Madrid-6).*

*La lista completa de los trabajos aprobados se presenta, en forma de fichas, en los Cuadernos Bibliográficos que publica la Fundación Juan March.*

*Los trabajos publicados en Serie Universitaria abarcan las siguientes especialidades:  
Arquitectura y Urbanismo; Artes Plásticas;  
Biología; Ciencias Agrarias; Ciencias Sociales;  
Comunicación Social; Derecho; Economía; Filosofía;  
Física; Geología; Historia; Ingeniería;  
Literatura y Filología; Matemáticas; Medicina,  
Farmacia y Veterinaria; Música; Química; Teología.  
A ellas corresponden los colores de la cubierta.*

Edición no venal de 300 ejemplares  
que se reparte gratuitamente a investigadores,  
Bibliotecas y Centros especializados de toda España.

Fundación Juan March



FJM-Uni 106-Usó  
Estudio clásico de las correcciones r  
Usón Finkenzeller, Juan Manuel.  
1031552



Biblioteca FJM

Fundación Juan March (Madrid)

SERIE UNIVERSITARIA



Fundación Juan March

Juan Manuel Usón Finkenzeller

Estudio clásico de las  
correcciones radiactivas en el  
átomo de hidrógeno

FJM  
Uni-  
106  
Usó  
106

106 Estudio clásico de las correcciones radiactivas en el átomo de hidrógeno/Juan Manuel Usón Finkenzeller.



Fundación Juan March

Serie Universitaria

106



Juan Manuel Usón Finkenzeller

Estudio clásico de las  
correcciones radiactivas en el  
átomo de hidrógeno



Fundación Juan March  
Castelló, 77. Teléf. 225 44 55  
Madrid - 6

Fundación Juan March (Madrid)

*Este trabajo fue realizado con una Beca de la  
Convocatoria de España, 1977.  
Departamento de FÍSICA.  
Centro de trabajo: Departamento de Física Teórica.  
Facultad de Físicas de la Universidad Complutense. Madrid.*

Depósito Legal: M-32618 - 1979  
I.S.B.N. 84 - 7075 - 145 - x  
Ibérica, Tarragona, 34 - Madrid - 7. .  
Impresión: Gráficas Ibérica, Tarragona, 34 - Madrid - 7.

## I N D I C E

	<u>Página</u>
1. INTRODUCCION . . . . .	7
2. CAMPO DE DIRAC NO LINEAL CARGADO SOMETIDO A LA AC- CION DE UN CAMPO COULOMBIANO . . . . .	10
3. RELACIONES INTEGRALES . . . . .	18
4. RESULTADOS NUMERICOS . . . . .	22
5. AJUSTE DE LAS ENERGIAS. . . . .	44
6. RENORMALIZACION . . . . .	46
7. REFERENCIAS . . . . .	54

**La Fundación Juan March no se solidariza necesariamente con las opiniones de los autores cuyas obras publica.**

## INTRODUCCION

El estudio de las ecuaciones de ondas no lineales se ha hecho en los últimos años cada vez más interesante para los físicos y matemáticos. Una de las razones de este interés estriba en que se trata de un problema en el que la teoría y la aplicación parecen ir de la mano. Por una parte los efectos no lineales pueden tener un papel muy importante en la renovación de nuestra concepción del mundo físico y, por otra, el desarrollo de la tecnología que cada vez descansa más en el estudio de las propiedades fundamentales de los materiales, necesita para ello de ecuaciones no lineales.

Un ejemplo puede ilustrar esta idea: uno de los conceptos más sorprendentes para los matemáticos y físicos que en la actualidad hacen ciencia pura es el de "solitón", introducido en 1967 (ZK67) en el estudio de ciertas ondas en plasmas, uno de los campos en que la tecnología tiene puestas sus esperanzas de cara a la solución del problema de la energía. La primera observación de un solitón se remonta al año 1834 (SC34), en que se observó la propagación de una onda solitaria en un canal durante unos 3 km conservando su forma.

Hoy en día se denomina "onda solitaria" o "kink" a una perturbación que se propaga en un medio si es aislada, tiene una energía finita y mantiene una forma característica al propagarse. Como la velocidad de propagación de una onda solitaria depende de su amplitud, dos de estas ondas pueden llegar a alcanzarse y solaparse. En algunos casos, tras la "colisión" las ondas emergen recuperando su forma inicial. Una de estas ondas solitarias que además es estable frente a colisiones, se denomina "solitón".

La existencia de estas soluciones, que resulta verdaderamente sorprendente ya que las ecuaciones no lineales no verifican el principio de superposición, requiere de la correspondiente ecuación una adecuada combinación de términos no lineales y términos dispersivos.

Estas propiedades sugieren la posibilidad de utilizar ecuaciones de campo no lineales para describir partículas elementales como soluciones localizadas estables, aprovechando las propiedades de las soluciones tipo solitón para establecer modelos de reacciones entre dichas partículas.

Este estudio había sido iniciado independientemente por N. Ro-

sen en 1939 (R039) estudiando la interacción de los campos escalar y electromagnético buscando soluciones localizadas de energía positiva, que no consiguió encontrar.

Diversos autores (FI49, WA66, R067) han estudiado modelos de campos escalares en interacción incluyendo distintos autoacoplos no lineales y buscando en cada caso soluciones estacionarias localizadas tipo partícula.

M. Soler (S070) estudió la influencia de autoacoplos escalares de cuarto orden en las densidades lagrangianas correspondientes a diversos campos (escalar, spinorial) buscando mínimos para las diversas energías con el fin de resolver la arbitrariedad existente en la determinación de la frecuencia de las soluciones estacionarias. Soler consiguió obtener soluciones localizadas para el campo spinorial, demostrando que el estado fundamental de su sistema representa razonablemente una partícula de spin  $1/2$ .

El origen físico de los términos de autoacoplo de cuarto orden se justifica en un trabajo de H. Weyl (WE50) que demuestra que se pueden introducir como una consecuencia dinámica del spin.

Posteriormente, diversos trabajos de A. F. Rañada, Soler y col. desarrollan el modelo anterior (S073, RS73, RR74, RV76) obteniendo diversos modelos de nucleones. Destaquemos que la introducción de términos de Pauli les permitió obtener un modelo en el que la diferencia de masas entre protón y neutrón coincide con el valor obtenido en el marco de la electrodinámica cuántica (protón .45 MeV más pesado que el neutrón), si bien no precisan del conocimiento previo de los factores de forma experimentales. Alternativamente, el estudio de la interacción del campo spinorial con un campo pseudoescalar real, que representa la nube de piones virtuales que rodea a un nucleón, conduce a un modelo en el que la diferencia de masas entre protón y neutrón tiene el signo correcto si bien es aproximadamente el doble del valor experimental.

En todos estos modelos se estudian soluciones en el sistema de referencia propio. Estas soluciones tienen una estructura definida por lo que poseen las características de una onda solitaria debido a la covariancia relativista de las densidades lagrangianas utilizadas. Es difícil estudiar la colisión de dos de estas soluciones por lo que no se ha comprobado hasta la fecha que sean solitones.

Como ya hemos indicado, algunas de estas soluciones proporcionan modelos de partículas elementales cargadas. L. García y



J. M. Usón (GU79) hemos estudiado el balance de fuerzas en estos modelos mostrando que las fuerzas electromagnéticas repulsivas están adecuadamente contrarrestadas por fuerzas atractivas debidas a los términos no lineales de autoacoplo.

En el presente trabajo se desarrolla el estudio del átomo de Hidrógeno, iniciado por A. F. Rañada (RA77) que consideró una aproximación de campo débil, estudiando las condiciones bajo las que el límite lineal de este modelo en teoría clásica de campos coincide con las predicciones de la Mecánica Cuántica Relativista y llegó a la conclusión de que es necesario introducir una constante de acción, lo que establece una relación entre la linealización de una teoría no lineal de campos clásicos y la segunda cuantificación. Obtuvo en forma numérica un continuo de soluciones para cada onda, con frecuencias coincidentes con las correspondientes en el marco de la teoría cuántica relativista para el Hidrógeno propuesta por Dirac (hasta el orden  $\alpha^4$ ).

La inclusión de los efectos que produce el autocampo electromagnético que produce el electrón provoca importantes desajustes en las energías de los diferentes niveles. Hemos estudiado los efectos electrostáticos, dominantes frente a los efectos magnéticos, siendo necesaria una renormalización de la teoría, renormalización que resulta ser finita y en primera aproximación independiente del estado considerado.

## CAMPO DE DIRAC NO LINEAL CARGADO SOMETIDO

## A LA ACCION DE UN CAMPO COULOMBIANO

Vamos a estudiar un modelo simple de átomo de Hidrógeno, en el que el electrón se describe mediante un campo de Dirac no lineal, cargado, sometido a la acción de un campo coulombiano modificado, debido al protón que a su vez se representa mediante una esfera de densidad uniforme de carga positiva.

El sistema se describe mediante la densidad lagrangiana\*:

$$L = L_{DL} + L_{NL} + L_{EM} + L_{INT} \quad (1)$$

siendo:

$$L_{DL} = \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \} - m \bar{\psi} \psi \quad (2-a)$$

donde  $\psi$ , campo de Dirac para el electrón, se interpreta físicamente de forma que:

$$\rho_e \equiv \rho_e(\vec{r}, t) = e \psi^\dagger \psi \quad (3)$$

representa la densidad de carga eléctrica (negativa) en el punto  $(\vec{r}, t)$ .

Como el electrón en el átomo de Hidrógeno se encuentra bastante extendido, (el radio cuadrático medio del electrón en el estado fundamental, según la teoría lineal, es del orden de  $3 \times 10^4$  veces mayor que el radio clásico del electrón), estamos interesados en el límite en el que el campo  $\psi$  del electrón es débil, por lo que suponemos que en la parte no lineal dominan los términos de cuarto orden. La combinación lineal de términos de este orden más general (sin incluir términos derivativos) tie

\* Nuestro convenio es:

$$g^{\mu\mu} = (1, -1, -1, -1) ; F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\hbar = 1, c = 1, e = -|e|, \alpha = e^2/4\pi$$

$\psi$  designa un campo spinorial de cuatro componentes.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} ; \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} ; \text{siendo } \sigma_k \text{ las matrices de Pauli}$$

$$\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

Seguimos el convenio de Einstein sobre suma de super y sub-índices repetidos.

ne la forma:

$$L_{NL} = \lambda \{ (\bar{\Psi}\Psi)^2 + b(\bar{\Psi}\gamma^5\Psi)^2 \} \quad (2-b)$$

es decir, es una combinación lineal genérica de los bilineales co-variantes escalar y pseudoescalar.

Suponemos que el campo electromagnético se describe mediante las ecuaciones de Maxwell. Consideramos por una parte el campo debido al protón, campo externo; y por otra el campo debido al electrón que describimos por medio de la densidad lagrangiana:

$$L_{EM} = -\frac{1}{4} F_e^{\mu\nu} F_{e\mu\nu} \quad (2-c)$$

siendo:

$$F_e^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A_e^\nu - \partial^\nu A_e^\mu \quad (4)$$

(este campo se debe al campo spinorial cargado que es su fuente).

Suponemos válido el principio de acoplo mínimo para describir la interacción del campo spinorial con el campo electromagnético total, por lo que finalmente:

$$L_{INT} = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_{e\mu} - e\bar{\Psi}\gamma^0\Psi A_{po} \quad (2-d)$$

Nótese que la distinción de los campos electromagnéticos debidos al electrón y al protón es posible debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell que se derivan de  $L_{EM}$ .

$A_{po}$ , única componente no nula de  $A_p$  es:

$$A_{po} = -\frac{\alpha}{er} \quad \text{si } r > r_0 \quad (5-a)$$

$$\text{y } A_{po} = -\frac{\alpha}{er} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \quad \text{si } r < r_0 \quad (5-b)$$

Vamos a estudiar en este trabajo únicamente los efectos electrostáticos, por lo que:

$$A_e (A_{e0}, 0, 0, 0) \quad (6)$$

traduciéndose  $A_{e0}$  en un efecto de apantallamiento del potencial electrostático  $A_{p0}$ , correspondiente al protón, lo que conducirá en principio a soluciones de mayor radio cuadrático medio y energía que las correspondientes al átomo de Hidrógeno en la teoría de Dirac convencional.

El método variacional conduce a las ecuaciones de campo:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi - eA_0\gamma^0\Psi + 2\lambda \{ (\bar{\Psi}\Psi)\Psi + b(\bar{\Psi}\gamma^5\Psi)\gamma^5\Psi \} = 0 \quad (7-a)$$

$$-i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} - m\bar{\psi} - eA_0\bar{\psi}\gamma^0 + 2\lambda\{(\bar{\psi}\psi)\bar{\psi} + b(\bar{\psi}\gamma^5\psi)\bar{\psi}\gamma^5\} = 0 \quad (7-b)$$

$$y \quad \nabla^2 A_{e0} + e\psi^{\dagger}\psi = 0 \quad (7-c)$$

De (7-a) y (7-b) se deduce fácilmente que:

$$\partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) = 0 \quad (8)$$

ecuación de continuidad de la carga, por lo que la carga eléctrica definida por (3) es conservada.

Para el caso de soluciones estacionarias, factorizables en la forma:

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (9)$$

la distribución de carga es:

$$\rho_e = e\psi^{\dagger}(\vec{r})\phi(\vec{r}) = \rho_e(\vec{r}) \quad (10)$$

que resulta ser estática, por lo que soluciones de este tipo conducen a modelos clásicos de sistemas atómicos estables.

