

**VICENTE MARTIN VALERO**

**ESTADISTICA MATEMATICA  
Y CONTROL DE CALIDAD**



**PUBLICACIONES DE LA  
FUNDACION JUAN MARCH**

colección de monografías

Fundación Juan March

**GUADARRAMA**







ESTADISTICA MATEMATICA  
Y CONTROL DE CALIDAD

COLECCION DE MONOGRAFIAS  
SECCION 7: — ARQUITECTURA, URBANISMO E INGENIERIA

ESTADÍSTICA MATEMÁTICA  
Y CONTROL DE CALIDAD

SECCION IV— ARQUITECTURA, URBANISMO E INGENIERIA  
COLECCION DE MONOGRAFIAS

VICENTE MARTIN VALERO

ESTADISTICA MATEMATICA  
Y CONTROL DE CALIDAD



PUBLICACIONES DE LA  
FUNDACION JUAN MARCH  
GUADARRAMA

*Trabajo patrocinado por la  
Fundación Juan March.  
Informó para su aprobación  
El Secretario del Departamento de Estudios Técnicos Industriales:  
Jesús Briones y Sainz de Tejada*

\* \* \*

*La Fundación Juan March no se solidariza necesariamente con las opiniones  
de los autores cuyas obras publica*

\* \* \*

*Trescientos ejemplares de esta obra han sido donados por la Fundación  
Juan March a centros culturales y docentes.*

© Copyright by

FUNDACION JUAN MARCH

Depósito legal: M. 24.121 - 1973

I. S. B. N. 84-250-5011-8, obra completa

Printed in Spain by

TORDESILLAS, ORGANIZACIÓN GRÁFICA Sierra de Monchique, 25 - MADRID

*A mi esposa.*

Fundación Juan March

## INDICE

Prólogo, por J. Torrens-Ibern .....	19
Advertencia preliminar .....	23
Nota de agradecimiento .....	24
CAPÍTULO 1. Variabilidad de las fabricaciones.....	25
1.1. El problema .....	25
1.2. El modelo matemático .....	28
CAPÍTULO 2. Muestra aleatoria procedente de una población cualquiera .....	31
2.1. Muestra aleatoria de extensión $n$ .....	31
2.2. Teorema Límite Central .....	33
2.3. Comportamiento asintótico de la ley de probabilidad de la media muestral $\bar{x}$ .....	38
2.3.1. <i>Población infinita</i> .....	38
2.3.2. <i>Población finita</i> .....	40
2.4. Comportamiento asintótico de la ley de probabilidad de la variancia muestral en el caso de población infinita .....	45
2.5. Ley de probabilidad del término de ran- go $r$ de una muestra ordenada .....	46
2.5.1. <i>Ley de probabilidad del valor má-                 ximo muestral <math>y_n</math></i> .....	47

2.5.2.	<i>Ley de probabilidad del valor mínimo muestral <math>y_1</math></i> .....	47
2.5.3.	<i>Ley de probabilidad de la mediana muestral <math>y_{s+1}</math></i> .....	47
2.6.	Ley de probabilidad de la amplitud muestral .....	48
CAPÍTULO 3. Muestra de una variable aleatoria normal $N(m, \sigma)$ . Leyes asociadas al proceso del muestreo .....		51
3.1.	Ley de probabilidad de la media $\bar{x}$ de una muestra de $n$ elementos extraída de una población normal $N(m, \sigma)$ .....	51
3.2.	Ley de $\chi^2$ .....	52
3.3.	Ley de $\chi$ .....	59
3.4.	Ley de Student .....	62
3.5.	Ley de $t$ no centrada .....	66
3.6.	Ley de Fisher-Snedecor .....	74
3.7.	Relaciones entre las variables $K$ , $\chi^2$ , $t$ y $F$ . .....	78
3.8.	Ley de probabilidad de la mediana $y_{s+1}$ de una muestra de $n$ elementos extraída de una población normal $N(m, \sigma)$ .....	80
3.9.	Ley de probabilidad de la amplitud $\omega$ de una muestra de $n$ elementos extraída de una población normal $N(m, \sigma)$ .....	81
3.10.	Realización práctica del muestreo. Muestreo simulado. Método de Monte-Carlo...	82
CAPÍTULO 4. Estimación de los parámetros de una población .....		88
4.1.	Estimadores .....	88
4.1.1.	<i>Introducción</i> .....	88

4.1.2.	<i>Verosimilitud, cantidad de información y resumen exhaustivo.....</i>	90
4.1.3.	<i>Estimadores convergentes (correctos) .....</i>	94
4.1.4.	<i>Estimadores centrados (sin sesgo).</i>	94
4.1.5.	<i>Estimador absolutamente correcto.</i>	95
4.1.6.	<i>Precisión intrínseca de un estimador. Desigualdad de Cramer-Rao...</i>	96
4.2.	<i>Estimadores de la media, variancia y desviación de una ley normal <math>N(m, \sigma)</math>.....</i>	99
4.3.	<i>Métodos para la formación de estimadores .....</i>	105
4.3.1.	<i>Introducción .....</i>	105
4.3.2.	<i>Método de analogía .....</i>	105
4.3.3.	<i>Método de la máxima verosimilitud.</i>	106
4.4.	<i>Intervalo de confianza de un estimador...</i>	109
4.4.1.	<i>Introducción .....</i>	109
4.4.2.	<i>Intervalo de confianza para la media de una distribución normal de desviación tipo conocida .....</i>	115
4.4.3.	<i>Intervalo de confianza para la media de una distribución normal de desviación tipo desconocida.....</i>	115
4.4.4.	<i>Intervalo de confianza aproximado para la media de una distribución cualquiera de desviación tipo conocida en el caso de muestras grandes .....</i>	116
4.4.5.	<i>Intervalos de confianza aproximados utilizando estadísticas asintóticamente normales .....</i>	117
4.4.6.	<i>Intervalo de confianza aproximado para un estimador de máxima verosimilitud .....</i>	117
4.4.7.	<i>Intervalo de confianza para la variancia y la desviación tipo de una distribución normal .....</i>	118

4.4.8.	<i>Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos distribuciones normales de desviaciones tipo conocidas .....</i>	120
4.4.9.	<i>Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos distribuciones normales de desviaciones tipo desconocidas pero iguales.....</i>	121
4.4.10.	<i>Intervalo de confianza para la relación de las variancias y desviaciones tipo de dos distribuciones normales .....</i>	122
4.4.11.	<i>Relación entre estimación puntual y estimación por intervalo.....</i>	123
4.5.	<i>Límites de tolerancia .....</i>	125
4.5.1.	<i>Introducción .....</i>	125
4.5.2.	<i>Intervalos de tolerancia con especificación unilateral para el caso de una distribución normal <math>N(m, \sigma)</math> de media y desviación tipo desconocidas .....</i>	127
4.5.3.	<i>Intervalo de tolerancia con especificación bilateral para el caso de una distribución normal <math>N(m, \sigma)</math> de media y desviación tipo desconocidas .....</i>	132
4.5.4.	<i>Límites de tolerancia independientes de la naturaleza de la ley de probabilidad de la población.....</i>	133
CAPÍTULO 5.	<i>El razonamiento estadístico .....</i>	136
5.1.	<i>Introducción .....</i>	136
5.2.	<i>Teoría general de las pruebas de hipótesis.</i>	143
5.2.1.	<i>Definiciones previas .....</i>	143
5.2.2.	<i>Planteamiento general del problema</i>	146
5.2.3.	<i>Propiedades de una prueba .....</i>	149
5.2.4.	<i>Método de Neyman-Pearson .....</i>	150

5.3.	Prueba entre dos hipótesis simples.....	151
5.3.1.	<i>Teorema de Neyman</i> .....	151
5.3.2.	<i>Ejemplos de aplicación del teorema de Neyman</i> .....	154
5.4.	Prueba entre dos hipótesis múltiples.....	161
5.4.1.	<i>Introducción</i> .....	161
5.4.2.	<i>Prueba UMP para la clase <math>\{\theta \leq \theta_0 \mid \theta &gt; \theta_0\}</math></i> .....	162
5.4.3.	<i>Prueba UMP para la clase <math>\{\theta \leq \theta_1, \theta \geq \theta_2 \mid \theta_1 &lt; \theta &lt; \theta_2\}</math></i> .....	165
5.4.4.	<i>Prueba UMP para la clase <math>\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \mid \theta &lt; \theta_1, \theta &gt; \theta_2\}</math></i> .....	166
5.4.5.	<i>Método de la razón de verosimilitudes</i> .....	167
5.5.	Relación entre las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza .....	178
5.6.	Curva de eficacia de una prueba.....	180
5.7.	Planteamiento de una prueba a partir de unas condiciones de eficacia preestablecidas .....	191
5.8.	Planteamiento de una prueba por el método de Bayes .....	195
CAPÍTULO 6. Pruebas de hipótesis relativas a la media o a la desviación tipo de una distribución normal .....		203
6.1.	Introducción .....	203
6.2.	Prueba de una hipótesis relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo conocida. Especificación unilateral...	204
6.2.1.	<i>Especificación unilateral superior...</i>	204
6.2.2.	<i>Especificación unilateral inferior...</i>	211
6.2.3.	<i>Construcción de las curvas de eficacia</i> .....	213