Dada la dificultad matemática que supone resolver las ecuaciones de campo (7), vamos a suponer que la constante  $b$  se anula. Por otra parte, la existencia de un término de autoacoplamiento de tipo pseudoescalar resulta molesta. En efecto, consideremos el caso de un campo spinorial con acoplamiento pseudoescalar de cuarto orden y "desenchufemos" el electromagnetismo, es decir que describimos el campo mediante la densidad lagrangiana:

$$L = L_{DL} + L_{NL} \quad (11)$$

siendo  $L_{DL}$  la densidad lagrangiana definida en (2-a) y:

$$L_{NL} = b(\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2 \quad (12)$$

Las correspondientes ecuación de campo y ecuación adjunta son:

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi + 2b(\bar{\psi}\gamma^5\psi)\gamma^5\psi = 0 \quad (13-a)$$

$$y \quad i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi} - 2b(\bar{\psi}\gamma^5\psi)\bar{\psi}\gamma^5 = 0 \quad (13-b)$$

Para el caso de soluciones estacionarias del tipo definido en (9) es fácil obtener, sin más que sustituir dicha expresión (9) en las ecuaciones (13), multiplicar la primera a izquierda por  $\psi^{\dagger}$  así como la segunda a derecha por  $\gamma^0\psi$ , restarlas e integrar a continuación sobre todo el espacio  $\mathbb{R}^3$ , que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\omega\bar{\psi}\psi - m\psi^{\dagger}\psi) d^3\vec{r} = 0 \quad (14)$$

para el caso de soluciones localizadas.

De esta relación global es fácil deducir que si la frecuen-

cia verifica la desigualdad:

$$\left(\frac{\omega}{m}\right)^2 < 1 \quad (15)$$

que corresponde al caso físico que nos interesa, se anula idénticamente.

Sin embargo no está excluida la existencia de soluciones en el caso de que un campo spinorial con autoacoplo de tipo pseudoescalar interactúe con un campo electromagnético; por ejemplo, en el caso de que éste fuera puramente electrostático puede haber soluciones de norma finita que verifiquen la condición (15). esto significa que el potencial creado por el autoacoplo pseudoescalar es repulsivo; pero si se contrarresta con un potencial electrostático suficientemente atractivo podría llegar a existir una solución localizada.

Por el contrario para el caso de autoacoplo puramente escalar ( $L_{NL}$  dado por (2-b) con  $\underline{b}$  idénticamente nula) se debe verificar que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\omega \bar{\Psi} \Psi - m \Psi^\dagger \Psi + 2\lambda (\bar{\Psi} \Psi) (\Psi^\dagger \Psi)) d^3 \vec{r} = 0 \quad (16)$$

que permite la existencia de soluciones localizadas que cumplen la mencionada condición (15). Estas soluciones han sido encontradas numéricamente por M. Soler (S070). En este caso L. Vázquez (VA77a) ha demostrado la no-existencia de soluciones que incumplan la condición (15).

Vamos a estudiar soluciones estacionarias factorizables en coordenadas esféricas en la forma:

$$\Psi_{j1j3} = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} g(r) \begin{matrix} j_3 \\ y_{j1} \end{matrix} \\ if(r) \begin{matrix} j_3 \\ y_{j1'} \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (17)$$

con  $l'$  definido según el convenio de Sakurai (SA73).

Consideramos soluciones en las que  $j=1/2$ , con lo que las ecuaciones de campo toman la forma:

$$f'' + \frac{1-\kappa}{r} f' - (m-\omega+eA_{p0}+eA_{e0})g + \frac{\lambda}{2\pi}(g^2-f^2)g = 0 \quad (18-a)$$

$$g' + \frac{1+\kappa}{r} g - (m+\omega-eA_{p0}-eA_{e0})f + \frac{\lambda}{2\pi}(g^2-f^2)f = 0 \quad (18-b)$$

$$y \quad A''_{eo} + \frac{2}{r} A'_{eo} + \frac{e}{4\pi} (f^2 + g^2) = 0 \quad (18-c)$$

siendo  $A_{eo}$  el definido en (5). (') equivale a  $\frac{d}{dr}$ . Nótese que  $A_{eo}$  depende sólo del módulo de  $\vec{r}$  debido a que  $\psi + \bar{\psi}$  sólo depende de dicho módulo para las soluciones correspondientes a  $j=1/2$   $\kappa$  es  $\pm 1$  para estas soluciones. Seguimos también aquí el convenio de Sakurai.

A continuación hacemos los cambios de variables:

$$\rho = mr \quad (19-a)$$

$$eA_{eo} = mV_e \quad (19-b)$$

$$eA_{po} = mV_p \quad (19-c)$$

$$(f, g) = m^{3/2} (F, G) \quad (19-d)$$

$$y \quad \Omega = \omega/m \quad (19-e)$$

cuyo objeto es el de escribir las ecuaciones de campo en función de magnitudes adimensionales, tomando la forma:

$$F' + \frac{1-\kappa}{\rho} F - (1-\Omega + V_e + V_p)G + \frac{\lambda m^2}{2\pi} (G^2 - F^2)G = 0 \quad (20-a)$$

$$G' + \frac{1+\kappa}{\rho} G - (1+\Omega - V_e - V_p)F + \frac{\lambda m^2}{2\pi} (G^2 - F^2)F = 0 \quad (20-b)$$

$$y \quad V''_e + \frac{2}{\rho} V'_e + \alpha (F^2 + G^2) = 0 \quad (20-c)$$

siendo ahora (') $\equiv \frac{d}{d\rho}$ .

La energía del sistema se obtiene a partir del tensor simétrico energía-momento, que se obtiene mediante el procedimiento usual (BA64), y resulta ser:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & \frac{i}{4} \{ \bar{\psi}_\gamma \mu \partial^\nu \psi + \bar{\psi}_\gamma \nu \partial^\mu \psi - (\partial^\mu \bar{\psi})_\gamma \nu \psi - (\partial^\nu \bar{\psi})_\gamma \mu \psi \} + g^{\mu\nu} \lambda (\bar{\psi} \psi)^2 + \\ & + F^{\rho\mu} F^\nu_{\rho} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{e}{2} (\psi_\gamma \mu \psi^\nu_e + \bar{\psi}_\gamma \nu \bar{\psi}^\mu_e) \end{aligned} \quad (21)$$

con lo que la energía de las diferentes soluciones es:

$$\begin{aligned} E = & \int_{\mathbb{R}^3} T^{00} d^3\vec{r} = \frac{\omega}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (f^2 + g^2) d^3\vec{r} + \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} (f^2 - g^2)^2 d^3\vec{r} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{E}_e^2 d^3\vec{r} - e \int_{\mathbb{R}^3} (f^2 + g^2) A_e^0 d^3\vec{r} \end{aligned} \quad (22)$$

o bien:

$$E = \int_0^\infty (f^2 + g^2) r^2 dr + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^\infty (f^2 - g^2)^2 r^2 dr + 2\pi \int_0^\infty \vec{E}_e^2 r^2 dr - e \int_0^\infty (f^2 + g^2) A_{e0} r^2 dr \quad (23)$$

ya que  $\vec{E}_e$  y  $A_{e0}$  son esféricamente simétricos.

Con los cambios de variables realizados (19), la energía de las diversas soluciones se expresa en la forma:

$$E = m \left\{ \Omega \int_0^\infty (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho + \frac{\lambda m^2}{4\pi} \int_0^\infty (F^2 - G^2)^2 \rho^2 d\rho + \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty \left( \frac{\partial V_e}{\partial \rho} \right)^2 \rho^2 d\rho - \int_0^\infty V_e (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho \right\} \quad (24)$$

La norma de las soluciones es:

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^\dagger \Psi d^3\vec{r} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (f^2 + g^2) r^2 dr = \int_0^\infty (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho \quad (25)$$

habiendo utilizado (19).

Esta norma no tiene que ser en principio la unidad, existiendo probablemente para cada estado un continuo de soluciones que se bifurca de la solución trivial, de norma nula. Sin embargo las soluciones con sentido físico deben estar normalizadas a la unidad, ya que el sistema atómico que describimos debe ser eléctricamente neutro. En efecto, la carga eléctrica debida al electrón se obtiene a partir de (3) mediante la expresión:

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_e d^3\vec{r} = e \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^\dagger \Psi d^3\vec{r} = eN \quad (26)$$

El momento angular correspondiente al campo spinorial se obtiene de (JR76):

$$J_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J^{ij} \quad (27)$$

siendo:

$$J^{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} (r^i T^{j0} - r^j T^{i0}) d^3\vec{r} \quad (28)$$

Para el caso de los estados correspondientes a  $j=1/2$ , se anulan las componentes  $J^1$  y  $J^2$ , siendo:

$$J^3 = j_3 \int_0^\infty (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho = j_3 N \quad (29)$$

siendo  $j_3$  el parámetro definido en (17), con lo que se obtiene el valor correcto a partir de la condición de normalización.

El momento magnético del electrón en las diferentes ondas es:

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{r} \times \vec{j}_e \, d^3\vec{r} \quad (30)$$

siendo la corriente:

$$\vec{j}_e^k = e \bar{\Psi} \gamma^k \Psi \quad (31)$$

Para el caso de que  $j$  sea  $1/2$ , las componentes  $M^1$  y  $M^2$  se anulan, siendo:

$$M^3 = -\frac{2e}{3} \int_0^\infty r^3 f g \, dr \quad \text{para estados } ns_{1/2} \quad (32-a)$$

$$M^3 = \frac{2e}{3} \int_0^\infty r^3 f g \, dr \quad \text{para estados } np_{1/2} \quad (32-b)$$

Estudiaremos a continuación el comportamiento asintótico de las soluciones localizadas. La ecuación (20-c) puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 V'_e) = -\alpha (F^2 + G^2) \quad (33)$$

por lo que se deduce que:

$$V'_e(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^2} \int_0^\infty (F^2 + G^2) \rho^2 \, d\rho \quad (34)$$

que es la conocida expresión del teorema de Gauss para casos de simetría esférica, que proporciona el campo eléctrico en una superficie esférica en función de la carga encerrada en ella. Si  $F$  y  $G$  son funciones de norma finita, esta integral es finita y en la región asintótica puede sustituirse por la norma de la correspondiente solución, con lo que:

$$V'_e(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{\alpha N}{\rho} + V_{e\infty} \quad (35)$$

habiendo designado la constante de integración como  $V_{e\infty}$ .

Consideramos a continuación las ecuaciones (20-a) y (20-b) en la región asintótica, sustituyendo en ellas  $V_e(\rho)$  según (35), y teniendo en cuenta que si  $F$  y  $G \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , debe cumplirse que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (F, G) = 0 \quad (36)$$

por lo que en la región asintótica podemos ignorar los términos no lineales, es decir que consideramos:

$$F' + \frac{1-\kappa}{\rho} F - (1-\Omega + V_{e\infty} + \frac{\alpha N}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho}) G = 0 \quad (37-a)$$



$$y \quad G' + \frac{1+\kappa}{\rho} G - (1+\Omega - V_{e\infty} - \frac{\alpha N}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho}) F = 0 \quad (37-b)$$

que conducen fácilmente a la ecuación:

$$G'' + \frac{2}{\rho} G' - \{1 - (\Omega - V_{e\infty})^2\} G = 0 \quad (38)$$

válida en la región asintótica.

Distinguimos dos casos:

a)  $(\Omega - V_{e\infty})^2 < 1$ . La ecuación (38) es reducible a la ecuación de Bessel esférica modificada en el caso de que el índice sea cero, y su solución real y decreciente resulta ser:

$$G(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{C}{\{1 - (\Omega - V_{e\infty})^2\}^{1/2}} \frac{e^{-\{1 - (\Omega - V_{e\infty})^2\}^{1/2} \rho}}{\rho} \quad (39-a)$$

con lo que:

$$F(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{-C}{1 + \Omega - V_{e\infty}} \frac{e^{-\{1 - (\Omega - V_{e\infty})^2\}^{1/2} \rho}}{\rho} \quad (39-b)$$

$$y \quad \frac{G(\rho)}{F(\rho)} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} - \frac{1 + \Omega - V_{e\infty}}{\{1 - (\Omega - V_{e\infty})^2\}^{1/2}} = - \left( \frac{1 + \Omega - V_{e\infty}}{1 - \Omega + V_{e\infty}} \right)^{1/2} \quad (39-c)$$

b)  $(\Omega - V_{e\infty})^2 > 1$ . En este caso la ecuación (38) es reducible a la ecuación de Bessel esférica correspondiente al caso de que el índice sea cero, cuyas soluciones son:

$$G(\rho) \propto \frac{\text{sen } \rho}{\rho}, \quad \frac{\text{cos } \rho}{\rho} \quad (40)$$

que no pertenecen al espacio  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Con esto podemos concluir que solo existe solución no trivial en  $L^2(\mathbb{R}^3)$  si:

$$|\Omega - V_{e\infty}| < 1 \quad (41)$$

El problema posee invariancia tipo gauge de segunda especie, consistente en que la transformación simultánea de:

$$\Omega \longrightarrow \Omega^T = \Omega + \text{cte} \quad (42-a)$$

$$y \quad V_e \longrightarrow V_e^T = V_e + \text{cte} \quad (42-b)$$

deja invariantes las ecuaciones de campo. Si elegimos el gauge en el que  $V_e$  se anule, las soluciones de norma finita cumplirán la propiedad de que:

$$|\Omega| < 1 \quad (43)$$

Utilizaremos la invariancia gauge en la resolución numérica del problema.

### RELACIONES INTEGRALES

Consideremos a continuación condiciones de tipo global que deben cumplir las soluciones estacionarias de la forma expresada en (17).

El sistema en estudio se describe mediante el lagrangiano:

$$L = \int_{\mathbb{R}^3} L \, d^3\vec{r} \quad (44)$$

siendo  $L$  la densidad lagrangiana expresada en (1).

Debe cumplirse que:

$$\left\{ \frac{d}{d\sigma} L(\Psi(\sigma\vec{r}, t), A_0(\sigma r)) \right\}_{\sigma=1} = 0 \quad (45)$$

lo que constituye la generalización del teorema del "seudovirial" de G. Rosen, debida a L. Vázquez (VA77b); válida para el caso de soluciones estacionarias por ser la densidad lagrangiana que define el sistema independiente del tiempo.

Utilizando las ecuaciones de campo, la "receta" da lugar a la condición:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\omega\Psi^\dagger\Psi - m\bar{\Psi}\Psi) d^3\vec{r} + \int_{\mathbb{R}^3} -e\bar{\Psi}\gamma^0\Psi A_0 d^3\vec{r} + \int_{\mathbb{R}^3} -\frac{1}{4}F_{e\mu\nu}F^{\mu\nu} d^3\vec{r} - \int_{\mathbb{R}^3} \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^2 d^3\vec{r} = 0 \quad (46)$$

Teniendo en cuenta los cambios de variables (19), obtenemos la relación:

$$\int_0^\infty \{ \Omega(G^2+F^2) - (G^2-F^2) \} \rho^2 d\rho - \int_0^\infty (G^2+F^2)(V_e+V_p) \rho^2 d\rho + \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty (V_e')^2 \rho^2 d\rho - \frac{\lambda m^2}{4\pi} \int_0^\infty (G^2-F^2)^2 \rho^2 d\rho = 0 \quad (47)$$

que, junto con la expresión (24) permite escribir la energía de las soluciones como:

$$E = m \left\{ \int_0^{\infty} (G^2 - F^2) \rho^2 d\rho + \int_0^{\infty} (G^2 + F^2) V_p \rho^2 d\rho + \frac{\lambda m^2}{2\pi} \int_0^{\infty} (G^2 - F^2)^2 \rho^2 d\rho \right\} \quad (48)$$

que no depende explícitamente de  $\Omega$ .

Nótese que los resultados anteriores no dependen explícitamente del valor que se toma para  $r_0$ , radio de la distribución de carga positiva que representa al núcleo.

Consideramos a continuación la ecuación (20-c) correspondiente al autocampo electromagnético creado por el electrón, que se puede escribir en la forma:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 V_e') = -\alpha (F^2 + G^2) \quad (49)$$

de la que es fácilmente obtenible la condición:

$$V_e(\infty) - V_e(0) = -\alpha \int_0^{\infty} (F^2 + G^2) \rho d\rho \quad (50)$$

habiendo utilizado la relación (34) tras integrar por partes el primer miembro. Si elegimos el gauge en el que  $V_e(\infty)$  se anula, resulta:

$$V_e(0) = \alpha \int_0^{\infty} (F^2 + G^2) \rho d\rho \quad (51)$$

que es finita si  $F$  y  $G$  pertenecen al espacio  $L^2(\mathbb{R}^3)$  y además  $(F + G)$  está acotado en el origen. Esta condición se verifica en todas las soluciones que hemos encontrado numéricamente.

Consideremos a continuación las ecuaciones (20-a) y (20-b) para el caso de soluciones del tipo  $n s_{1/2}$ . En éstas  $\kappa = -1$ , por lo que las correspondientes ecuaciones son:

$$F' + \frac{2}{\rho} F - (1 - \Omega + V_e + V_p) G + \frac{\lambda m^2}{2\pi} (G^2 - F^2) G = 0 \quad (52-a)$$

$$y \quad G' - (1 + \Omega - V_e - V_p) F + \frac{\lambda m^2}{2\pi} (G^2 - F^2) F = 0 \quad (52-b)$$

Multiplicando la primera de ellas por  $F$ , la segunda por  $G$  y restando a continuación, resulta:

$$FF' - GG' + \frac{2}{\rho} F^2 + 2(\Omega - V_e - V_p) FG = 0 \quad (53)$$

de la que se deducen, multiplicando por  $\rho^n$  ( $n$  conveniente a cada caso) e integrando sobre  $\mathbb{R}^3$ , para el caso de núcleo puntual ( $\rho_0 = 0$ ), las siguientes cotas:

$$\langle \rho \rangle > \langle \rho^{-1} \rangle^{-1} > \frac{1 - \alpha}{V_{e\infty} + |\Omega|} \quad (54-a)$$

$$y \quad \langle \rho^2 \rangle \gg \langle \rho^{-2} \rangle^{-1} > \frac{(\frac{1}{2}-\alpha)(1-\alpha)}{(V_e(0)+|\Omega|)^2} \quad (54-b)$$

Para el caso de núcleo finito, en las soluciones que hemos encontrado numéricamente ocurre que:

$$|V_e| < |V_p| \quad \forall \rho \in (0, \infty) \quad (V_e(\infty)=0) \quad (55)$$

y en estas condiciones, el mismo procedimiento anterior conduce a las cotas:

$$\langle \rho \rangle \gg \langle \rho^{-1} \rangle > \frac{1}{|\Omega| + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\rho_0} + V_e(0)} \quad (56-a)$$

$$y \quad \langle \rho^2 \rangle \gg \langle \rho^{-2} \rangle^{-1} > \frac{1}{\{|\Omega| + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\rho_0} + V_e(0)\}^2} \quad (56-b)$$

(en general:

$$\langle \rho^k \rangle \gg \langle \rho^{-k} \rangle^{-1} \quad \forall k \quad (57)$$

lo que se obtiene de aplicar la desigualdad de Hölder siempre que las integrales pertinentes sean finitas).

Estas expresiones proporcionan información sobre el tamaño del átomo que describimos, suministrando cotas inferiores a dicho tamaño lo que resuelve el problema clásico del "shrinking" (contracción del átomo a un punto) del Hidrógeno, garantizando la estabilidad del sistema físico que describimos. Nótese que esto no se refiere a la estabilidad del sistema frente a perturbaciones externas que no consideramos en este trabajo.

Para el caso de soluciones del tipo  $n\rho_{1/2}$  se obtienen las mismas cotas que para el caso descrito, si bien esta coincidencia es puramente formal ya que los valores de  $V_e(0)$  y  $\Omega$  varían al considerar diferentes soluciones.

Consideremos nuevamente el sistema de ecuaciones (52). Si multiplicamos (52-a) por  $F$ , (52-b) por  $G$ , sumamos ambas, multiplicamos el resultado por  $\rho^3 d\rho$  e integramos a continuación de  $\rho=0$  a  $\rho=\infty$  obtenemos la condición global:

$$\int_0^\infty FG\rho^3 d\rho = \int_0^\infty F^2\rho^2 d\rho - \int_0^\infty \frac{3}{4}(F^2+G^2)\rho^2 d\rho + \frac{\lambda m^2}{2\pi} \int_0^\infty (G^2-F^2)FG\rho^3 d\rho \quad (58)$$

por lo que el momento magnético por unidad de norma para las diferentes soluciones en ondas es:

$$\frac{M}{N} = - \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{\int_0^{\infty} F^2 \rho^2 d\rho}{\int_0^{\infty} (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho} + \frac{4}{3} \frac{\lambda m^2}{2\pi} \frac{\int_0^{\infty} (G^2 - F^2) F G \rho^3 d\rho}{\int_0^{\infty} (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho} \right] \mu_B \quad (59)$$

según se desprende de la relación (32) y siendo  $\mu_B$  el magnetón de Bohr.

Para el caso de estados del tipo p, un procedimiento similar conduce a la expresión:

$$\frac{M}{N} = - \left[ \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \frac{\int_0^{\infty} F^2 \rho^2 d\rho}{\int_0^{\infty} (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho} + \frac{4}{3} \frac{\lambda m^2}{2\pi} \frac{\int_0^{\infty} (G^2 - F^2) F G \rho^3 d\rho}{\int_0^{\infty} (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho} \right] \mu_B \quad (60)$$

Las correcciones a los factores (1) y (1/3) se estiman de orden  $\alpha^2$  y  $\alpha^3$  respectivamente, por lo que en primera aproximación se obtienen los valores correctos para los factores de Landé,  $g_s=2$  y  $g_p=2/3$  para estados s y p respectivamente.

Otra condición global se obtiene de la ecuación de Maxwell:

$$\text{div} \vec{E}_e = \rho_e \quad (61)$$

siendo  $\rho_e$  la densidad de carga definida en (3).

Utilizando la identidad vectorial:

$$\text{div}(A_{e0} \vec{E}_e) = \text{grad}(A_{e0}) \cdot \vec{E}_e + A_{e0} \text{div} \vec{E}_e \quad (62)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\vec{E}_e = -\text{grad} A_{e0} \quad (63)$$

resulta que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \text{div}(A_{e0} \vec{E}_e) d^3\vec{r} = \int_{\mathbb{R}^3} -E_e^2 d^3\vec{r} + \int_{\mathbb{R}^3} A_{e0} e^{\Psi} \Psi d^3\vec{r} \quad (64)$$

El primer miembro se anula sin más que utilizar el teorema de Gauss por estar los campos localizados (es decir que  $A_{e0}$  decrece más rápidamente que  $1/\rho^3$  si  $\rho \rightarrow \infty$ ), con lo que se obtiene la igualdad:

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial V_e}{\partial \rho} \right)^2 \rho^2 d\rho = \int_0^{\infty} V_e (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho \quad (65)$$

habiendo tenido en cuenta los cambios de variables (19).

## RESULTADOS NUMERICOS

Hemos abordado la resolución numérica de las ecuaciones de campo (20) obteniendo sendas familias de soluciones correspondientes a los estados  $1s_{1/2}$ ,  $2s_{1/2}$ ,  $3s_{1/2}$ ,  $2p_{1/2}$  y  $3p_{1/2}$ .

Hemos considerado el núcleo puntual, con lo que:

$$V_p(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} \quad , \quad \rho \in (0, \infty) \quad (66)$$

Utilizamos el cambio de variables:

$$\rho \longrightarrow \rho^* = \ln \rho \quad (67)$$

cuyo fin es regularizar el sistema de ecuaciones, evitando el punto  $\rho=0$  en el que el sistema no es lipshitziano. Este cambio de variable mejora por añadidura la estabilidad de los métodos de cálculo numérico empleados (HA62, LA76). La región de integración pasa a ser  $(-\infty, +\infty)$ , e integramos desde  $\rho^* = -11$  hasta la zona asintótica.

La integración numérica plantea los siguientes problemas:

- 1) Debe fijarse el valor de la constante adimensional  $\frac{\lambda m^2}{2\pi}$ .
- 2) Debe fijarse el valor de la frecuencia  $\Omega$  de la posible solución.
- 3) Funciones F y G. Debe anularse F (G) en  $\rho^* = -\infty$  para estados ns (np). Las distintas soluciones corresponden a diferentes valores de  $G(-\infty)$  ( $F(-\infty)$ ). Cada solución tiene norma distinta, resultando razonable esperar obtener sendas familias de soluciones variando en forma continua y con distintas normas. Las soluciones físicas deben corresponder a las de norma unidad.
- 4) Función  $V_e$ . Los valores de  $V_e(-\infty)$  no se conocen en principio. Debe buscarse una relación entre  $V_e(-\infty)$  y  $G(-\infty)$  ( $F(-\infty)$ ) en función de  $\Omega$  para cada estado.

Hemos caracterizado los diferentes estados según el número de nodos que presentan las funciones F y G. Para  $\Omega$  utilizamos el co-

respondiente valor en la teoría de Dirac convencional.

Fijados los valores de  $\Omega$  y  $V_e(-\infty)$ , variamos  $G(-\infty)$ , respectivamente  $F(-\infty)$  para estados  $nn$ ; de forma que la solución cumpla la condición de que:

$$G, F \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0 \quad (68)$$

Como hemos dicho anteriormente (3<sup>a</sup>), el comportamiento de  $F$  y  $G$  en la región sintótica debe ser de la forma:

$$G, F \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} C \frac{e^{-ke^{\rho^*}}}{e^{\rho^*}} \quad (69)$$

en cuyo caso se verifica que:

$$V_e \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} V_e(\infty) = \text{cte} \quad (70)$$

Una vez obtenida una solución que cumple estas condiciones utilizamos la invariancia gauge de segunda especie para hacer el cambio:

$$V_e \longrightarrow V_e^T = V_e - \text{cte} \quad (71-a)$$

$$\text{y } \Omega \longrightarrow \Omega^T = \Omega - \text{cte} \quad (71-b)$$

con lo que disponemos de una solución con el número de nodos requerido, para la que:

$$V_e^T(\infty) = 0 \quad (72-a)$$

$$\text{y } \Omega^T = \Omega + \Delta\Omega \quad (72-b)$$

siendo:

$$\Delta\Omega = -\text{cte} = -V_e(\infty) \quad (73)$$

Debe tenerse en cuenta que para el caso de las soluciones de norma finita debe cumplirse que:

$$\Omega^T < 1 \quad (74)$$

La integración numérica se ha hecho desde  $\rho^* = -11$ , que corresponde a  $\rho = .0000167$ , hasta llegar a la región asintótica en la que  $F$ ,  $G$  y  $V_e$  se ajustan según (3<sup>a</sup>-b), (3<sup>a</sup>-a) y (35) respectivamente. Los valores obtenidos con este procedimiento resultan en

general suficientemente precisos.

Las condiciones en las que se hace la integración dan al tratamiento un carácter autoconsistente.

Una vez obtenida una solución debe calcularse su norma y su energía, así como los valores que toman el momento magnético del electrón, el radio medio (en módulo) y el radio cuadrático medio del átomo en el estado correspondiente.

Consideremos en primer lugar las soluciones correspondientes al estado fundamental. En la tabla I damos cuenta de algunos parámetros que corresponden a una muestra de la familia de soluciones obtenida.

Los valores de  $\frac{\Delta\Omega}{N}$  se ajustan a una recta de ecuación:

$$\frac{\Delta\Omega}{N} = a + b N \quad (75)$$

con los valores:

$$a = .625635241 \alpha^2 \quad (76-a)$$

$$y \quad b = -.172513829 \alpha^2 \quad (76-b)$$

con un coeficiente de correlación:

$$r = .9999 \quad (76-c)$$

correspondiéndole a la solución física una frecuencia:

$$\Omega_{N=1}^T = \Omega_{1s} + \Delta\Omega_{N=1} \quad (77)$$

siendo:

$$\Delta\Omega_{N=1} = .453121412 \alpha^2 \quad (78)$$

$\frac{\Delta\Omega}{N}$  es una medida del apantallamiento que produce el campo del electrón. La dependencia lineal de este efecto con la norma es cuando menos sorprendente ya que el efecto de autoapantallamiento es claramente no lineal.