6.2.4.	<i>Determinación gráfica del tamaño de la muestra</i> .....	225
6.3.	Prueba de una hipótesis relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo conocida. Especificación bilateral .....	227
6.3.1.	<i>Construcción de la prueba</i> .....	227
6.3.2.	<i>Construcción de las curvas de eficacia</i> .....	236
6.3.3.	<i>Determinación gráfica del tamaño de la muestra</i> .....	245
6.4.	Prueba de una hipótesis relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo desconocida. Especificación unilateral.	250
6.4.1.	<i>Especificación unilateral superior.</i>	250
6.4.2.	<i>Especificación unilateral inferior...</i>	258
6.4.3.	<i>Construcción de las curvas de eficacia</i> .....	259
6.5.	Prueba de una hipótesis relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo desconocida. Especificación bilateral.	261
6.5.1.	<i>Construcción de la prueba</i> .....	261
6.5.2.	<i>Construcción de las curvas de eficacia</i> .....	266
6.6.	Prueba de una hipótesis relativa a la desviación tipo de una distribución normal de media conocida. Especificación unilateral.	267
6.6.1.	<i>Especificación unilateral superior.</i>	267
6.6.2.	<i>Especificación unilateral inferior...</i>	273
6.6.3.	<i>Construcción de las curvas de eficacia</i> .....	276
6.7.	Prueba de una hipótesis relativa a la desviación tipo de una distribución normal de media conocida. Especificación bilateral...	277

6.7.1.	<i>Construcción de la prueba.....</i>	277
6.7.2.	<i>Construcción de las curvas de eficacia .....</i>	285
6.8.	Prueba de una hipótesis relativa a la desviación tipo de una distribución normal de media desconocida. Especificación unilateral .....	286
6.8.1.	<i>Especificación unilateral superior...</i>	286
6.8.2.	<i>Especificación unilateral inferior...</i>	289
6.8.3.	<i>Construcción de las curvas de eficacia .....</i>	290
6.9.	Prueba de una hipótesis relativa a la desviación tipo de una distribución normal de media desconocida. Especificación bilateral .....	291
6.9.1.	<i>Construcción de la prueba.....</i>	291
6.9.2.	<i>Construcción de las curvas de eficacia .....</i>	293
CAPÍTULO 7. Pruebas de hipótesis relativas al porcentaje de elementos fuera de especificación existente en una distribución normal.....		
7.1.	Introducción .....	295
7.2.	Prueba de una hipótesis relativa al porcentaje de elementos fuera de especificación existente en una distribución normal de media desconocida y desviación tipo conocida .....	298
7.2.1.	<i>Enunciado del problema.....</i>	298
7.2.2.	<i>Un solo límite de especificación.....</i>	299
7.2.3.	<i>Dos límites de especificación.....</i>	303
7.3.	Prueba de una hipótesis relativa al porcentaje de elementos fuera de especificación existente en una distribución normal de media conocida y desviación tipo desconocida .....	333

7.3.1.	<i>Enunciado del problema</i> .....	333
7.3.2.	<i>Un solo límite de especificación...</i>	333
7.3.3.	<i>Dos límites de especificación.....</i>	335
7.4.	Prueba de una hipótesis relativa al porcentaje de elementos fuera de especificación existente en una distribución normal de media y desviación tipo desconocidas.....	341
7.4.1.	<i>Enunciado del problema</i> .....	341
7.4.2.	<i>Un solo límite de especificación.....</i>	341
7.4.3.	<i>Dos límites de especificación.....</i>	362
CAPÍTULO 8. Control de recepción .....		367
8.1.	Naturaleza estadística de los problemas de control de la calidad de las fabricaciones.	367
8.2.	Métodos de inspección por muestra.....	371
8.3.	Planes de control cualitativo. Control por atributos .....	373
8.3.1.	<i>Planes de control cualitativo por muestreo simple</i> .....	373
8.3.2.	<i>Planes de control cualitativo por muestreo doble</i> .....	394
8.3.3.	<i>Planes de control cualitativo por muestreo múltiple</i> .....	404
8.3.4.	<i>Planes de control cualitativo por muestreo progresivo o secuencial...</i>	405
8.3.5.	<i>Planes de control cualitativo por muestreo continuo</i> .....	428
8.4.	Planes de control cuantitativo. Control por medidas .....	442
8.4.1.	<i>Introducción</i> .....	442
8.4.2.	<i>Planes de control cuantitativo por muestreo simple</i> .....	443
8.4.3.	<i>Planes de control cuantitativo por muestreo progresivo o secuencial...</i>	447
8.4.4.	<i>Control de la media y de la dispersión de un suministro</i> .....	468

CAPÍTULO 9. Control en curso de fabricación.....	480
9.1. Introducción .....	480
9.1.1. <i>Variabilidad de las fabricaciones...</i>	480
9.1.2. <i>Teoría de los gráficos de control...</i>	485
9.1.3. <i>Estimación previa de la variabilidad .....</i>	496
9.1.4. <i>Curva de eficacia de un gráfico de control .....</i>	501
9.2. Control cuantitativo. Gráficos de control clásicos por medidas .....	510
9.2.1. <i>Gráficos de control clásicos con tamaño de muestra prefijado para la vigilancia de un proceso no apto o justamente apto para el trabajo que se le confía .....</i>	510
9.2.2. <i>Gráficos de control clásicos con tamaño de muestra prefijado para la vigilancia de un proceso sobradamente apto para el trabajo que se le confía .....</i>	520
9.2.3. <i>Gráficos de control clásicos con condiciones de eficacia prefijadas...</i>	522
9.2.4. <i>Gráficos de control clásicos con condiciones de eficacia prefijadas para la vigilancia de un proceso no apto o justamente apto para el trabajo que se le confía .....</i>	524
9.2.5. <i>Gráficos de control clásicos con condiciones de eficacia prefijadas para la vigilancia de un proceso sobradamente apto para el trabajo que se le confía .....</i>	530
9.3. Control cualitativo. Gráficos de control del número de desechos, de la proporción de desechos y del número de defectos por unidad .....	532

9.3.1.	<i>El control cualitativo .....</i>	532
9.3.2.	<i>Gráficos de control del número de desechos o de la proporción de de- sechos .....</i>	533
9.3.3.	<i>Gráficos de control del número de defectos por unidad .....</i>	536
9.4.	<i>Métodos especiales de control en curso de fabricación .....</i>	538
9.4.1.	<i>Gráficos de control por medianas...</i>	538
9.4.2.	<i>Gráficos de control con límites des- centrados .....</i>	540
9.4.3.	<i>Aplicación de los planes de inspec- ción por muestreo continuo al con- trol en curso de fabricación .....</i>	542
9.4.4.	<i>Gráficos de control por observacio- nes acumuladas .....</i>	544
9.4.5.	<i>Gráficos de control para variabili- dades no normales .....</i>	547
Tablas .....		551
Índice de tablas .....		591
Bibliografía seleccionada .....		595

## PROLOGO

El desarrollo de las aplicaciones de la metodología estadística en todas las actividades humanas es un fenómeno que difícilmente se hubiera podido predecir a principios de siglo. Las estadísticas significaban recopilaciones de cifras cuya finalidad se circunscribía casi en su propia existencia. Los organismos y administraciones especializadas realizaban su labor de almacenamiento de datos sin que muchas veces se pudiese pensar en un aprovechamiento posterior del caudal informativo que toda colección de cifras contiene.

Al lado de estas actividades se desarrolló por parte de algunos matemáticos otra labor casi sin contacto con ellas. Basándose en la Teoría y en el Cálculo de las Probabilidades se interesaron por la significación concreta de los resultados obtenidos mediante observaciones en número reducido. Para marcar la diferencia de sus preocupaciones respecto al mero almacenamiento de cifras creyeron adecuado llamar a su disciplina Estadística Matemática, pero constituyendo en realidad la verdadera Estadística, sin necesidad de adjetivo, cuyas aplicaciones mostrarían más tarde el interés práctico.

Los conceptos estadísticos, según la nueva visión relacionada con el estudio del azar, se infiltraron en todas las ciencias, incluso las más reacias a la matematización, como las ciencias humanas, y hacia los años veinte, se introdujeron en la industria y en la técnica productiva. Los nombres de Shewart y de Dodge y Romig marcan con gran esplendor esta aplicación de la Estadística al Control Industrial que tenía que producir unos resultados muy interesantes tanto desde el punto de vista económico, como formativo. En efecto, no son simplemente los métodos estadísticos de control lo que tiene impor-

tancia en estas aplicaciones, sino la mentalidad que desarrolla en los técnicos para una mejor comprensión de los fenómenos que observan en su campo de actividad. El carácter aleatorio de tales fenómenos, tan extendidos dentro del dominio industrial, contradice los conceptos deterministas en los que durante siglos el hombre ha creído, y es precisa una labor lenta y profunda para admitir los nuevos conceptos probabilísticos, más adaptados a la realidad que aquéllos.

La guerra mundial (1939-1945), con sus necesidades masivas de producción y la conducción racional de la misma, por lo que a las naciones aliadas se refiere, dio lugar junto con el nacimiento de la Investigación Operativa a un impulso fuerte de las aplicaciones industriales de la Estadística, y de manera primordial de la inspección o control.

En Europa la post-guerra ha permitido un amplio desarrollo de estas técnicas y de estas aplicaciones. En España también, aunque demasiado a menudo limitándose a aplicaciones recetarias, tales como las que consisten en la utilización de las sucesivas versiones de las tablas «Military Standard 105», sin asimilación previa del criterio estadístico en que se fundamentan.

Era conveniente apareciese un libro donde los problemas de la inspección y el control industrial fuesen estudiados a fondo, con criterio científico pero al mismo tiempo práctico. En la industria no son necesarios desarrollos matemáticos, por elegantes que sean en sí mismos, si no llevan a una aplicación útil y comprensible. Para la confección de este libro las cualidades que debía reunir su autor eran varias y diversas. Al lado de un buen conocimiento de las bases matemáticas, estadísticas y probabilísticas del control industrial, debía conocer la práctica del mismo y poseer los conocimientos técnicos precisos para que los razonamientos y los ejemplos que expone no fallasen por falta de un criterio concreto de lo que es la realidad industrial. Debía tener dotes pedagógicas que le permitiesen explicar con claridad conceptos que resultan no ser propios del sentido común y, por otra parte, un espíritu metódico a quien no repugne realizar una labor de comprobación de cálculos realizados por

otros y de ampliación de los mismos cuando los que se encuentran en publicaciones de la especialidad no son suficientes para el objetivo perseguido. Era conveniente también, gozar de un espíritu metódico para mostrar la unidad de los diferentes tipos de control y exponerlos en forma ordenada.

El autor de este libro, como sabemos los que le conocemos desde hace años, posee estas cualidades y muchas más que no son necesarias para escribir el libro, pero que no lo dificultan tampoco. Por esto celebramos lo haya escrito y que la Fundación March, financiadora ya de la investigación que lo hizo posible, haya también ayudado en su edición.

\* \* \*

¿Hay en este libro muchas novedades? En sentido absoluto tendríamos que contestar negativamente. Todo lo que se halla expuesto en él es esencialmente clásico. Pero, en cambio, nos encontramos a menudo con desarrollos nuevos, llevados más lejos de lo que había contenido a otros autores, principalmente en el sentido de construir tablas y gráficos que facilitan la utilización de los métodos de control considerados. El lector agradecerá también la gran cantidad de ejemplos de aplicación de los métodos de cálculo preconizados y que permiten concretarlos mucho más de lo que haría su simple exposición.

Sin embargo, las que a mi juicio constituyen las mejores cualidades del libro son su unidad y su ordenación. Al leer ciertos libros dedicados a las aplicaciones de la Estadística al Control Industrial se puede tener la impresión de que la inspección conducente a la recepción de los lotes recibidos es algo diferente, no solo en los métodos sino también en las bases científicas respecto a la verificación que se efectúa durante el proceso de la fabricación. Esta impresión se acrecienta por la contraposición bien marcada que significa la utilización de unas tablas (las Military Standard, principalmente) en un caso y de unos gráficos en el otro. El autor ha sabido, aquí, mostrar cómo ambos procedimientos de control tienen

un fundamento común, la teoría de las pruebas de hipótesis estadísticas, y partiendo de ella llegar a las aplicaciones con sus condicionamientos particulares, propios de cada técnica de control.

Al lado y como consecuencia de esta unidad de criterio, la presentación del tema resultaba obvia y, en cierto modo, determinada de antemano. Con muy buen acierto empieza el autor por sentar las bases estadísticas que serán necesarias durante el desarrollo total de su tema, estudiando sucesivamente las diferentes leyes de probabilidad que afectan los parámetros estadísticos a los que el control industrial se refiere. Analiza, luego, las propiedades y obtención de sus estimadores, los fundamentos del razonamiento estadístico y los conceptos y medida de la eficacia de las pruebas de hipótesis que pueden aplicarse al estudio de los problemas de la inspección en la industria. Entrando ya de lleno en las aplicaciones trata, a continuación, de las pruebas de hipótesis relativas a los parámetros de distribuciones normales y a los tantos por cientos de desechos que en ellas pueden encontrarse, para finalizar, en forma todavía más concreta, considerando los controles de recepción y en curso de fabricación.

Permítaseme, para terminar, felicitar cordialmente a mi amigo y antiguo colaborador, el ingeniero Vicente Martín Valero, por la labor ardua que en su día emprendió y por los buenos frutos que de ella ha sacado, no sólo el autor sino también toda la industria española. Esta tendrá ahora un buen libro de referencia para la resolución de todos los problemas que se le presenten en el campo del control y de la inspección. También puedo felicitar a los estudiosos futuros lectores de este libro porque en él encontrarán sin duda el camino que buscaban y, muchas veces, bastante más de lo que creían necesitar.

J. TORRENS-IBERN

*Catedrático de la Escuela Técnica  
Superior de Ingenieros Industriales  
de Barcelona*

## ADVERTENCIA PRELIMINAR

Este libro no es fruto de una labor de investigación científica propiamente dicha. Es, más bien, el resultado de mi experiencia pedagógica y profesional en el campo de las aplicaciones industriales de la Estadística. Al escribirlo he intentado desarrollar, de forma coherente, los principios fundamentales del *razonamiento estadístico*, poderosa herramienta cuyo alcance y cuyas limitaciones, ni son fáciles de comprender, ni aparecen expuestas de forma suficientemente clara en la mayor parte de las obras especializadas. No ha sido, pues, mi objetivo abrir caminos nuevos a la ciencia estadística. Siempre dentro del marco de lo clásico, he pretendido únicamente ir un poco más allá de lo que han ido otros autores, desarrollando pruebas de hipótesis nuevas y estructurando teoría y aplicaciones dentro de un conjunto homogéneo. Estos han sido mis objetivos. Al estudioso lector corresponde juzgar si realmente los he alcanzado.

## NOTA DE AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento:

- a la Fundación Juan March, primero, que me concedió una beca para desarrollar esta obra y que luego se ha encargado de su edición;
- a don Antonio Bosch Salvá, después, que me ayudó a preparar los programas de ordenador para el cálculo de las tablas numéricas;
- a mi esposa, más tarde, a quien correspondió la ingrata tarea de interpretar mis manuscritos y componer el primer original;
- finalmente, y de una forma muy especial, a don Juan March Delgado, cuyo mecenazgo ha hecho posible la publicación de este libro.

EL AUTOR

## CAPITULO 1

### VARIABILIDAD DE LAS FABRICACIONES

#### 1.1 EL PROBLEMA

En todos los niveles de la actividad económica se aprecia la circulación de una gran masa de materias primas, productos semielaborados y productos finales de consumo (doméstico o industrial) que, por razones muy diversas, deben responder a unas especificaciones mínimas, entendiéndose por especificaciones un conjunto de condiciones que debe reunir un producto para resultar adecuado para un fin determinado.

Por ejemplo:

— el contenido en azufre de un lignito destinado a ser quemado en una planta generadora de vapor no debe sobrepasar cierto límite si se quieren evitar corrosiones en las calderas;

— la dureza de un acero destinado a la fabricación de ciertos ejes deberá ser la justa, toda vez que durezas inferiores originarán desgastes prematuros, mientras que durezas superiores provocarán dificultades a lo largo del proceso de mecanización;

— el contenido en piezas defectuosas de un lote de un determinado suministro no deberá superar cierto límite, para que un comprador se decida a aceptarlo;

— el peso neto de los paquetes de un cierto producto no deberá ser muy distinto del garantizado en la parte externa del envase, pues pesos superiores supondrán pérdida para la empresa envasadora, mientras que pesos inferiores pueden provocar persecución legal, etc., etc.

En todos estos ejemplos puede apreciarse la existencia de una especificación que, bajo la apariencia de condicionamiento tecnológico, legal, etc., esconde una motivación de carácter esencialmente económico. En efecto, siendo el objeto de la Economía la satisfacción de las necesidades dentro del marco de la escasez, el conjunto que forman las especificaciones no constituye sino una condición más para el logro del óptimo global.

Ahora bien, dado que todo aquello que no cumple una especificación (desecho) es superfluo desde el punto de vista económico, por constituir un desaprovechamiento de los recursos escasos, ¿puede exigirse del proceso productivo que, en pos del óptimo global, no genere desechos?

Dicho de otra forma, ¿tiene capacidad una tecnología para ajustar su producción «en un cien por cien» a cualquier especificación por rigurosa que ésta sea?

La experiencia enseña que no.