No hemos podido demostrar la existencia de soluciones del modelo propuesto, ni tampoco la estabilidad estructural del sistema de ecuaciones obtenido. Esto significa que las soluciones obtenidas en forma numérica son soluciones de una ecuación aproximada a la correspondiente a nuestro problema y podrían no ser soluciones aproximadas de nuestro modelo ya que desconocemos las propiedades de estabilidad necesarias para asegurarlo.



TABLA - I  
Soluciones correspondientes al estado fundamental ( $\lambda=0$ )

$V_e(0)$	$G(0)$	$V_e(\infty) = -\Delta\Omega$	Norma	$\Delta\Omega/N\alpha^2$
$\alpha^2/10^4$	$.20366 \times 10^{-4}$	$-1.66669 \times 10^{-4} \alpha^2$	$.2666 \times 10^{-3}$	$.62516508 \alpha^2$
$\alpha^2/10^3$	$.643834 \times 10^{-4}$	$-1.66718 \times 10^{-3} \alpha^2$	$.266933 \times 10^{-2}$	$.62456976 \alpha^2$
$\alpha^2/10^2$	$.202912 \times 10^{-3}$	$-1.6722036 \times 10^{-2} \alpha^2$	$.269482 \times 10^{-1}$	$.62052348 \alpha^2$
$\alpha^2/10$	$.618078 \times 10^{-3}$	$-1.7349424 \times 10^{-1} \alpha^2$	$.3019936$	$.57449637 \alpha^2$
$\alpha^2/5$	$.827337 \times 10^{-3}$	$-.37298628 \alpha^2$	$.748368$	$.49839928 \alpha^2$
$\alpha^2/4.5$	$.857919 \times 10^{-3}$	$-.42701262 \alpha^2$	$.907802$	$.47038092 \alpha^2$
$\alpha^2/4.2$	$.875611 \times 10^{-3}$	$-.47302867 \alpha^2$	$1.075353$	$.43988214 \alpha^2$
$\alpha^2/4.1$	$.880721 \times 10^{-3}$	$-.49439782 \alpha^2$	$1.175430$	$.42061020 \alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^* = 8.6$  que corresponde a  $\rho = 5423.52$

Podemos sin embargo comprobar la verificación de condiciones globales que deben de cumplir las soluciones que buscamos, lo que es necesario aunque no suficiente para poder considerar válidas las soluciones obtenidas.

La ecuación (50) suministra una primera condición global. En la tabla II se indican los valores obtenidos para ambos miembros de la mencionada ecuación (50) para la familia de soluciones correspondientes al estado fundamental recogidas en la tabla I.

La ecuación (65) suministra una segunda condición global. Los valores correspondientes a la muestra de soluciones del estado fundamental se incluyen así mismo en la tabla II (columnas 4 y 5).

Puede observarse una diferencia en la séptima cifra significativa de estas dos integrales correspondientes a la misma solución, atribuible a errores computacionales.

Como ya hemos indicado anteriormente, la energía de las distintas soluciones se obtiene del tensor simétrico energía-momento. La expresión de la densidad volúmica de energía es (22):

$$\frac{dE}{d\tau} = T^{00} = \omega \psi^+ \psi + \lambda (\bar{\psi} \psi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{E}_e^2 + \vec{B}_e^2) - e \psi^+ \psi A_{e0} \quad (79)$$

siendo  $\vec{E}_e$  y  $\vec{B}_e$  los campos eléctrico y magnético internos.

En la aproximación estudiada  $\vec{B}_e$  se anula y hemos considerado en principio que  $\lambda=0$ , por lo que la energía de la familia de soluciones numéricas que consideramos se obtiene de la expresión:

$$E = m \left( \int_0^\infty (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho + \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty \left( \frac{\partial V_e}{\partial \rho} \right)^2 \rho^2 d\rho - \int_0^\infty V_e (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho \right) \quad (80)$$

habiendo utilizado nuevamente los cambios de variables (19).

En la tabla III se han indicado las energías correspondientes a la muestra de soluciones obtenidas para el estado fundamental. La energía representada corresponde al sistema físico formado por el campo spinorial y el campo electromagnético interno.

Las dos primeras columnas representan respectivamente la energía y la energía por unidad de norma, expresadas en unidades de masa del electrón. Las columnas tercera y cuarta representan respectivamente la variación de la energía respecto a la que corresponde a la teoría de Dirac por unidad de norma, así como el cociente de esta cantidad dividida nuevamente por la norma, expresadas igualmente en unidades de masa del electrón.

TABLA II

Soluciones correspondientes al estado fundamental ( $\lambda=0$ )

$V_e(0)$	$V_e(0) - V_e(\infty)$	$\alpha \int_0^{\infty} (F^2+G^2) \rho dp$	$\int_0^{\infty} V_e (G^2+F^2) \rho^2 dp$	$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial V_e}{\partial p} \right)^2 \rho^2 dp$
$\alpha^2/10^4$	$1.4200481 \times 10^{-8}$	$1.4200481 \times 10^{-8}$	$.2366854 \times 10^{-11}$	$.2366854 \times 10^{-11}$
$\alpha^2/10^3$	$1.4203105 \times 10^{-7}$	$1.4203105 \times 10^{-7}$	$.2369264 \times 10^{-9}$	$.2369268 \times 10^{-9}$
$\alpha^2/10^2$	$1.4229841 \times 10^{-6}$	$1.4229841 \times 10^{-6}$	$.2393873 \times 10^{-7}$	$.2383877 \times 10^{-7}$
$\alpha^2/10$	$1.4563934 \times 10^{-5}$	$1.4563934 \times 10^{-5}$	$.2708069 \times 10^{-5}$	$.2708074 \times 10^{-5}$
$\alpha^2/5$	$3.0512286 \times 10^{-5}$	$3.0512286 \times 10^{-5}$	$.1359203 \times 10^{-4}$	$.1359205 \times 10^{-4}$
$\alpha^2/4.5$	$3.4572624 \times 10^{-5}$	$3.4572624 \times 10^{-5}$	$.1834333 \times 10^{-4}$	$.1834336 \times 10^{-4}$
$\alpha^2/4.2$	$3.7868300 \times 10^{-5}$	$3.7868300 \times 10^{-5}$	$.2318548 \times 10^{-4}$	$.2318552 \times 10^{-4}$
$\alpha^2/4.1$	$3.9315477 \times 10^{-5}$	$3.9315477 \times 10^{-5}$	$.2574204 \times 10^{-4}$	$.2574205 \times 10^{-4}$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^*=8.6$

TABLA III.

Soluciones correspondientes al estado fundamental ( $\lambda=0$ )

$V_e(0)$	$E/m$	$E/mN$	$\Delta E/mN$	$\Delta E/mN^2$
$\alpha^2/10^4$	$2.6659290 \times 10^{-4}$	$1-.49992171 \alpha^2$	$8.4504918 \times 10^{-5} \alpha^2$	$.31697268 \alpha^2$
$\alpha^2/10^3$	$2.6692590 \times 10^{-3}$	$1-.49917243 \alpha^2$	$8.3378186 \times 10^{-4} \alpha^2$	$.31235623 \alpha^2$
$\alpha^2/10^2$	$2.6947497 \times 10^{-2}$	$1-.49162896 \alpha^2$	$8.3811755 \times 10^{-3} \alpha^2$	$.31101058 \alpha^2$
$\alpha^2/10$	.30198699	$1-.41071268 \alpha^2$	$8.9296301 \times 10^{-2} \alpha^2$	$.29568038 \alpha^2$
$\alpha^2/5$	.74835614	$1-.29755308 \alpha^2$	$2.0245320 \times 10^{-1} \alpha^2$	$.27052627 \alpha^2$
$\alpha^2/4.5$	.90778929	$1-.26272015 \alpha^2$	.23728675 $\alpha^2$	.26138602 $\alpha^2$
$\alpha^2/4.2$	1.0753218	$1-.22943273 \alpha^2$	.27058146 $\alpha^2$	.25162527 $\alpha^2$
$\alpha^2/4.1$	1.1754167	$1-.21123788 \alpha^2$	.28876821 $\alpha^2$	.24567027 $\alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^*=8.6$

Los valores contenidos en la quinta columna varían en forma lineal respecto de la norma, según:

$$\frac{\Delta E}{N^2 m} = a + b N \quad (81)$$

con los valores:

$$a = .3138867 \alpha^2 \quad (82-a)$$

$$b = -.0580012 \alpha^2 \quad (82-b)$$

siendo el coeficiente de correlación:

$$r = .998 \quad (82-c)$$

con lo que a la solución física le corresponde el valor:

$$\frac{\Delta E}{N^2 m} = a + b = .2558854 \alpha^2 \quad (83)$$

y con ello una energía:

$$E = m(.090987) = m(1-.243804\alpha^2) \quad (84)$$

Hemos calculado igualmente el momento magnético correspondiente a cada una de las soluciones. Estos valores figuran en la tabla IV junto con los correspondientes valores del cociente  $M/N$ . El momento magnético por unidad de norma (que es proporcional al factor giro-magnético) depende linealmente de la norma según:

$$\frac{M}{N} = a + b N \quad (85)$$

con:

$$a = -.999982307 \mu_B \quad (86-a)$$

$$b = -.000009395 \mu_B \quad (86-b)$$

y con un coeficiente de correlación:

$$r = .99999 \quad (86-c)$$

con lo que el valor correspondiente a la solución física es:

$$M = -.999991702 \mu_B = -(1-.155827\alpha^2) \mu_B \quad (87)$$

Hemos obtenido también el valor del radio cuadrático medio del átomo en el estado fundamental:

$$\langle \rho^2 \rangle^{1/2} = \left[ \frac{\int_0^\infty (F^2 + G^2) \rho^4 d\rho}{\int_0^\infty (F^2 + G^2) \rho^2 d\rho} \right]^{1/2} \quad (88)$$

cuyos valores se reflejan igualmente en la tabla IV (4ª columna).

El valor correspondiente a la teoría de Dirac convencional es:

$$\langle \rho^2 \rangle^{1/2} = 237.3533492 \text{ u.n.l.} \quad (89)$$

valor límite si  $\lambda \rightarrow 0$ .

De los resultados expuestos en la tabla IV, se deduce que el tamaño del objeto que describimos aumenta al crecer la norma. Evaluamos este tamaño en función de magnitudes promedio, lo que nos permite comparar soluciones que tienen distinta norma.

Parece claro que el apantallamiento produce un aumento del tamaño de los "kinks" que se obtienen como solución, como era de esperarse. El límite en el que la norma de la solución tiende a anularse se caracteriza porque este efecto de autoapantallamiento se anula y las soluciones deben ser proporcionales a las de la teoría de Dirac.

El valor (89) es pues un límite inferior.

En la figura I hemos representado el radio cuadrático medio de las soluciones respecto de la norma. La curva obtenida no tiene una expresión analítica simple. El valor correspondiente a la solución de norma unidad se estima a partir de la curva en:

$$\langle \rho^2 \rangle^{1/2} \sim 419 \text{ u.n.l.} \quad (90)$$

Hemos estudiado a continuación la dependencia de las soluciones con respecto al valor que toma el parámetro  $\lambda$ , parámetro de peso de los términos de autoacoplamiento spinorial, que hasta ahora hemos considerado nulo.

Hemos obtenido diversas soluciones para valores de  $(\lambda m^2/2\pi) \equiv \Lambda$  comprendidos entre -1 y +1, para distintos valores iniciales del potencial  $V_e$  que describe el autocampo.

La tabla V transcribe valores correspondientes al caso de que  $V_e(0)$  sea  $(\alpha^2/4.1)$ . Nótese que los valores son similares a los obtenidos en el caso de que  $\lambda$  se anule. Se observa que si  $\lambda$  aumenta la norma de la solución disminuye ( $V_e(0)$  fijado). Debe tenerse en cuenta que para  $\lambda > 0$  los términos de autoacoplamiento spinorial dan lugar a fuerzas atractivas mientras que en el caso de que  $\lambda < 0$  estas fuerzas son repulsivas. Para  $\Lambda = -1$  la repulsión es excesiva, y llega a ser superior a la unidad y por ello no hay solución en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

TABLA IV

Soluciones correspondientes al estado fundamental ( $\lambda=0$ )

$V_e(0)$	M	M/N	$\langle \rho^2 \rangle^{1/2}$
$\alpha^2/10^4$	$-2.6667940 \times 10^{-4}$	$-.99998225$	237.41233
$\alpha^2/10^3$	$-2.6692912 \times 10^{-3}$	$-.99998225$	237.60277
$\alpha^2/10^2$	$-2.6947802 \times 10^{-2}$	$-.99998255$	239.92877
$\alpha^2/10$	$-.30198933$	$-.99998542$	270.31271
$\alpha^2/5$	$-.74836051$	$-.99998944$	345.42648
$\alpha^2/4.5$	$-.90779326$	$-.99999067$	387.88286
$\alpha^2/4.2$	$-1.07534437$	$-.99999176$	454.57956
$\alpha^2/4.1$	$-1.17537832$	$-.99999394$	523.39497

Los momentos magnéticos están expresados en magnetones de Bohr.  
 Los radios cuadráticos medios están expresados en unidades de  $m^{-1}$ .