Esta negativa encuentra su justificación dentro de un marco mucho más general que el de las actividades productivas.

En efecto, siempre que se estudia una característica determinada, X, de un fenómeno físico o económico, se obtienen resultados distintos en cada observación particular.

Si analizamos, por ejemplo, la duración de vida de unas lámparas eléctricas de un cierto lote, la dureza de unos ejes de acero de un cierto suministro, el diámetro de unos pistones de motor de cierta fabricación en serie, el consumo diario de cierto producto químico en una factoría, el número de artículos vendidos durante una semana en unos almacenes, el caudal medio mensual de un río a lo largo de los años, etc., comprobaremos que las observaciones efectuadas sobre la característica X objeto de estudio (duración de vida, dureza, diámetro, consumo diario, número de artículos vendidos, caudal medio mensual, etcétera) muestran que dicha magnitud es esencialmente variable y que el valor que adoptará en una futura observación no puede ser predicho con exactitud.

¿Cuáles son los motivos de esta variabilidad?

Para analizarlos, refirámonos a un ejemplo concreto

dentro del campo de la industria mecánica: una fabricación de ejes de acero de diámetro nominal  $d$  mm.

Si medimos uno a uno todos los ejes del lote comprobaremos que el diámetro varía de unos a otros, no pudiendo hablarse de un diámetro  $d$  común a todos ellos, sino de un diámetro  $d + \epsilon$ , siendo  $\epsilon$  una cantidad positiva o negativa distinta para cada eje del lote.

En este caso, las razones de la variabilidad apreciada hay que buscarlas en las imprecisiones inherentes al proceso de fabricación y al sistema de medición utilizados.

En efecto, en todo proceso de fabricación interviene un gran número de factores internos y externos a la misma cuya absoluta fijeza es imposible garantizar. Son factores internos al proceso aquellos que derivan de la estructura y comportamiento estático y dinámico de las herramientas, máquinas y, en general, de los equipos utilizados. Son factores externos, el factor humano y todos aquellos que derivan de la constitución físico-química de los materiales utilizados y de las condiciones ambientales del medio. Todos estos factores pueden, desde luego, estabilizarse, pero no pueden fijarse. Su acción conjunta, cambiante de la fabricación de un eje a otro, e incluso a lo largo de la fabricación de un mismo eje, es lógico provoque desigualdades de diámetro entre los distintos elementos del lote, aunque individualmente considerados cada factor tenga una importancia muy reducida.

Además, para observar la magnitud diámetro hay que recurrir a la utilización de aparatos de medida (¡fabricados y consecuentemente imprecisos!) que introducen en el proceso una nueva fuente de fluctuación.

La variabilidad apreciada está, pues, cumplidamente justificada.

En esencia, todos estos razonamientos son extrapolables a cualquier fenómeno físico o económico. La incertidumbre en las observaciones es una consecuencia inevitable de la intervención de múltiples factores incontrolados e incontrolables.

Volviendo al campo de la producción de bienes de consumo, el descubrimiento de la variabilidad nos sitúa ante un conflicto. Por una parte, la existencia de unas especifi-

caciones. Por otra, la incapacidad de la tecnología para cumplirlas en un cien por cien.

Especificación y variabilidad; dos realidades contrapuestas que se traducen en un hecho inevitable: la fabricación de desechos.

Para optimizar el proceso económico habrá que minimizar dentro de lo posible este inevitable despilfarro de recursos.

La forma de conseguirlo será:

— el perfeccionamiento de los medios de producción, de forma que la variabilidad vea cada vez más limitado su campo de acción, y

— el control.

Control en el nivel de producción, para ajustar primero el proceso de forma que genere el mínimo número de desechos posible y detectar, más tarde, sus desarreglos («control en curso de fabricación»).

Control en el nivel de consumo para seleccionar las calidades mínimas aceptables de las inadmisibles («control de recepción»).

¿En qué debe consistir este control?

¿Cómo plantearlo?

¿Cómo llevarlo a la práctica?

Contestar a estas preguntas constituye el objeto de esta obra.

## 1.2 EL MODELO MATEMATICO

Antes de entrar en el estudio del problema debe empezarse por adoptar un modelo matemático adecuado.

Siendo la variabilidad, es decir, la incertidumbre, el común denominador de las magnitudes susceptibles de control, no puede adoptarse para su estudio un modelo determinista. La adopción de un *modelo aleatorio* se impone.

En un modelo aleatorio, la magnitud X objeto de análisis se considera como una *variable aleatoria* y se estudia

de acuerdo con los postulados y teoremas de la Estadística Matemática.

Se admite que  $X$  responde a una cierta ley de probabilidad caracterizada por su función densidad de probabilidad

$$f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

siendo  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$  los parámetros de la ley.

Todo conjunto  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de observaciones del fenómeno se considera como una realización de una muestra aleatoria de extensión  $n$ .

De esta forma, el establecimiento de un modelo aleatorio que haga posible el estudio de una variable  $X$  exigirá:

— adoptar una hipótesis relativa a la naturaleza de la ley de probabilidad (normal, logarítmico normal, exponencial, de  $\chi^2$ , etc.);

— dentro del marco de esta hipótesis, estimar los valores de los parámetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$  que permiten especificar por completo la ley de probabilidad;

— probar mediante un método adecuado (prueba de  $\chi^2$ , de Kolmogorov-Massey, de Kolmogorov-Lilliefors, etc.) si la hipótesis efectuada es compatible con el conjunto de observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (muestra aleatoria).

Una vez establecido el modelo es posible efectuar previsiones en torno a los posibles valores que podrá adoptar la variable  $X$  en una futura observación.

Además el conocimiento de las leyes asociadas al proceso del muestreo (leyes normal, de Student, de Snedecor, de  $\chi^2$ , etc.) y la aplicación de las técnicas del razonamiento estadístico permiten, a la vista del conjunto de observaciones, tomar una gama muy variada de decisiones.

Por ejemplo en el estudio de fenómenos tales como:

— la duración de vida de unas lámparas eléctricas de un cierto lote;

— la dureza de unos ejes de acero de un determinado suministro;

— el diámetro de unos pistones de motor de una fabricación en serie;

— el consumo diario de un producto químico en una factoría;

— el número de artículos vendidos durante una semana en unos almacenes;

— el caudal medio mensual de un río; etc.

El establecimiento del modelo aleatorio y la correcta aplicación de las técnicas del razonamiento estadístico permitirán tomar en cada caso decisiones tales como:

— aceptar que la duración media de la fabricación de lámparas es igual o superior a un cierto valor prefijado;

— rechazar el lote de ejes por no responder a unas especificaciones de dureza mínimas;

— suspender la fabricación de pistones y proceder a un nuevo reglaje de las máquinas por ser excesivo el número de desechos fabricado;

— modificar la política de aprovisionamientos por ser muy grande la probabilidad de ruptura del stock;

— prever la evolución del volumen de ventas durante los próximos meses;

— dimensionar la presa de acuerdo con las máximas riadas previsibles.

Estamos pues ante una poderosa herramienta matemática que permite tomar decisiones en presencia de la incertidumbre.

En los capítulos que siguen intentaremos exponer cómo la aplicación de los métodos y modelos de la Estadística, cuyos fundamentos básicos supondremos conocidos, permite resolver los problemas planteados por el control industrial.

Empezaremos por exponer con detenimiento los puntos más interesantes de las teorías del muestreo y de la estimación, y tras detallar de forma exhaustiva la teoría del razonamiento estadístico (prueba de hipótesis), pasaremos a aplicar sus resultados a los casos concretos del control de recepción y del control en curso de fabricación.

## CAPITULO 2

### MUESTRA ALEATORIA PROCEDENTE DE UNA POBLACION CUALQUIERA

#### 2.1 MUESTRA ALEATORIA DE EXTENSION N

Consideraremos una población constituida por un número finito o infinito de elementos, de la que se estudia un determinado carácter medible  $X$ . Supongamos perfectamente conocida la correspondiente función densidad de probabilidad,  $f(x)$ . La función de distribución

$$F(x) = \text{Pr}\{X < x\} = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

determina sin ambigüedad la proporción de elementos para los cuales  $X < x$ .

Se entiende por muestra aleatoria de extensión  $n$ , un conjunto de  $n$  elementos (y por consiguiente de  $n$  medidas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  del carácter medible  $X$ ) elegidos al azar entre la totalidad de los elementos de la población. Elección al azar significa que cada elemento tiene idéntica probabilidad de ser extraído.

Cuando la población contiene un número finito  $N$  de elementos hay que distinguir entre forma de extracción exhaustiva y no exhaustiva.

Si una vez extraído al azar un elemento no es devuelto a la población de forma que la siguiente extracción al azar debe efectuarse entre los  $N - 1$  elementos restan-

tes, y así sucesivamente hasta completar los  $n$  elementos de la muestra, se dice que la extracción se ha realizado de forma exhaustiva.