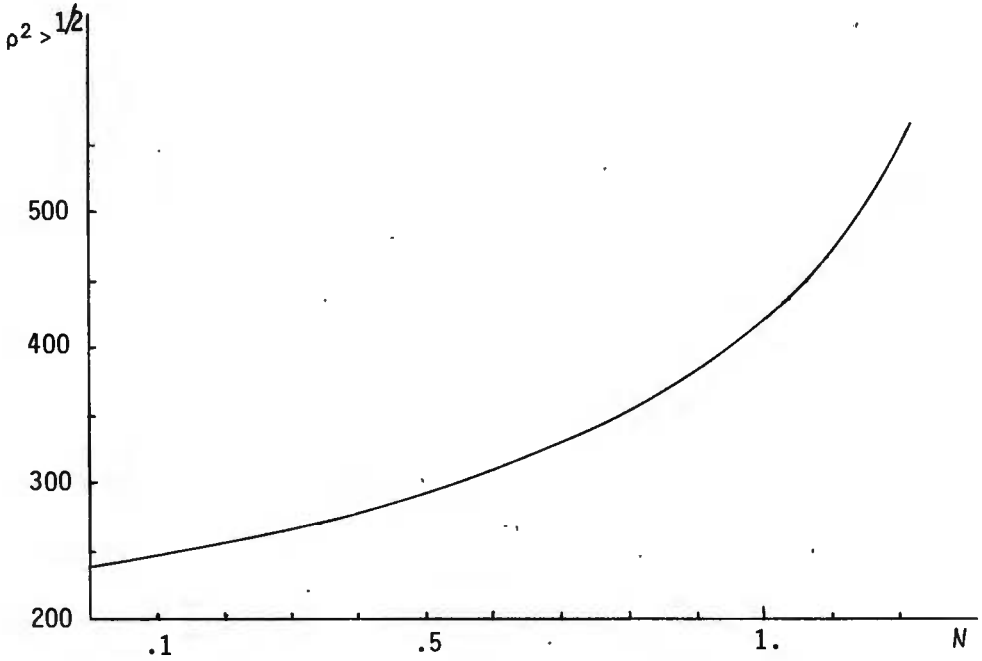


FIGURA I : Radio cuadrático medio de las soluciones correspondientes al estado fundamental ( $\lambda=0$ ). Hemos utilizado como unidad  $m^{-1}$ .



TABLA V  
 Soluciones correspondientes al estado fundamental ( $V_e(0) = \alpha^2/4.1$ )

$\Lambda = \lambda m^2 / 2\pi$	$G(0)$	$V_e(\infty) = -\Delta\Omega$	Norma	$\Delta\Omega/N$
1	.88214440 x 10 <sup>-3</sup>	-.48188907	1.11513962	.43213340
10 <sup>-1</sup>	.88088305 x 10 <sup>-3</sup>	-.49303861	1.16828770	.42201815
10 <sup>-2</sup>	.88073078 x 10 <sup>-3</sup>	-.49426038	1.17469902	.42075491
10 <sup>-3</sup>	.88072301 x 10 <sup>-3</sup>	-.49438406	1.17535669	.42062471
10 <sup>-4</sup>	.88072153 x 10 <sup>-3</sup>	-.49439644	1.17542263	.42061165
0	.88072137 x 10 <sup>-3</sup>	-.49439782	1.17543000	.42061020
-10 <sup>-4</sup>	.88072121 x 10 <sup>-3</sup>	-.49439920	1.17543729	.42060874
-10 <sup>-3</sup>	.88071973 x 10 <sup>-3</sup>	-.49441159	1.17550327	.42059567
-10 <sup>-2</sup>	.88070491 x 10 <sup>-3</sup>	-.49453562	1.17616486	.42046454
-10 <sup>-1</sup>	.88055419 x 10 <sup>-3</sup>	-.49579251	1.18297030	.41910833
-1	NO HAY	SOLUCION		

La tabla VI transcribe valores correspondientes a la familia de soluciones para la que  $\Lambda = 10^{-2}$ . En este caso  $\Delta\Omega/N$  depende también linealmente de  $N$  aunque el coeficiente de correlación es  $r = .9997$  (compárese con (76-c) por lo que parece que la consideración de valores de  $\Lambda \neq 0$  estropea ligeramente la dependencia lineal de  $\Delta\Omega/N$  con  $N$ .

Por simple comparación de las tablas I y VI se observa que la inclusión de los términos de autoacoplo spinorial produce una modificación de las soluciones correspondientes al caso en el que  $\Lambda = 0$ ; si bien estas modificaciones son pequeñas frente a las producidas por la inclusión del autoapantallamiento en las soluciones obtenidas sin considerar dicho efecto y teniendo en cuenta el autoacoplo spinorial (RA77).

Los resultados correspondientes a los estados excitados estudiados se reflejan en las tablas VII, VIII ( 2s ); IX, X ( 3s ); XI, XII ( 2p ) y XIII, XIV ( 3p ). La condición (65) continúa verificándose aceptablemente para cada solución ( 6 cifras ); si bien los ajustes producen coeficientes de correlación peores para las ondas p.

Los cálculos realizados incluyen así mismo valores para los momentos magnéticos correspondientes a los estados excitados considerados que omitimos aquí por no ser especialmente relevantes. Los errores computacionales son aquí más importantes debido a que el momento magnético es particularmente sensible a pequeñas variaciones en  $F$  y  $G$  a grandes distancias del núcleo (US79).

TABLA VI  
Soluciones correspondientes al estado fundamental (  $\Lambda \equiv \Lambda m^2 / 2\pi = 10^{-2}$  )

$V_e(0)$	$G(0)$	$V_e(\infty) = -\Delta\Omega$	Norma	$\Delta\Omega/N$
$\alpha^2/10$	$.61805963 \times 10^{-3}$	$-.17346739 \alpha^2$	$.3019554$	$.5744800 \alpha^2$
$\alpha^2/5$	$.82734314 \times 10^{-3}$	$-.37292336 \alpha^2$	$.7482158$	$.4984168 \alpha^2$
$\alpha^2/4.5$	$.85792103 \times 10^{-3}$	$-.42693364 \alpha^2$	$.9075624$	$.4704170 \alpha^2$
$\alpha^2/4.2$	$.87562162 \times 10^{-3}$	$-.47292328 \alpha^2$	$1.074925$	$.4399595 \alpha^2$
$\alpha^2/4.1$	$.88073778 \times 10^{-3}$	$-.49426038 \alpha^2$	$1.174699$	$.4207549 \alpha^2$

TABLA VII

Soluciones correspondientes al primer estado excitado ( $\lambda=0$ ),  
que corresponde al estado  $2s_{1/2}$ .

$V_e(0)$	$G(0)$	$V_e(\infty)=-\Delta\Omega$	Norma	$\Delta\Omega/N$
$\alpha^2/30$	$.24699756 \times 10^{-3}$	$-.30059226 \times 10^{-5}$	$.40965006$	$.13779525 \alpha^2$
$\alpha^2/20$	$.29474771 \times 10^{-3}$	$-.50409527 \times 10^{-5}$	$.74800218$	$.12655408 \alpha^2$
$\alpha^2/18$	$.30643937 \times 10^{-3}$	$-.60242496 \times 10^{-5}$	$.95014415$	$.11906467 \alpha^2$
$\alpha^2/17.4$	$.30950462 \times 10^{-3}$	$-.65319888 \times 10^{-5}$	$1.08047772$	$.11352698 \alpha^2$
$\alpha^2/17.36$	$.30966698 \times 10^{-3}$	$-.65796053 \times 10^{-5}$	$1.09835747$	$.11249303 \alpha^2$
$\alpha^2/17.351$	$.3097054 \times 10^{-3}$	$-.65908879 \times 10^{-5}$	$1.09919523$	$.11260005 \alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^*=8.6$

$$\Delta\Omega/N = a + bN \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} a = .15337011 \alpha^2 \\ b = -.03679764 \alpha^2 \\ y \quad r = .998 \end{array}$$

TABLA VIII

Soluciones correspondientes al primer estado excitado ( $\lambda=0$ ),  
que corresponde al estado  $2s_{1/2}$

$V_e(0)$	$E/m$	$E/m N$	$\Delta E/m N$	$\Delta E/m N^2$
$\alpha^2/30$	.40964797	1 - .09591308 $\alpha^2$	2.9096527 x $10^{-2}$ $\alpha^2$	.07102776 $\alpha^2$
$\alpha^2/20$	.74799921	1 - .07458780 $\alpha^2$	5.0423412 x $10^{-2}$ $\alpha^2$	.06741078 $\alpha^2$
$\alpha^2/18$	.95014096	1 - .06314959 $\alpha^2$	6.1866480 x $10^{-2}$ $\alpha^2$	.06511273 $\alpha^2$
$\alpha^2/17.4$	1.08047448	1 - .05636478 $\alpha^2$	6.8650709 x $10^{-2}$ $\alpha^2$	.06353737 $\alpha^2$
$\alpha^2/17.36$	1.09835423	1 - .05546340 $\alpha^2$	6.9539362 x $10^{-2}$ $\alpha^2$	.06331214 $\alpha^2$
$\alpha^2/17.351$	1.09919198	1 - .05543898 $\alpha^2$	6.9581206 x $10^{-2}$ $\alpha^2$	.06330195 $\alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^* = 8.6$

$$\Delta E/N^2 m = a + b N$$

con

$$a = .075707547 \alpha^2$$

$$b = -.011241296 \alpha^2 ; E_{N=1} = m(1 - .06054496 \alpha^2)$$

y

$$r = .9997$$

TABLA IX  
Soluciones correspondientes al segundo estado excitado en onda s ( $\lambda=0$ )

$V_e(0)$	$G(0)$	$V_e(\infty) = -\Delta\Omega$	Norma	$\Delta\Omega/N$
$\alpha^2/100$	$.11161913 \times 10^{-3}$	$-.85407758 \times 10^{-6}$	.25355898	.063253972 $\alpha^2$
$\alpha^2/70$	$.13220759 \times 10^{-3}$	$-.12775206 \times 10^{-5}$	.38995240	.061521339 $\alpha^2$
$\alpha^2/45$	$.16101286 \times 10^{-3}$	$-.22954677 \times 10^{-5}$	.76292125	.056501626 $\alpha^2$
$\alpha^2/42$	$.16535758 \times 10^{-3}$	$-.26122714 \times 10^{-5}$	.90207202	.054381042 $\alpha^2$
$\alpha^2/41$	$.16670597 \times 10^{-3}$	$-.27741016 \times 10^{-5}$	.98436189	.052922097 $\alpha^2$
$\alpha^2/40.8$	$.16694900 \times 10^{-3}$	$-.28167265 \times 10^{-5}$	1.00896546	.052424929 $\alpha^2$
$\alpha^2/40.7$	$.16706329 \times 10^{-3}$	$-.28407936 \times 10^{-5}$	1.02280986	.052157198 $\alpha^2$
$\alpha^2/40.66$	$.16710754 \times 10^{-3}$	$-.28510085 \times 10^{-5}$	1.03044360	.051956963 $\alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^* = 9.1$  ( $\rho = 8955.29$ )

$$\Delta\Omega/N = a + bN \quad \text{con } a = .06718844 \alpha^2$$

$$b = -.014560938 \alpha^2$$

$$y \quad r = .998$$

TABLA X

Soluciones correspondientes al segundo estado excitado en onda s ( $\lambda=0$ )

$V_e(0)$	$E/m$	$E/mW$	$\Delta E/mW$	$\Delta E/mN^2$
$\alpha^2/100$	.25355833	1 - .047416649 $\alpha^2$	8.138907 x 10 <sup>-3</sup> $\alpha^2$	.032098674 $\alpha^2$
$\alpha^2/70$	.38995150	1 - .043247739 $\alpha^2$	1.231608 x 10 <sup>-2</sup> $\alpha^2$	.031583548 $\alpha^2$
$\alpha^2/45$	.76291992	1 - .032712793 $\alpha^2$	2.286210 x 10 <sup>-2</sup> $\alpha^2$	.029966528 $\alpha^2$
$\alpha^2/42$	.90207862	1 - .029107250 $\alpha^2$	2.645464 x 10 <sup>-2</sup> $\alpha^2$	.029326592 $\alpha^2$
$\alpha^2/41$	.98436047	1 - .027097911 $\alpha^2$	2.847694 x 10 <sup>-2</sup> $\alpha^2$	.028929342 $\alpha^2$
$\alpha^2/40,8$	1.00896404	1 - .026496987 $\alpha^2$	2.906464 x 10 <sup>-2</sup> $\alpha^2$	.028806382 $\alpha^2$
$\alpha^2/40,7$	1.02280843	1 - .026158967 $\alpha^2$	2.940551 x 10 <sup>-2</sup> $\alpha^2$	.028749731 $\alpha^2$
$\alpha^2/40,66$	1.03044218	1 - .025989957 $\alpha^2$	2.957064 x 10 <sup>-2</sup> $\alpha^2$	.028696998 $\alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^*=9.1$  ( $\rho=8955.29$ )

$$\Delta E/N^2m = a + bN \quad \text{con} \quad a = .33317316 \times 10^{-1} \alpha^2$$

$$b = -.44586008 \times 10^{-2} \alpha^2$$

$$y \quad r = .9997$$

$$\underline{E_{N=1} = m(1 - .0266979\alpha^2)}$$

TABLA XI  
 Estado de menor energía en onda  $p_{1/2}$  ( corresponde al estado  $2p_{1/2}$  ) ( $\lambda=0$ )

$V_e(0)$	$F(0)$	$V_e(\infty) = -\Delta\Omega$	Norma	$\Delta\Omega/N$
$\alpha^2/50$	$.68160130 \times 10^{-6}$	$-.307816 \times 10^{-5}$	$.357721$	$.161591 \alpha^2$
$\alpha^2/35$	$.76887088 \times 10^{-6}$	$-.470780 \times 10^{-5}$	$.598172$	$.147796 \alpha^2$
$\alpha^2/30$	$.79590300 \times 10^{-6}$	$-.591766 \times 10^{-5}$	$.829329$	$.133996 \alpha^2$
$\alpha^2/29$	$.79864044 \times 10^{-6}$	$-.635273 \times 10^{-5}$	$.939142$	$.127028 \alpha^2$
$\alpha^2/28.73$	$.79869531 \times 10^{-6}$	$-.652975 \times 10^{-5}$	$.995619$	$.123161 \alpha^2$
$\alpha^2/28.71$	$.79866660 \times 10^{-6}$	$-.654675 \times 10^{-5}$	$1.002155$	$.122676 \alpha^2$
$\alpha^2/28.69$	$.79860947 \times 10^{-6}$	$-.657419 \times 10^{-5}$	$1.013310$	$.121834 \alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^* = 9.1$  ( $\rho = 8955.29$ )

$$\Delta\Omega = a + bN \quad \text{con} \quad a = .183711 \alpha^2$$

$$y \quad b = -.060657 \alpha^2$$

$$r = .9996$$



TABLA XII

Estado de menor energía en onda  $p_{1/2}$  ( corresponde al estado  $2p_{1/2}$  ( $\lambda=0$ ))

$V_e(0)$	$E/m$	$E/mN$	$\Delta E/mN$	$\Delta E/mN^2$
$\alpha^2/50$	.357720	1 - .0949084 $\alpha^2$	.0301038 $\alpha^2$	.0841543 $\alpha^2$
$\alpha^2/35$	.598169	1 - .0773877 $\alpha^2$	.0476178 $\alpha^2$	.0796055 $\alpha^2$
$\alpha^2/30$	.598169	1 - .0627027 $\alpha^2$	.0623145 $\alpha^2$	.0751384 $\alpha^2$
$\alpha^2/29$	.939139	1 - .0564868 $\alpha^2$	.0685185 $\alpha^2$	.0729586 $\alpha^2$
$\alpha^2/28.73$	.995616	1 - .0535198 $\alpha^2$	.0714974 $\alpha^2$	.0718120 $\alpha^2$
$\alpha^2/28.71$	1.002152	1 - .0531818 $\alpha^2$	.0718320 $\alpha^2$	.0716775 $\alpha^2$
$\alpha^2/28.69$	1.013308	1 - .0526184 $\alpha^2$	.0723980 $\alpha^2$	.0714470 $\alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho = 9.1$

$$\Delta E/N^2 m = a + bN \quad \text{con} \quad a = .0911552 \alpha^2$$

$$y \quad r = .999 \quad b = -.0194944 \alpha^2$$

$$\underline{\underline{E_{N=1} = m( 1 - .0532513 \alpha^2 )}}$$

TABLA XIII  
 Estado p con un nodo en  $G^2$  ( corresponde al estado  $3p_{1/2}$  )  
 ( $\lambda=0$ )

$V_e(0)$	$F(0)$	$V_e(\infty)=-\Delta\Omega$	Norma	$\Delta\Omega/N$
$\alpha^2/100$	$.39923081 \times 10^{-6}$	$-.106445 \times 10^{-5}$	.298766	.0669058 $\alpha^2$
$\alpha^2/70$	$.46647252 \times 10^{-6}$	$-.161653 \times 10^{-5}$	.474690	.0639506 $\alpha^2$
$\alpha^2/60$	$.49638575 \times 10^{-6}$	$-.198087 \times 10^{-5}$	.602282	.0617625 $\alpha^2$
$\alpha^2/50$	$.52835919 \times 10^{-6}$	$-.271895 \times 10^{-5}$	.914135	.0558546 $\alpha^2$
$\alpha^2/49.5$	$.52952038 \times 10^{-6}$	$-.280468 \times 10^{-5}$	.963248	.0546784 $\alpha^2$
$\alpha^2/49.3$	$.52987866 \times 10^{-6}$	$-.284946 \times 10^{-5}$	.993050	.0538842 $\alpha^2$
$\alpha^2/49.2767$	$.52991333 \times 10^{-6}$	$-.285542 \times 10^{-5}$	.997363	.0537634 $\alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^* = 9.1$

$$\Delta\Omega = a + bN \quad \text{con} \quad a = .728383 \times 10^{-1} \alpha^2$$

$$y \quad b = -.189534 \times 10^{-1} \alpha^2$$

$$r = .999$$

TABLA XIV  
 Estado p con un nodo en  $G^2$  ( corresponde al estado  $3p_{1/2}$  )  
 ( $\lambda=0$ )

$V_e(0)$	$E/m$	$E/mN$	$\Delta E/mN$	$\Delta E/mN^2$
$\alpha^2/100$	.298765	1 - .0453322 $\alpha^2$	.0102420 $\alpha^2$	.0342812 $\alpha^2$
$\alpha^2/70$	.474689	1 - .0397549 $\alpha^2$	.0158082 $\alpha^2$	.0333023 $\alpha^2$
$\alpha^2/60$	.602281	1 - .0359428 $\alpha^2$	.0196254 $\alpha^2$	.0325851 $\alpha^2$
$\alpha^2/50$	.914134	1 - .0274359 $\alpha^2$	.0281225 $\alpha^2$	.0307641 $\alpha^2$
$\alpha^2/49.5$	.963246	1 - .0262341 $\alpha^2$	.0293378 $\alpha^2$	.0304572 $\alpha^2$
$\alpha^2/49.3$	.9930485	1 - .0255017 $\alpha^2$	.0300552 $\alpha^2$	.0302656 $\alpha^2$
$\alpha^2/49.2767$	.997362	1 - .0254078 $\alpha^2$	.0301577 $\alpha^2$	.0302374 $\alpha^2$

La integración se ha hecho hasta  $\rho^* = 9.1$

$$\Delta E/N^2 m = a + bN \quad \text{con} \quad a = .360448 \times 10^{-1} \alpha^2$$

$$b = -.580510 \times 10^{-2} \alpha^2$$

$$y \quad r = .999$$

$$\underline{\underline{E_{N=1} = m(1 - .025316 \alpha^2)}}$$

## AJUSTE DE LAS ENERGIAS

Las energías correspondientes a las soluciones físicas no corresponden en principio a los valores experimentales, siendo los desajustes de orden  $m\alpha^2$ , lo que constituye una objeción grave al modelo propuesto.

Sin embargo, si tomamos para  $m$  el valor:

$$m = 2.0453035 m_{\text{exp}} \quad (91)$$

la diferencia de energías entre los estados fundamental y primero excitado coincide con el valor experimental; mientras que la diferencia de energía entre el primero y segundo estados excitados (  $2s, 3s$  ) se ajusta al valor experimental con un error de:

$$\Delta\{ E_{3s} - E_{2s} \}_{\text{num-exp}} = -4.0998\alpha^4 m_{\text{exp}} \quad (92)$$

Debe tenerse en cuenta que no hemos incluido en el estudio efectos magnéticos que dan lugar a contribuciones de la energía de orden  $\alpha^4 m_{\text{exp}}$ , por lo que el modelo no puede ajustar los valores experimentales a ese nivel.

Las diferencias de energía respecto a los estados de tipo p obtenidos, son ligeramente peores:

$$\Delta\{ E_{2p} - E_{1s} \}_{\text{num-exp}} = 280.14\alpha^4 m_{\text{exp}} \quad (93)$$

$$\text{y} \quad \Delta\{ E_{3p} - E_{1s} \}_{\text{num-exp}} = 48.983\alpha^4 m_{\text{exp}} \quad (94)$$

Debe tenerse en cuenta que las ondas de tipo p están más extendidas que las de tipo s correspondientes al mismo nivel, por lo que los datos numéricos obtenidos son menos precisos en aquellas.

La renormalización propuesta tiene dos inconvenientes. El primero consiste en que el factor de renormalización se ajusta a conveniencia a los datos experimentales, lo que no es demasiado grave al ajustarse de una tacada las diferencias de energía correspondientes a todas las ondas estudiadas.

El segundo inconveniente estriba en que en el límite correspondiente al estado libre del electrón, parece inferirse que la energía ( masa ) del electrón sería del orden del doble de la masa experimental, lo que resulta ciertamente molesto.

Hemos tratado de determinar con más precisión los coeficien-

tes  $a$  y  $b$  de las distintas rectas obtenidas, utilizando para ello el método de Ritz-Galerkin (BF7<sup>n</sup>) buscando un desarrollo autoconsistente en función de las soluciones de la teoría de Dirac. Los coeficientes  $a$  se obtienen fácilmente como valores correspondientes a estados puros; mientras que para fijar los coeficientes  $b$  debe tenerse en cuenta un número excesivamente alto de ondas, ya que estos valores convergen con excesiva lentitud al aumentar el número de ondas que se incluyen en el desarrollo autoconsistente. Por ello no hemos podido mejorar los resultados numéricos aquí ex puestos.

## RENORMALIZACION

La renormalización propuesta en la sección anterior plantea el problema de la energía que corresponde al electrón libre como estado límite de los estados ligados. Por ello hemos considerado necesario introducir términos no lineales en las ecuaciones correspondientes al campo electromagnético. Otro argumento que apoya esta consideración es simplemente una razón de completitud.

El lagrangiano electromagnético debe reducirse en el límite lineal al lagrangiano de Maxwell. Diversos argumentos sugieren la utilización del lagrangiano de Born-Infeld (BI34), cuyo comportamiento en orden a representar una carga elemental ha sido estudiado por Rañada y col (RU78), encontrando que la autoacción electromagnética se reduce fuertemente y obteniendo un modelo libre de divergencias.

Por lo que concierne a nuestro problema, el debilitamiento de la interacción electromagnética causado por la introducción de términos no lineales en el lagrangiano electromagnético produce un aumento de las discrepancias en las diferencias de energía de los niveles obtenidos respecto de la situación experimental. Aunque simultáneamente se amplifica el efecto que produce la consideración de términos de autoacoplo spinorial, este último efecto no es suficiente para cancelar las diferencias de energía. Por to ello vamos a considerar una renormalización que persigue el efecto contrario, es decir intensificar la interacción electromagnética.

Para ello supongamos que la constante de acoplo del campo del electrón con el campo del protón se modifica de  $e$  a  $Z'e$ .

La carga del electrón será:

$$Q = Z'e \int_{\mathbb{R}^3} \psi^\dagger \psi d^3\vec{r} \quad (95)$$

En este caso, las soluciones correspondientes a la teoría de Dirac son:

$$\psi_{Z'}(Z';r) = Z'^{3/2} \psi_D(Z'r) \quad (96)$$

Este resultado se obtiene simplemente de las soluciones conoci-

das para átomos hidrogenoideos, considerando el caso del átomo de carga nuclear  $Z'|e|$  (BS77).

El resultado (96) solo es estrictamente cierto para las componentes "grandes" ( $g$ ) del campo spinorial ya que el cociente ( $f/g$ ) depende de la frecuencia del nivel correspondiente y ésta a su vez depende de  $Z'$ , es decir que:

$$\frac{f}{g} = 0_1(\alpha Z') + 0_2(\alpha^3 Z'^3) + \dots \quad (97)$$

El campo  $\Psi$  del electrón produce un campo electromagnético, cuya componente eléctrica, en el caso de soluciones correspondientes a  $j=1/2$ , es:

$$E(Z', r) = \frac{Z'e}{4\pi r^2} \int_0^r (Z')^3 (g^2 + f^2)_{Z'r} N r'^2 dr' \quad (98)$$

que se deduce de la aplicación del teorema de Gauss y que es exacta en orden más bajo, siendo solo aproximada en el orden siguiente en  $\alpha^2$ . El factor  $N$  es una constante de normalización necesaria para que la carga del electrón sea  $e$  y con ello el átomo sea neutro.

Con el cambio de variable:

$$\rho = Z' r \quad (99)$$

se deduce fácilmente que:

$$E(Z', r) = \frac{Z'e}{4\pi r^2} \int_0^{Z'r} (g^2 + f^2) N \rho^2 d\rho = N Z'^3 E_D(Z' r) \quad (100)$$

siendo  $E_D(r)$  el campo correspondiente a la solución no renormalizada.

Este resultado es igualmente válido al orden más bajo para una mezcla de ondas, supuesto que no se alteran las contribuciones relativas al variar  $Z'$ .

La energía correspondiente a estas soluciones puede obtenerse del tensor canónico energía-momento (BA64) y es:

$$E = \text{Norma } \omega - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 d^3\vec{r} \quad (101)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia de la correspondiente solución, que es la correspondiente al estado dominante ( $\omega_{nZ'}$ ) corregida en el valor  $\Delta\omega_{Z'}$  debido al efecto de autoapantallamiento.

La modificación que estamos considerando afecta al segundo término de (101) en la forma:

$$\langle \frac{1}{2} E^2 \rangle_{Z'} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} E^2(Z', r) d^3\vec{r} = \int_{\mathbb{R}^3} N^2 Z'^6 \frac{1}{2} E_D^2(Z'r) d^3\vec{r} = N^2 Z'^3 \langle \frac{1}{2} E^2 \rangle_D \quad (102)$$

siendo  $\langle \frac{1}{2} E^2 \rangle_D$  el valor que corresponde al caso de que  $Z'$  sea la unidad,  $\frac{1}{2} E^2$  expresado en unidades de  $m$ , parámetro de masa de la teoría.

En un modelo realista, la masa del electrón libre debe ser  $m_{\text{exp}}$  por lo que  $m$  debe elegirse de forma que:

$$m_{\text{exp}} = N m \quad (103)$$

con lo que el término  $\langle \frac{1}{2} E^2 \rangle_{Z'}$  depende de  $Z'$  en la forma  $NZ'^3 m_{\text{exp}}$  en la que debe imponerse igualmente la condición de que  $NZ'$  sea la unidad con el fin de que el átomo descrito sea neutro. Con todo ello,  $\langle \frac{1}{2} E^2 \rangle_{Z'}$  resulta ser proporcional a  $Z'^2$ .

Calculamos a continuación el efecto que se produce en el primer término. Para ello debe calcularse el factor  $\omega_{nZ'} + \Delta\omega_{Z'}$ .