Por el contrario, si una vez extraído al azar un elemento es devuelto a la población de forma que la elección al azar se realiza siempre entre un conjunto de  $N$  elementos, se dice que la extracción se realiza de forma no exhaustiva.

En la práctica, siempre que nos refiramos a poblaciones finitas se dará por sobreentendido, salvo que de forma expresa se indique lo contrario, que el muestreo es efectuado de forma exhaustiva.

Supuesta extraída una muestra aleatoria  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  elementos, si ordenamos los valores de menor a mayor se obtiene lo que se llama una muestra ordenada, y se representa mediante la notación  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

A toda función medible de la muestra se le denomina estadístico muestral. Los estadísticos muestrales más utilizados en la práctica son:

Medida muestral:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Variancia muestral:

$$\sigma'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Cuasi-variancia muestral:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Valor máximo muestral:  $y_n$

Valor mínimo muestral:  $y_1$

Amplitud muestral:  $w = y_n - y_1$

Mediana muestral:  $y_{s+1}$  (si  $n = 2s + 1$ )

Los estadísticos muestrales son, evidentemente, variables aleatorias cuyas leyes de probabilidad (denominadas también distribuciones en el muestreo) no dependen sino de la función de distribución  $F(x)$  de la variable aleatoria  $X$ . En la mayoría de los casos, la forma analítica de estas distribuciones es complicada. Se demuestra, sin embargo, que estas distribuciones tienden hacia leyes simples cuando  $n$  tiende a  $\infty$ . En el párrafo siguiente enunciaremos el Teorema Límite Central, imprescindible para el estudio del comportamiento asintótico de las leyes de probabilidad de los estadísticos muestrales.

## 2.2 TEOREMA LIMITE CENTRAL

En primer lugar daremos, sin demostración, el teorema de adición de variables aleatorias:

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables aleatorias distribuidas según leyes de probabilidad cualesquiera de medias  $m_1, m_2, \dots, m_n$  y variancias finitas  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$  y formamos la variable aleatoria

$$S_n = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$$

siendo  $a_1, a_2, \dots, a_n$  constantes, se cumple que

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^n a_i m_i \quad [1]$$

$$\text{Var}[S_n] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i,j} a_i a_j \text{Cov}[X_i, X_j] \quad [2]$$

estando extendido el último sumatorio de la expresión [2] a cada uno de los  $\binom{n}{2}$  pares  $(X_i, X_j)$  con  $i < j$ .

Dado que, por definición de coeficiente de correlación

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}[X_i, X_j]}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)]}{\sigma_i \sigma_j}$$

la expresión [2] también puede escribirse en la forma

$$\text{Var}[S_n] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i,j} a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad [3]$$

En particular, si las  $X_i$  son mutuamente independientes,  $\rho_{ij} = 0$  ( $i < j$ ) y la expresión [3] se reduce a

$$\text{Var}[S_n] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \quad [4]$$

Finalmente si todas las constantes  $a_i$  son iguales a la unidad

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^n m_i \quad [5]$$

$$\text{Var}[S_n] = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad [6]$$

Llegados a este punto ya estamos en condiciones de enunciar, siguiendo a Liapounov, el Teorema Límite Central:

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son  $n$  variables aleatorias mutuamente independientes distribuidas según leyes de probabilidad cualesquiera de medidas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  y variancias finitas  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$  y formamos la variable aleatoria

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

la función de distribución  $F_n(x)$  de la variable centrada y reducida

$$S_n^* = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}} = \frac{S_n - E[S_n]}{\sigma_{S_n}}$$

tiende bajo condiciones muy generales a la función de distribución de la ley normal  $N(0, 1)$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{S_n - E[S_n]}{\sigma_{S_n}} < x \right\} = \phi(x) \quad [7]$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \phi(x) \quad [8]$$

siendo

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx$$

La condición que debe cumplirse (debida a Lindeberg) es: «Para todo  $\epsilon > 0$ , las variables truncadas  $U_i$  definidas por

$$U_i = X_i - \mu_i \quad \text{si} \quad |X_i - m_i| \leq \epsilon \sigma_{S_n}$$

$$U_i = 0 \quad \text{si} \quad |X_i - m_i| > \epsilon \sigma_{S_n}$$

y la desviación tipo  $\sigma_{S_n}$ , deben cumplir las condiciones

$$\sigma_{S_n} \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{\text{Var}[S_n]} \sum_{i=1}^n E[U_i^2] \rightarrow 1$$

cuando  $n$  tiende a infinito.»

El hecho de que la función de distribución  $F_n(x)$  tienda hacia  $\phi(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  no implica que la función densidad de probabilidad  $f_n(x)$  tienda hacia

$$(1/2\pi) \exp(-x^2/2)$$

Para que esto ocurra es necesario que las  $n$  variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  estén distribuidas de acuerdo con una misma ley de probabilidad (de media  $m$  y variancia  $\sigma^2$ ).

Si esta condición se cumple, y representamos por  $f_n(x)$  la función densidad de probabilidad de la variable centrada y reducida

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n} \sigma}$$

Gnedenko ha demostrado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) = \varphi(x) \quad [9]$$

En la figura 2.1 (ver *Calcul des probabilités*, Renyi, pág. 421) se representa el caso en que las variables aleatorias  $X_i$  están uniformemente distribuidas dentro del intervalo  $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$ . Puede observarse que para  $n = 3$  la semejanza con la función densidad de probabilidad de la ley normal  $N(0, 1)$  es casi total. En este caso la convergencia es, pues, sumamente rápida.

En el Teorema Límite Central reside la gran importancia práctica de la ley normal. En efecto, según este teorema, una suma de variables aleatorias mutuamente independientes sigue en el límite, bajo condiciones muy generales, una ley normal, cuando el número de variables aumenta indefinidamente. Ahora bien, según hemos indicado en el capítulo 1, la variabilidad que se aprecia en las observaciones de cualquier carácter medible  $X$  es debida a la intervención de múltiples causas de perturbación, independientes unas de otras, de importancia re-

ducida y que suman sus efectos al azar. En estas condiciones, no es de extrañar que en numerosos casos prácticos las magnitudes medidas sigan leyes normales.

Es por esto que la hipótesis de normalidad se admite frecuentemente como hipótesis de partida. De todas formas, en casos dudosos será conveniente probar la legitimidad de esta hipótesis, pues la incorrecta aplicación de la ley normal puede originar errores apreciables en los estudios.

Pero incluso si la población no es normal, la aplicación del teorema de Gnedenko muestra que la ley de distribución de las medias muestrales  $\bar{x}$  es asintóticamente normal. Este resultado, que desarrollaremos en el párrafo siguiente, es fundamental para la teoría del razonamiento estadístico (prueba de hipótesis), según tendremos ocasión de comprobar.

En las tablas 1 y 2 se dan los valores de  $\phi(x)$  y  $x$  para distintos valores de  $x$  y  $\phi(x)$  respectivamente.

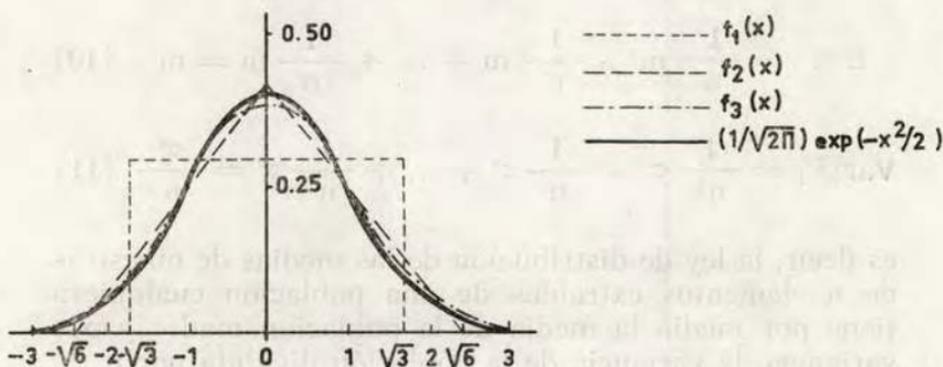


Fig. 2.1

## 2.3 COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LA LEY DE PROBABILIDAD DE LA MEDIA MUESTRAL $\bar{x}$

### 2.3.1 Población infinita

Sea una muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  extraída al azar de una población cualquiera de media  $m$  y variancia  $\sigma^2$ .

Dado que

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \dots + \frac{1}{n} x_n$$

la aplicación directa de las expresiones [1] y [4] permite escribir

$$E[\bar{x}] = \frac{1}{n} m + \frac{1}{n} m + \dots + \frac{1}{n} m = m \quad [10]$$

$$\text{Var}[\bar{x}] = \frac{1}{n^2} \sigma^2 + \frac{1}{n^2} \sigma^2 + \dots + \frac{1}{n^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad [11]$$

es decir, la ley de distribución de las medias de muestras de  $n$  elementos extraídas de una población cualquiera tiene por media la media de la población madre y por variancia, la variancia de la población dividida por  $n$ .