Vamos a utilizar para ello el método de Ritz-Galerkin (BF70). Este método proporciona una solución para el operador diferencial en estudio, obtenida como desarrollo en serie truncado, utilizando para ello un sistema ortonormal correspondiente a una parte de este operador, que se sabe resolver en forma analítica. En nuestro caso utilizamos el conjunto ortonormal de soluciones ligadas que se obtienen en la teoría de Dirac para el caso de un átomo hidrogenoideo de carga nuclear  $Z'$ .

Consideremos en primer lugar la modificación que se produce en los valores de  $\omega_{nZ'}$ :

$$\omega_{nZ'} = m \left( 1 - \frac{Z'^2 \alpha^2}{2n^2} \right) \quad (104)$$

que es válida en orden  $\alpha^2$ .

El campo  $\psi$  es una mezcla de estados de la forma:

$$\psi = \sum_i a_i Z' \psi_i(Z', r) \quad (105)$$

con la condición física de que:

$$\sum_i a_i^2 Z' = 1 \quad (106)$$

con el fin de que la norma de la solución sea  $N$ .

Debemos calcular los valores de  $a_i Z'$  y  $\Delta\omega_{Z'}$ .



La ecuación que obedece el campo  $\psi$  es:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi - Z' e A_0 \gamma^0 \psi = 0 \quad (107)$$

siendo:

$$A_0 = A_{p0} + A_{e0} \quad (108)$$

con:

$$A_{p0} = - ( e/4\pi r ) \quad (109-a)$$

$$y \quad -\nabla^2 A_{e0} = Z' e \psi^\dagger \psi \quad (109-b)$$

Los estados  $\psi_i(Z', r)$  son los correspondientes a la teoría de Dirac para el caso de un núcleo de carga  $Z'|e|$ , normalizados a  $N$ .

La aplicación del método de Ritz-Galerkin conduce al sistema de ecuaciones algebraicas:

$$N(\omega' - \omega_i Z') a_i = \sum_j \int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^\dagger Z' e A_{e0} a_j \psi_j d^3\vec{r} \quad (110)$$

Debe calcularse  $A_{e0}(Z', r)$ , que verifica la ecuación de campo:

$$-\nabla^2 A_{e0} = Z' e \psi^\dagger \psi(Z', r) = Z' e N Z'^3 \psi^\dagger \psi(Z' r) \quad (111)$$

de la que se deduce fácilmente que:

$$A_{e0}(Z', r) = N Z'^2 A_{e0D}(Z' r) \quad (112)$$

siendo  $A_{e0D}(\rho)$  la función que corresponde al caso de que  $Z'$  sea la unidad.

Este resultado es válido para el caso de estados puros o en el caso de estados mezcla si al modificar  $Z'$  no se alteran las proporciones ( $a_i/a_j$ ) de los diferentes estados. (Al igual que en el caso del campo eléctrico, el resultado solo es exacto al primer orden debido a la variación de la razón de  $f$  a  $g$  al variar  $Z'$ ).

Con ello:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi_i^\dagger Z' e A_{e0}(Z', r) a_j \psi_j d^3\vec{r} = N^2 Z'^3 a_j \langle i | A_{e0D} | j \rangle_D \quad (113)$$

siendo  $\langle i | A_{e0D} | j \rangle_D$  el valor que se obtiene si  $Z'$  es la unidad, expresado en unidades de  $m$ . Este término es cuadrático en ( $a_i, a_j$ ).

Si  $NZ'$  es la unidad, resulta de todo ello el sistema de ecua-

ciones algebraicas:

$$(\omega - \omega_j Z') a_j = Z'^2 \sum_j a_j \langle i | A_{e0} | j \rangle_D \quad (114)$$

con ambos miembros expresados en unidades de  $m$ .

En este sistema de ecuaciones se desconocen los valores de  $\omega$  y  $a_j$ , y se dispone además de la condición de normalización (106). Nótese que hemos omitido el subíndice  $Z'$  en todos los coeficientes  $a_j$ .

Si suponemos que  $\omega$  depende de  $Z'$  en la forma:

$$\omega = \omega_{Z'} = m(1 - Z'^2 v_1) \quad (115)$$

siendo  $v_1$  el valor que corresponde al caso de que  $Z'$  sea la unidad, el sistema de ecuaciones (114) resulta ser "múltiplo" del correspondiente a dicho caso. Por tanto, los valores de los diferentes  $a_j$  no se modifican al variar  $Z'$ , con lo que el desarrollo hecho es consistente con las hipótesis introducidas.

Con todo ello resulta válida la renormalización finita propuesta que genera una familia de soluciones físicas a partir de otra solución física, variando la energía de los diversos niveles en la forma:

$$E = m_{\text{exp}}(1 - Z'^2 C \alpha^2) \quad (116)$$

siendo la energía de la solución original la que corresponde al caso de que  $Z'$  sea la unidad. Las energías correspondientes a las soluciones numéricas obtenidas para dicho caso se expresan en la tabla XV junto con los valores correspondientes del parámetro  $C$ , definido implícitamente en (116).

Figuran en esta tabla igualmente los valores de  $Z'$  que hacen que las energías de los correspondientes estados renormalizados coincidan con los valores experimentales.

En la tabla XVI se pone de manifiesto que con una única elección para  $Z'^2$  ( $Z'^2 = 2.0453035$ ), que ajusta completamente la diferencia de energías entre los estados fundamental y primero excitado (1s y 2s respectivamente), se ajusta la diferencia correspondiente a los estados 2s y 3s con un error respecto al valor experimental de  $4.0998 m_{\text{exp}} \alpha^2$ .

Debe tenerse en cuenta que la renormalización propuesta solo es exacta al primer orden, lo que unido al hecho de que la consideración de efectos magnéticos da lugar a contribuciones a la

TABLA XV

Factores  $Z'$  de renormalización para el átomo de Hidrógeno

Estado	C	$Z'^2$ propio
$1s_{1/2}$	.243894	2.050098
$2s_{1/2}$	.060545	2.064616
$3s_{1/2}$	.026698	2.080922
$2p_{1/2}$	.05325	2.3474
$3p_{1/2}$	.02532	2.1945

TABLA XVI

Ajuste de las diferencias de energía

$Z'^2$	$\Delta \frac{E_{2s} - E_{1s}}{m_{\text{exp}}}$	$\Delta \frac{E_{3s} - E_{1s}}{m_{\text{exp}}}$	$\Delta \frac{E_{3s} - E_{2s}}{m_{\text{exp}}}$	$\Delta \frac{E_{2p} - E_{1s}}{m_{\text{exp}}}$	$\Delta \frac{E_{3p} - E_{1s}}{m_{\text{exp}}}$
2.045303	0	$-4.0998\alpha^4$	$-4.0998\alpha^4$	$280.14\alpha^4$	$48.983\alpha^4$
$Z'^2_{1s}$	$16.507\alpha^4$	$15.597\alpha^4$	$-.90956\alpha^4$	$297.30\alpha^4$	$68.661\alpha^4$

 $\Delta \equiv$  Valor teórico - Valor experimental

energía en orden  $m_{\text{exp}} \alpha^4$ , hace que el acuerdo logrado sea suficiente a este nivel.

La renormalización produce una variación en los campos que se traduce en una modificación del tamaño del átomo descrito. En efecto:

$$\langle r^n \rangle_{Z'} = Z'^{-n} \langle r^n \rangle_1 \quad (117)$$

con  $\langle r^n \rangle_1$  expresado en unidades de  $(m)^{-n}$ , es decir que:

$$\langle r^n \rangle_{Z'} = Z'^{-2n} \langle r^n \rangle_{1, m_{\text{exp}}}^{-1} \quad (118)$$

siendo  $\langle r^n \rangle_{1, m_{\text{exp}}}^{-1}$  el valor obtenido para las soluciones numéricas.

Con esto, el radio cuadrático medio correspondiente al estado fundamental pasa a ser:

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} = 204.86 (m_{\text{exp}})^{-1} \quad (119)$$

El valor predicho por la teoría de Dirac es de  $237.35 m_{\text{exp}}^{-1}$  lo que supone una discrepancia del 13.6%.

Los datos experimentales (FW76) no suponen un test suficientemente preciso en este aspecto, ya que la información de la que se dispone sobre el tamaño del átomo de Hidrógeno se obtiene a partir de experimentos de dispersión, de los que se calculan los factores de forma del átomo, y las aproximaciones que se hacen no son suficientemente finas.

Por lo que respecta al momento magnético del electrón:

$$M = -\frac{2}{3} e \int_0^\infty g f r^3 dr \quad (120)$$

como la renormalización modifica el cociente  $f/g$  en la forma:

$$\frac{f}{g} \longrightarrow Z' \frac{f}{g} \quad (121)$$

el cociente  $M/N_{\text{up}}$  no se renormaliza, lo que significa que los factores giromagnéticos, que son las magnitudes que se determinan clásicamente, no varían con la renormalización. Recordemos que los valores obtenidos para estos factores en los distintos estados (factores de Landé) estaban en bastante buen acuerdo con los valores experimentales.

De todas formas, el parámetro de masa de la teoría es la masa reducida del electrón, y como el magnetón de Bohr está expresado

en función de la masa del electrón libre  $m_1$ , los factores giromagnéticos obtenidos deben multiplicarse por el cociente  $m_1/m_{\text{exp}}$ , siendo  $m_{\text{exp}}$  la masa reducida del electrón respecto al protón. Con esto, para el caso del estado fundamental obtenemos finalmente el valor:

$$g_s = 2 (.9999917) \frac{m_1}{m_{\text{exp}}} = 2 (1 + .4619\alpha/2\pi) \quad (122)$$

con lo que, aunque no se obtiene la corrección experimental  $\alpha/2\pi$ , si se obtiene una modificación en el sentido correcto. Los efectos magnéticos, que no hemos incluido en este trabajo, pueden contribuir mediante una ligera variación de los campos a acercar el valor del factor giromagnético al valor experimental correspondiente, que se conoce con gran precisión.

Obsérvese que hemos utilizado como parámetro de masa finalmente la masa reducida del electrón. Esto es estrictamente correcto en el contexto de la Mecánica Cuántica no Relativista ya que la ecuación de Schrödinger para el átomo de Hidrógeno es separable en coordenadas del centro de masas y coordenadas relativas, lo que no es cierto en Mecánica Cuántica Relativista si bien tradicionalmente se utiliza la masa reducida del electrón con el fin de verificar los datos experimentales (GY69), aunque sin más justificación.

En nuestro caso, al ser las distribuciones de carga esféricamente simétricas, el centro de masa coincide con el del protón, por lo que en principio nuestra elección podría parecer puramente fenomenológica. Sin embargo, las diferencias de energía se miden respecto del continuo en el que el electrón quedaría libre y el protón debe sufrir un retroceso; por lo que es pertinente la consideración de la masa reducida para el electrón.

Por otra parte el principio de incertidumbre impide el poder localizar el centro de masas del sistema en la forma en la que se considera en el desarrollo teórico, lo que supone otra razón para considerar la masa reducida del electrón, aunque ésta es más bien una razón cualitativa.

## REFERENCIAS

- Barut A. O. (1964) "*Electrodynamics and classical theory of fields and particles*". Ed. Mc Millan & co.
- Byron F. W. & Fuller R. W. (1970) "*Mathematics of Classical and Quantum Physics II*". Ed. Addison-Wesley.
- Born M. & Infeld L. (1934) "*Foundations of the new Field Theory*". Proc. Roy. Soc. A144, 425.
- Bethe H. A. & Salpeter E. E. (1977) "*Quantum Mechanics of one-and two-electron atoms*". Ed. Plenum.
- Finkelstein R. (1951) "*On the quantization of a unitary field theory*" Phys. Rev. 75, 1079.
- Foster G. & Williamson Jr W. (1976) "*Electron-Hydrogen elastic scattering in the eikonal approximation*". Phys. Rev. A13, 936
- García L. & Usón J. M. (1979) "*A simple model for Poincaré self-stresses*" Será publicado en Found. Phys.
- Grotch H. & Yennie D. R. (1969) "*Effective potential model for calculating nuclear corrections to the energy levels of Hydrogen*". Rev. Mod. Phys. 41, 350.
- Hamming R. W. (1962) "*Numerical methods for scientists and engineers*". Ed. Mc Graw-Hill.
- Jauch J. M. & Rohrlich F. (1976) "*The theory of Photons and Electrons*". Ed. Springer.
- Lambert J. D. (1976) "*Computational methods in ordinary differential equations*". Ed. J. Wiley.
- Rañada A. F. (1977) "*Relativistic quantum mechanics of the Hydrogen atom as the weak field limit of a nonlinear theory*". Int. J. Theor. Phys. 16, 795.
- Rosen N. (1939) "*A field theory of elementary particles*". Phys. Rev. 55,94.
- Rosen G. (1967) "*Internal dynamics of particle-like solutions to nonlinear field theories*". J. Math. Phys. 8, 573.
- Rañada A. F., Rañada M. F., Soler M. & Vázquez L. (1974) "*Classical electrodynamics of a nonlinear Dirac field with anomalous magnetic moment*". Phys. Rev. D10, 517.
- Rañada A. F. & Soler M. (1973) "*Perturbation theory for an exactly soluble spinor model in interaction with its electromagnetic field*". Phys. Rev. D8, 3430.

- Rañada A. F., Usón J. M. & Vázquez L. (1978) "*UN modelo de carga en una electrodinámica no lineal*". Publicación homenaje al Prof. S. Velayos editada por la Facultad de Físicas de la Universidad Complutense.
- Rañada A. F. & Vázquez L. (1976) "*Classical system of nonlinear Dirac and Klein-Gordon fields*". Prog. Theor. Phys. 56, 311.
- Sakurai J. J. (1973) "*Advanced Quantum Mechanics*". Ed. Addison-Wesley.
- Scott-Russell J. (1834) "*Report on waves*" Proc. Roy. Soc. Edinburgh 319.
- Soler M. (1970) "*Classical stable nonlinear spinor field with positive rest energy*". Phys. Rev. D1, 2766.
- Usón J. M. (1979) "*Estudio clásico de las correcciones radiativas en el átomo de Hidrógeno*". Memoria presentada a la Fundación Juan March.
- Vázquez L. (1977a) "*Localised solutions of a nonlinear spinor field*". J. Phys. A10, 1361.
- Vázquez L. (1977b) "*Stationary localized solutions in nonlinear classical fields*". J. Math. Phys. 18, 1343.
- Wakano M. (1966) "*Intensely localized solutions of the classical Dirac-Maxwell field equations*". Prog. Theor. Phys. 35, 1117.
- Weyl H. (1950) "*On the coupling of gravitation to the electron*". Phys. Rev. 77, 699.
- Zabuski N. J. & Kruskal M. D. (1965) "*Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*". Phys. Rev. Lett. 15, 240.







FUNDACION JUAN MARCH  
SERIE UNIVERSITARIA

TITULOS PUBLICADOS

Serie Marrón

(Filosofía, Teología, Historia, Artes Plásticas, Música, Literatura y Filología)

- |    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 1  | Fierro, A.:<br><b>Semántica del lenguaje religioso.</b>   | 60 | Alcalá Galvé, A.:<br><b>El sistema de Servet.</b>   |
| 10 | Torres Monreal, F.:<br><b>El teatro español en Francia (1935-1973).</b>   | 61 | Mourão-Ferreira, D., y Ferreira, V.:<br><b>Dos estudios sobre literatura portuguesa contemporánea.</b>                  |
| 12 | Curto Herrero, F. Fco.:<br><b>Los libros españoles de caballerías en el siglo XVI.</b>                          | 62 | Manzano Arjona, M.ª:<br><b>Sistemas intermedios.</b>  |
| 14 | Valle Rodríguez, C. del:<br><b>La obra gramatical de Abraham Ibn Ezra.</b>                                      | 67 | Acero Fernández, J. J.:<br><b>La teoría de los juegos semánticos. Una presentación.</b>                                 |
| 16 | Solís Santos, C.:<br><b>El significado teórico de los términos descriptivos.</b>                                | 68 | Ortega López, M.:<br><b>El problema de la tierra en el expediente de Ley Agraria.</b>                                   |
| 18 | García Montalvo, P.:<br><b>La imaginación natural (estudios sobre la literatura fantástica norteamericana).</b> | 70 | Martín Zorraquino, M.ª A.:<br><b>Construcciones pronominales anómalas.</b>  |
| 21 | Durán-Lóriga, M.:<br><b>El hombre y el diseño industrial.</b>   | 71 | Fernández Bastarreche, F.:<br><b>Sociología del ejército español en el siglo XIX.</b>                                   |
| 32 | Acosta Méndez, E.:<br><b>Estudios sobre la moral de Epicuro y el Aristóteles esotérico.</b>                     | 72 | García Casanova, J. F.:<br><b>La filosofía hegeliana en la España del siglo XIX.</b>                                    |
| 40 | Estefanía Alvarez, M.ª del D. N.:<br><b>Estructuras de la épica latina.</b>                                     | 73 | Meya Llopart, M.:<br><b>Procesamiento de datos lingüísticos. Modelo de traducción automática del español al alemán.</b> |
| 53 | Herrera Hernández, M.ª T.:<br><b>Compendio de la salud humana de Johannes de Ketham.</b>                        | 75 | Artola Gallego, M.:<br><b>El modelo constitucional español del siglo XIX.</b>   |
| 54 | Flaquer Montequí, R.:<br><b>Breve introducción a la historia del Señorío de Buitrago.</b>                       | 77 | Almagro-Gorbea, M., y otros:<br><b>C-14 y Prehistoria de la Península ibérica.</b>                                      |

- 94 Falcón Márquez, T.:  
La Catedral de Sevilla.
- 98 Vega Cernuda, S. D.:  
J. S. Bach y los sistemas contrapuntísticos.
- 100 Alonso Tapia, J.:  
El desorden formal de pensamiento en la esquizofrenia.
- 102 Puentes Florido, F.:  
Rafael Cansinos Assens (novelista, poeta, crítico, ensayista y traductor).

## Serie Verde

(Matemáticas, Física, Química, Biología, Medicina)

- 2 Mulet, A.:  
Calculador en una operación de rectificación discontinua.
- 4 Santiuste, J. M.:  
Combustión de compuestos oxigenados.
- 5 Vicent López, J. L.:  
Películas ferromagnéticas a baja temperatura.
- 7 Salvá Lacombe, J. A.:  
Mantenimiento del hígado dador in vitro en cirugía experimental.
- 8 Plá Carrera, J.:  
Estructuras algebraicas de los sistemas lógicos deductivos.
- 11 Drake Moyano, J. M.:  
Simulación electrónica del aparato vestibular.
- 19 Purroy Unanua, A.:  
Estudios sobre la hormona Natriurética.
- 20 Serrano Molina, J. S.:  
Análisis de acciones miocárdicas de bloqueantes Beta-adrenérgicos.
- 22 Pascual Acosta, A.:  
Algunos tópicos sobre teoría de la información.
- 25 I Semana de Biología:  
Neurobiología.
- 26 I Semana de Biología:  
Genética.
- 27 I Semana de Biología:  
Genética.
- 28 Zugasti Arbizu, V.:  
Analizador diferencial digital para control en tiempo real.
- 29 Alonso, J. A.:  
Transferencia de carga en aleaciones binarias.
- 30 Sebastián Franco, J. L.:  
Estabilidad de osciladores no sinusoidales en el rango de microondas.
- 39 Blasco Olcina, J. L.:  
Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos.
- 44 Sánchez Rodríguez, L.:  
Estudio de mutantes de saccharomyces cerevisiae.
- 45 Acha Catalina, J. I.:  
Sistema automático para la exploración del campo visual.
- 47 García-Sancho Martín, F. J.:  
Uso del ácido salicílico para la medida del pH intracelular.
- 48 García García, A.:  
Relación entre iones calcio, fármacos ionóforos y liberación de noradrenalina.
- 49 Trillas, E., y Alsina, C.:  
Introducción a los espacios métricos generalizados.
- 50 Pando Ramos, E.:  
Síntesis de antibióticos aminoglicosídicos modificados.
- 51 Orozco, F., y López-Fanjul, C.:  
Utilización óptima de las diferencias genéticas entre razas en la mejora.

- 52 Gallego Fernández, A.:  
**Adaptación visual.**
- 55 Castellet Solanas, M.:  
**Una contribución al estudio de las teorías de cohomología generalizadas.**
- 56 Sánchez Lazo, P.:  
**Fructosa 1,6 Bisfosfatasa de hígado de conejo: modificación por proteasas lisosomales.**
- 57 Carrasco Llamas, L.:  
**Estudios sobre la expresión genética de virus animales.**
- 59 Afonso Rodríguez, C. N.:  
**Efectos magneto-ópticos de simetría par en metales ferromagnéticos.**
- 63 Vidal Costa, F.:  
**A la escucha de los sonidos cerca de  $T_\lambda$  en el  $4_{He}$  líquido.**
- 65 Andréu Morales, J. M.:  
**Una proteína asociada a membrana y sus subunidades.**
- 66 Blázquez Fernández, E.:  
**Desarrollo ontogénico de los receptores de membrana para insulina y glucagón.**
- 69 Vallejo Vicente, M.:  
**Razas vacunas autóctonas en vías de extinción.**
- 76 Martín Pérez, R. C.:  
**Estudio de la susceptibilidad magnetoeléctrica en el  $Cr_2O_3$  policristalino.**
- 80 Guerra Suárez, M.<sup>a</sup> D.:  
**Reacción de Amidas con compuestos organoaluminicos.**
- 82 Lamas de León, L.:  
**Mecanismo de las reacciones de iodación y acoplamiento en el tiroides.**
- 84 Repollés Moliner, J.:  
**Nitrosación de aminas secundarias como factor de carcinogénesis ambiental.**
- 86 II Semana de Biología:  
**Flora y fauna acuáticas.**
- 87 II Semana de Biología:  
**Botánica.**
- 88 II Semana de Biología:  
**Zoología.**
- 89 II Semana de Biología:  
**Zoología.**
- 91 Viéitez Martín, J. M.:  
**Ecología comparada de dos playas de las Rías de Pontevedra y Vigo.**
- 92 Cortijo Mérida, M., y García Blanco, F.:  
**Estudios estructurales de la glucógeno fosforilasa b.**
- 93 Aguilar Benítez de Lugo, E.:  
**Regulación de la secreción de LH y prolactina en cuadros anovulatorios experimentales.**
- 95 Bueno de las Heras, J. L.:  
**Empleo de polielectrolitos para la floculación de suspensiones de partículas de carbón.**
- 96 Núñez Alvarez, C., y Ballester Pérez, A.:  
**Lixiviación del cinabrio mediante el empleo de agentes complejantes.**
- 101 Fernández de Heredia, C.:  
**Regulación de la expresión genética a nivel de transcripción durante la diferenciación de *Artemia salina*.**
- 103 Guix Pericas, M.:  
**Estudio morfométrico, óptico y ultraestructural de los inmunocitos en la enfermedad celíaca.**
- 105 Llobera i Sande, M.:  
**Gluconeogénesis «in vivo» en ratas sometidas a distintos estados tiroideos.**

**(Geología, Ciencias Agrarias, Ingeniería, Arquitectura y Urbanismo)**

- |   |  |
|---|--|
| <p>3 Velasco, F.:<br/><b>Skarns en el batolito de Santa Olalla.</b></p> <p>6 Alemán Vega, J.:<br/><b>Flujo inestable de los polímeros fundidos.</b></p> <p>9 Fernández-Longoria Pinazo, F.:<br/><b>El fenómeno de inercia en la renovación de la estructura urbana.</b></p> <p>13 Fernández García, M.<sup>a</sup> P.:<br/><b>Estudio geomorfológico del Macizo Central de Gredos.</b></p> <p>15 Ruiz López, F.:<br/><b>Proyecto de inversión en una empresa de energía eléctrica.</b></p> <p>23 Bastarache Alfaro, M.:<br/><b>Un modelo simple estático.</b></p> <p>24 Martín Sánchez, J. M.:<br/><b>Moderna teoría de control: método adaptativo-predictivo.</b></p> <p>31 Zapata Ferrer, J.:<br/><b>Estudio de los transistores FET de microondas en puerta común.</b></p> <p>33 Ordóñez Delgado, S.:<br/><b>Las Bauxitas españolas como mena de aluminio.</b></p> <p>35 Juvé de la Barreda, N.:<br/><b>Obtención de series aneuploides en variedades españolas de trigo común.</b></p> <p>36 Alarcón Alvarez, E.:<br/><b>Efectos dinámicos aleatorios en túneles y obras subterráneas.</b></p> <p>38 Lasa Dolhagaray, J. M., y Silván López, A.:<br/><b>Factores que influyen en el espigado de la remolacha azucarera.</b></p> <p>41 Sandoval Hernández, F.:<br/><b>Comunicación por fibras ópticas.</b></p> | <p>42 Pero-Sanz Elorz, J. A.:<br/><b>Representación tridimensional de texturas en chapas metálicas del sistema cúbico.</b></p> <p>43 Santiago-Alvarez, C.:<br/><b>Virus de insectos: multiplicación, aislamiento y bioensayo de Baculovirus.</b></p> <p>46 Ruiz Altisent, M.:<br/><b>Propiedades físicas de las variedades de tomate para recolección mecánica.</b></p> <p>58 Serradilla Manrique, J. M.:<br/><b>Crecimiento, eficacia biológica y variabilidad genética en poblaciones de dípteros.</b></p> <p>64 Farré Muntaner, J. R.:<br/><b>Simulación cardiovascular mediante un computador híbrido.</b></p> <p>79 Fraga González, B. M.:<br/><b>Las Giberelinas. Aportaciones al estudio de su ruta biosintética.</b></p> <p>81 Yáñez Parareda, G.:<br/><b>Sobre arquitectura solar.</b></p> <p>83 Díez Viejobueno, C.:<br/><b>La Economía y la Geomatemática en prospección geoquímica.</b></p> <p>90 Pernas Galí, F.:<br/><b>Master en Planificación y Diseño de Servicios Sanitarios.</b></p> <p>97 Joyanes Pérez, M.<sup>a</sup> G.:<br/><b>Estudios sobre el valor nutritivo de la proteína del mejillón y de su concentrado proteico.</b></p> <p>99 Fernández Escobar, R.:<br/><b>Factores que afectan a la polinización y cuajado de frutos en olivo (Olea europaea L.).</b></p> <p>104 Oriol Marfá i Pagés, J.:<br/><b>Economía de la producción de flor cortada en la Comarca de el Meresme.</b></p> |
|---|--|

## **Serie Azul**

**(Derecho, Economía, Ciencias Sociales, Comunicación Social)**

- |    |  |    |   |
|----|--|----|---|
| 17 | <b>Ruiz Bravo, G.:</b><br><b>Modelos econométricos en el enfoque objetivos-instrumentos.</b>                 | 74 | <b>Hernández Lafuente, A.:</b><br><b>La Constitución de 1931 y la autonomía regional.</b> |
| 34 | <b>Durán López, F.:</b><br><b>Los grupos profesionales en la prestación de trabajo: obreros y empleados.</b> | 78 | <b>Martín Serrano, M., y otros:</b><br><b>Seminario sobre Cultura en Periodismo.</b>      |
| 37 | <b>Lázaro Carreter, F., y otros:</b><br><b>Lenguaje en periodismo escrito.</b>                               | 85 | <b>Sirera Oliag, M.ª J.:</b><br><b>Las enseñanzas secundarias en el País Valenciano.</b>  |