Establecida esta importante propiedad, la consideración del Teorema Límite Central permite afirmar que la variable centrada y reducida

$$\frac{\bar{x} - E[x]}{\sqrt{\text{Var}[\bar{x}]}} = \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

tiende hacia una variable normal  $N(0, 1)$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ .

Todos estos resultados también son válidos cuando la población es finita, pero el muestreo se realiza de forma no exhaustiva.

En la práctica el valor de  $n$  necesario para que la aproximación por la ley normal sea satisfactoria depende en gran medida de la forma de la ley de probabilidad de la variable  $X$ . Shewhart<sup>1</sup> ha comprobado que en el caso de leyes de probabilidad uniforme o triangular la distribución de  $\bar{x}$  calculada sobre muestras de cuatro observaciones es ya prácticamente normal.

Su verificación experimental consistió en lo siguiente:

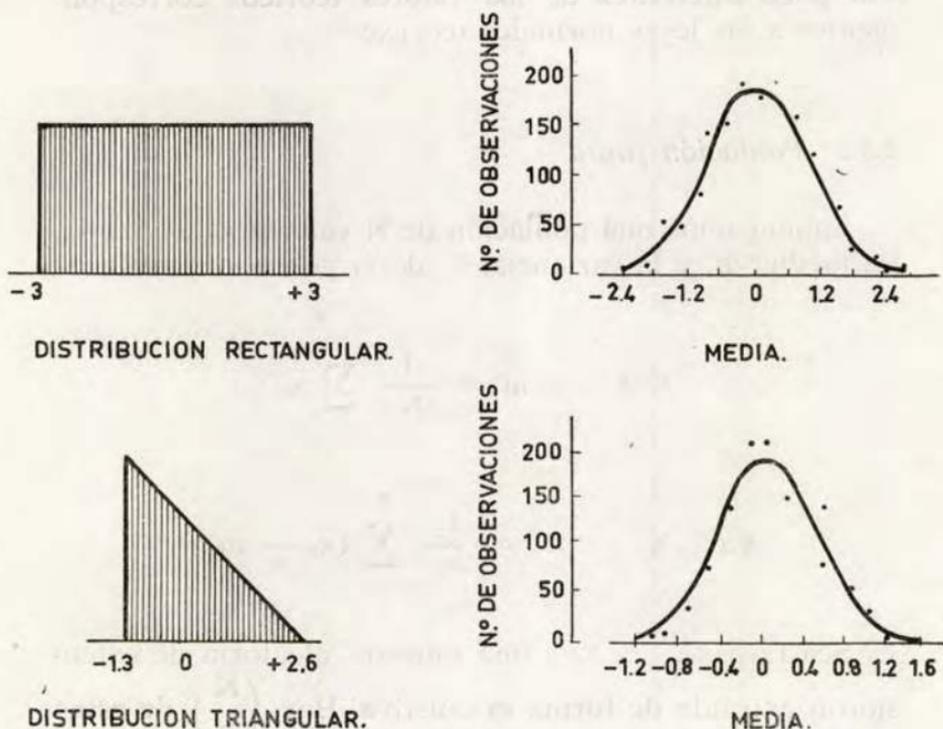


Fig. 2.2

<sup>1</sup> *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, D. Van Nostrand Co.

Habiendo constituido dos poblaciones (fig. 2.2) definidas por

— la primera con  $x_i$  variando de 0.1 en 0.1 desde  $-3$  a  $+3$ , y  $n_i = 2 = \text{cte}$ ;

— la segunda con  $x_i$  variando de 0.1 en 0.1 desde  $-1.3$  a  $+2.6$ , y  $n_i = 27 - 10x_i$ ;

extrajo 500 muestras de 4 piezas (de forma no exhaustiva) de cada una de las dos poblaciones, y determinó sus correspondientes medidas muestrales.

Los resultados aparecen resumidos en la figura 2.2 y se comprueba que los valores experimentales obtenidos agrupando las observaciones en clases de amplitud 0.3 son poco diferentes de los valores teóricos correspondientes a las leyes normales teóricas.

### 2.3.2 Población finita

Supongamos una población de  $N$  valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . La media,  $m$ , y la variancia,  $\sigma^2$ , de la población, serán:

$$E[X] = m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\text{Var}[X] = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2$$

Sea  $(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n})$  una muestra aleatoria de extensión  $n$  extraída de forma exhaustiva. Hay  $\binom{N}{n}$  de estas muestras.

Si  $\bar{x}_k$  es la media muestral y  $E[\bar{x}]$  la media para todas las posibles muestras, podemos escribir:

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ki}$$

y

$$E[\bar{x}] = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k$$

Como cada  $x$  aparece en  $\binom{N-1}{n-1}$  de estas muestras, toda vez que hay  $\binom{N-1}{n-1}$  formas de escoger los  $n-1$  valores restantes después de haber escogido un valor determinado, podemos escribir

$$\begin{aligned} \binom{N}{n} E[\bar{x}] &= \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k = \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ki} = \\ &= \frac{1}{n} \binom{N-1}{n-1} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{n} \binom{N-1}{n-1} Nm \end{aligned}$$

de donde

$$E[\bar{x}] = m \tag{12}$$

Es decir que la ley de distribución de las medias de las muestras de  $n$  elementos extraídos exhaustivamente de una población finita, tiene por media la media de la población madre.

Pasemos ahora a determinar la variancia de la ley de distribución de las medias muestrales. Evidentemente

$$\text{Var}[\bar{x}] = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\bar{x}_k - m)^2$$

es decir,

$$\begin{aligned} \binom{N}{n} \text{Var}[\bar{x}] &= \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\bar{x}_k^2 + m^2 - 2m\bar{x}_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2 + \binom{N}{n} m^2 - 2m \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k = \\ &= \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2 - \binom{N}{n} m^2 \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (x_{k_1} + x_{k_2} + \dots + x_{k_n})^2 = \\ &= \frac{1}{n^2} \binom{N-1}{n-1} \sum_{h=1}^N \bar{x}_h^2 + \frac{2}{n^2} \binom{N-2}{n-2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N x_i x_j \end{aligned}$$

puesto que el cuadrado de cada  $x$  aparece en  $\binom{N-1}{n-1}$  muestras mientras que el producto  $2x_i x_j$  ( $i \neq j$ ) aparece en  $\binom{N-2}{n-2}$  muestras.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 N\sigma^2 &= \sum_{j=1}^N (x_j - m)^2 = \sum_{j=1}^N (x_j^2 + m^2 - 2mx_j) = \\
 &= \sum_{j=1}^N x_j^2 - Nm^2
 \end{aligned}$$

y

$$\left( \sum_{j=1}^N x_j \right)^2 = \sum_{j=1}^N x_j^2 + 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N x_i x_j$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N x_j^2 &= N\sigma^2 + Nm^2 \\
 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N x_i x_j &= N^2 m^2 - N\sigma^2 - Nm^2
 \end{aligned}$$

Así, pues,

$$\begin{aligned}
 \binom{N}{n} \text{Var}[\bar{x}] &= \frac{1}{n^2} \binom{N-1}{n-1} (N\sigma^2 + Nm^2) + \\
 + \frac{1}{n^2} \binom{N-2}{n-2} (N^2 m^2 - N\sigma^2 - Nm^2) - \binom{N}{n} m^2 &= \\
 &= \frac{N}{n} \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1} \binom{N-1}{n-1}
 \end{aligned}$$

de donde

$$\text{Var}[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1} \quad [13]$$

Así, pues, la variancia de la ley de distribución de las medias muestrales viene afectada del término correctivo

$$\frac{N - n}{N - 1}$$

que se denomina corrección de población finita. Si  $N$  es muy grande en comparación con  $n$ , puede aceptarse que

$$\frac{N - n}{N - 1} \approx 1$$

y, en consecuencia,

$$\text{Var}[\bar{x}] \approx \frac{\sigma^2}{n}$$

Evidentemente cuando  $n$  varía desde 1 a su valor máximo  $N$ ,  $\text{Var}[\bar{x}]$  varía desde  $\sigma^2$  a 0.

Erdős y Kenyi han extendido el Teorema Límite Central al caso de muestras extraídas exhaustivamente de una población finita, demostrando que la función de distribución de la variable centrada y reducida

$$\frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}}$$

tiende, si se cumple la condición de Lindeberg, hacia la función de distribución de la ley normal  $N(0, 1)$  cuando  $N$  tiende a  $\infty$  (y por consiguiente  $n \rightarrow \infty$ ), es decir,

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (n \rightarrow \infty)}} P_r \left\{ \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}} < x \right\} = \phi(x)$$

En la práctica, si  $N$  es grande y  $n$ , aunque grande, es mucho menor que  $N$ , la aplicación de la ley normal da aproximaciones aceptables.

#### 2.4 COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LA LEY DE PROBABILIDAD DE LA VARIANCIA MUESTRAL EN EL CASO DE POBLACION INFINITA

Se demuestra que la media y la variancia de la ley de distribución de la variancia muestral  $\sigma'^2$ , vienen dadas por las expresiones:

$$E[\sigma'^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \mu_2$$

$$\text{Var} [\sigma'^2] = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}$$

siendo  $\mu_i$  el momento centrado de orden  $i$  de la ley de distribución de la variable aleatoria  $X$ , definido por la expresión

$$\mu_i = E[(X - m)^i]$$

En particular

$$\mu_2 = E[(X - m)^2] = \sigma^2$$

Los cálculos de estas expresiones, aunque elementales, son muy largos, por lo que no los reproduciremos.

Si  $n$  es muy grande, puede escribirse, aproximadamente,

$$E[\sigma'^2] \approx \mu_2$$

$$\text{Var} [\sigma'^2] \approx \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n}$$

Además, en virtud del Teorema Límite Central, la variable centrada y reducida

$$\frac{\sigma'^2 - E[\sigma'^2]}{\sqrt{\text{Var}[\sigma'^2]}} \approx \sqrt{n} \frac{\sigma'^2 - \mu_2}{\sqrt{\mu_4 - \mu_2^2}}$$

tiende hacia una variable normal  $N(0, 1)$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ .

## 2.5 LEY DE PROBABILIDAD DEL TERMINO DE RANGO $r$ DE UNA MUESTRA ORDENADA

Consideremos la muestra ordenada  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Se trata de determinar la ley de probabilidad del valor muestral que ocupa el lugar  $r$ , es decir, de  $y_r$ .

Si la función de distribución de la población de donde proviene la muestra ordenada es  $F(x)$ , es evidente (ver fig. 2.3) que en esta población, la probabilidad de un valor  $x$  inferior a  $y_r$  es igual a  $F(y_r)$ , la probabilidad de un valor superior a  $y_r$  es igual a  $1 - F(y_r)$  y, finalmente, la probabilidad de un valor igual a  $y_r$  es  $dF(y_r) = f(y_r)dy_r$ .

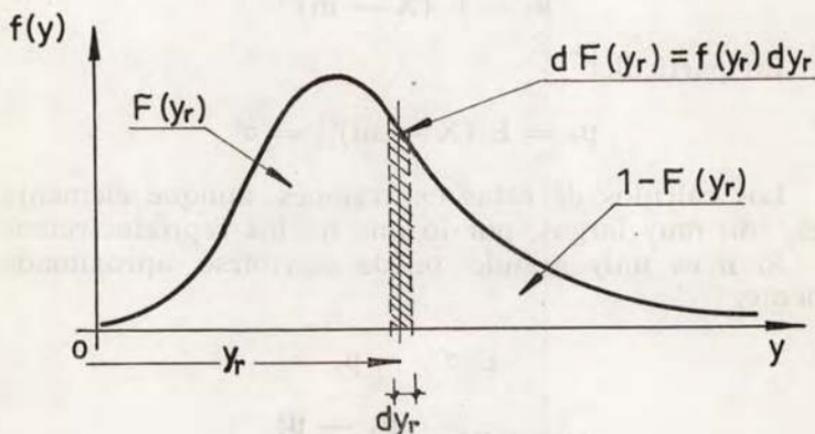


Fig. 2.3

En estas condiciones, la probabilidad *a priori* de que al extraer una muestra de extensión  $n$  y ordenarla resulten  $r - 1$  valores inferiores a  $y_r$ ,  $n - r$  valores superiores a  $y_r$  y un valor igual a  $y_r$  será, de acuerdo con el esquema multinomial:

$$\frac{n!}{(r - 1)!(n - r)!} [F(y_r)]^{r-1} [1 - F(y_r)]^{n-r} dF(y_r)$$

que es la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $y_r$ . Conocida la función de distribución  $F(x)$  de la población de donde proviene la muestra, la ley de probabilidad de  $y_r$  queda perfectamente especificada.

De todos los posibles valores de  $y_r$  son especialmente interesantes:

- el valor máximo muestral  $y_n$ ;
- el valor mínimo muestral  $y_1$ ;
- la mediana muestral  $y_{s+1}$ .

### 2.5.1 Ley de probabilidad del valor máximo muestral $y_n$

En este caso  $r = n$ , y la ley de probabilidad se escribe:

$$n[F(y_n)]^{n-1} dF(y_n)$$

### 2.5.2 Ley de probabilidad del valor mínimo muestral $y_1$

En este caso  $r = 1$ , y la ley de probabilidad se escribe:

$$n[1 - F(y_1)]^{n-1} dF(y_1)$$

### 2.5.3 Ley de probabilidad de la mediana muestral $y_{s+1}$

En este caso  $r = s + 1$ . Si  $n = 2s + 1$  la ley de probabilidad será

$$\frac{(2s + 1)!}{s!s!} [F(y_{s+1})]^s [1 - F(y_{s+1})]^s dF(y_{s+1})$$

Si  $n = 2s$  la ley de probabilidad será

$$\frac{2s!}{s!(s-1)!} [F(y_{s+1})]^s [1 - F(y_{s+1})]^{s-1} dF(y_{s+1})$$

## 2.6 LEY DE PROBABILIDAD DE LA AMPLITUD MUESTRAL

Por definición la amplitud,  $w$ , de una muestra de extensión  $n$  es la diferencia entre los valores máximo y mínimo muestrales:

$$w = y_n - y_1$$

Para obtener la ley de distribución de la variable aleatoria  $w$  partamos de la probabilidad de que en una muestra aleatoria de extensión  $n$  el valor máximo valga precisamente  $y_n$  y el valor mínimo precisamente  $y_1$ .

Dicha probabilidad será, evidentemente:

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{1!1!(n-2)!} dF(y_1)dF(y_n)[F(y_n) - F(y_1)]^{n-2} = \\ & = n(n-1)[F(y_n) - F(y_1)]^{n-2}f(y_n)f(y_1)dy_ndy_1 \end{aligned}$$

De esta ley de probabilidad bidimensional de las variables aleatorias  $y_1$  e  $y_n$  se puede pasar a la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $w$ . Para ello basta recordar los principios del cambio de variable aleatoria. Si  $f(xy)$  es la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria bidimensional  $(x, y)$  y consideramos la transformación

$$\begin{aligned} \xi &= g_1(x, y) \\ \eta &= g_2(x, y) \end{aligned}$$

y su inversa

$$\begin{aligned} x &= h_1(\xi, \eta) \\ y &= h_2(\xi, \eta) \end{aligned}$$

la función densidad de probabilidad de las nuevas variables  $(\xi, \eta)$  se escribe

$$f[h_1(\xi, \eta), h_2(\xi, \eta)] |J|$$

siendo  $J$  el determinante funcional o jacobiano de la transformación, es decir,

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Por consiguiente, para determinar la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $w$  bastará hacer el cambio de variable

$$\begin{aligned} w &= y_n - y_1 \\ y_1 &= y_1 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + w \\ y_1 &= y_1 \end{aligned}$$

y como

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$|J| = 1$$

la función densidad de probabilidad del par  $(y_1, w)$  será

$$n(n-1)[F(y_1 + w) - F(y_1)]^{n-2}f(y_1 + w)f(y_1)$$

y por consiguiente la función densidad de probabilidad de  $w$  se determinará mediante integración con respecto a  $y_1$ , y se escribirá

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(n-1)[F(y_1+w) - F(y_1)]^{n-2} f(y_1+w)f(y_1) dy_1$$

Conocida la función densidad de probabilidad de la población de donde proviene la muestra, la ley de probabilidad de la amplitud queda perfectamente especificada.

### CAPITULO 3

#### *MUESTRA DE UNA VARIABLE ALEATORIA NORMAL N(m, $\sigma$ ). LEYES ASOCIADAS AL PROCESO DEL MUESTREO*

##### 3.1 LEY DE PROBABILIDAD DE LA MEDIA $\bar{x}$ DE UNA MUESTRA DE $n$ ELEMENTOS EXTRAIDA DE UNA POBLACION NORMAL N(m, $\sigma$ )

Sea una muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  extraída al azar de una población normal N(m,  $\sigma$ ).

La aplicación de los principios del cambio de variable aleatoria permiten demostrar que la ley de probabilidad de la media muestral  $\bar{x}$  es también normal N(m,  $\sigma/\sqrt{n}$ ), es decir,

$$E[\bar{x}] = m$$

$$\text{Var}[\bar{x}] = \sigma/\sqrt{n}$$

Es de destacar el hecho de que el valor medio de  $\bar{x}$  es el mismo que el valor medio de la población, pero que la variancia se ha reducido a  $\sigma/\sqrt{n}$ . Una comparación de las leyes de distribución de las variables aleatorias X y  $\bar{x}$  se da en la figura 3.1.

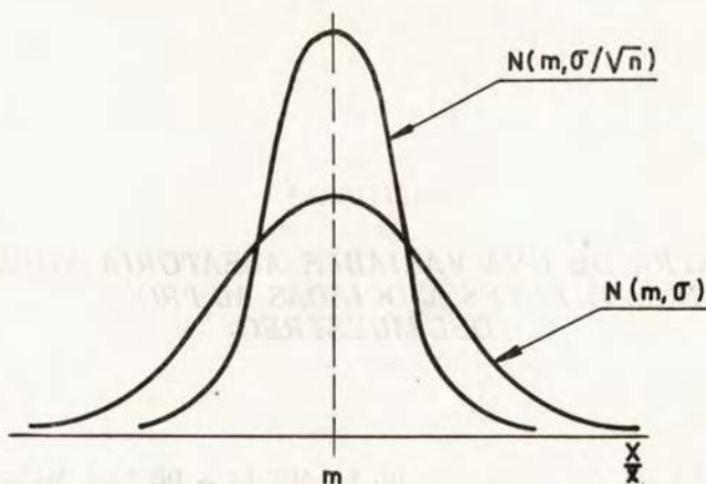


Fig. 3.1

### 3.2 LEY DE $\chi^2$

1) La variable aleatoria  $\chi^2$ . Sean  $x_1, x_2, \dots, x_\nu$   $\nu$  variables aleatorias mutuamente independientes distribuidas según una ley normal  $N(0, 1)$ . La ley de probabilidad de la variable

$$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\nu^2$$

se denomina ley de  $\chi^2$  de  $\nu$  grados de libertad y tiene por función densidad de probabilidad

$$f_\nu(\chi^2) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} (\chi^2)^{(\nu-2)/2} \exp(-\chi^2/2) \text{ para } \chi^2 \geq 0$$

$$= 0 \text{ para } \chi^2 < 0$$

El número de grados de libertad,  $\nu$ , puede interpretarse como el número de dimensiones reales del espacio donde se sitúa el punto  $(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ .

Si las variables aleatorias mutuamente independientes  $x_1, x_2, \dots, x_v$  están distribuidas según leyes normales de medias  $m_1, m_2, \dots, m_v$  y variancias  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_v^2$ , la variable  $\chi^2$  se escribe

$$\chi^2 = \left( \frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{x_v - m_v}{\sigma_v} \right)^2$$

En consecuencia, si  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una muestra aleatoria de extensión  $n$  procedente de una población normal  $N(m, \sigma)$ , la variable  $\chi^2$  se escribe

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2$$

y sigue también una ley de  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad.

Sólo cuando las variables aleatorias  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son independientes, se cumple que  $\nu = n$ . Si por el contrario,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  están ligadas entre sí por  $K$  relaciones lineales,  $\nu$  es igual a  $n - K$ . Así, en el caso particular en que las observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  provienen, por ejemplo, de una misma población normal de variancia  $\sigma^2$  y media desconocida, la variable

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$$

en la que  $\bar{x}$  es la media muestral, está distribuida, como justificaremos más adelante, según una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = n - 1$  grados de libertad a causa de la relación lineal que expresa  $\bar{x}$ .

2) Propiedades de la ley de  $\chi^2$ .

a) Forma. La función densidad de la variable aleatoria  $\chi^2$  tiene una forma marcadamente asimétrica para valores pequeños de  $\nu$ . Su aspecto general es el que se muestra en la figura 3.2.

b) Media y variancia. La esperanza matemática de la variable  $\chi^2$  es igual al número de grados de libertad y su variancia es igual al doble del número de grados de libertad.

$$E[\chi^2] = \nu$$

$$\text{Var}[\chi^2] = 2\nu$$

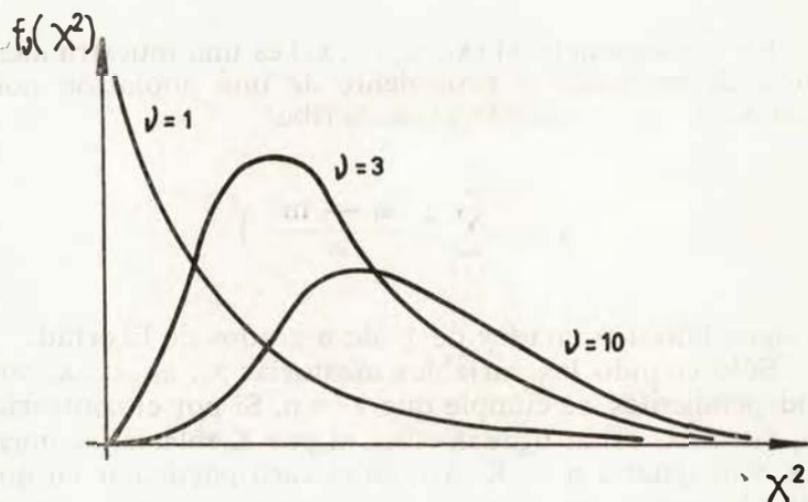


Fig. 3.2

c) Comportamiento asintótico. De acuerdo con el Teorema Límite Central, la variable centrada y reducida

$$\frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}$$

tiende hacia la ley normal  $N(0, 1)$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ . La convergencia, sin embargo, es bastante lenta. En cambio la ley de la variable  $\sqrt{2}\chi^2$  tiende mucho más rápidamente hacia la ley normal con media  $\sqrt{2\nu} - 1$  variancia 1. En la práctica estas dos leyes se confunden para  $\nu > 30$ .

d) Aditividad. Si  $n$  variables aleatorias mutuamente independientes  $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_n^2$  están distribuidas según

leyes de  $\chi^2$  de  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  grados de libertad respectivamente, la suma  $\chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_n^2$  también está distribuida según una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$  grados de libertad.

e) Teorema de Cochram. Si  $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_n^2$  son variables aleatorias distribuidas según leyes de  $\chi^2$  de  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  grados de libertad respectivamente y su suma también está distribuida según una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$  grados de libertad, las variables  $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_n^2$  son independientes.

f) Tablas de cálculo. Para facilitar los cálculos cuando se opera con leyes de  $\chi^2$  se han tabulado para diferentes valores del número de grados de libertad, los valores de  $\chi_{\alpha, \nu}^2$  tales que

$$P_r\{\chi^2 \geq \chi_{\alpha, \nu}^2\} = \alpha$$

En la tabla 3 se dan los valores de  $\chi_{\alpha}^2$  para valores de  $\alpha$  comprendidos entre 0.995 y 0.005 y valores de  $\nu$  comprendidos entre 1 y 30. Para  $\nu > 30$  puede suponerse que la variable aleatoria

$$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

está distribuida según una ley normal  $N(0, 1)$ .

3) Leyes de probabilidad de la cuasi-variancia muestral  $S^2$  y de la variancia muestral  $\sigma^2$ .

La cuasi-variancia muestral es, por definición,

$$S^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

y se utiliza mucho en la práctica pues, como más adelante veremos, constituye una estimación de la variancia  $\sigma^2$  de una población cuando dicho parámetro resulta desconocido.

Para determinar su ley de probabilidad puede seguirse el siguiente camino indirecto. A partir de la expresión matemática de la cuasi-variancia  $S^2$  puede escribirse

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$$

o lo que es igual

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{[(x_i - m) - (\bar{x} - m)]^2}{\sigma^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2 - n \frac{(\bar{x} - m)^2}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left( \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2$$

Ahora bien, la cantidad

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2$$

sigue una ley de  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad. Por otra parte, la cantidad

$$\left( \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2$$

puede ser considerada como una  $\chi^2$  de 1 grado de libertad. En consecuencia, teniendo en cuenta las propiedades de aditividad de la  $\chi^2$  y el teorema de Cochran, podemos enumerar el siguiente teorema (debido a Fisher):

- La variable aleatoria  $(n - 1)S^2/\sigma^2$  sigue una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = n - 1$  grados de libertad.
- Las variables aleatorias  $\bar{x}$  y  $S^2$  son independientes. Además, como

$$\frac{(n - 1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$$

queda también demostrado que la variable

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2$$

sigue una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = n - 1$  grados de libertad.

De igual forma se puede razonar para el caso de la variancia muestral  $\sigma'^2$ . Un proceso matemático idéntico al que acabamos de describir lleva a la conclusión de que la variable

$$\frac{n\sigma'^2}{\sigma^2}$$

sigue una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = n - 1$  grados de libertad.

Conocidas las leyes de probabilidades de las variables aleatorias  $n\sigma'^2/\sigma^2$  y  $(n - 1)S^2/\sigma^2$  pueden determinarse sin ninguna dificultad las leyes de probabilidad de las variables aleatorias  $\sigma'^2$  y  $S^2$ . Basta, en efecto, sustituir en la expresión general de la ley de probabilidad de  $\chi^2$ :

$$f_{\nu}(\chi^2)d\chi^2 = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} (\chi^2)^{(\nu-2)/2} \exp(-\chi^2/2)d\chi^2$$

$\chi^2$  por  $n\sigma'^2/\sigma^2$  y por  $(n - 1)S^2/\sigma^2$  respectivamente, y tener en cuenta que  $\nu = n - 1$ .

En consecuencia, las leyes de probabilidad de las variables aleatorias  $\sigma'^2$  y  $S^2$  serán:

$$f(\sigma'^2)d(\sigma'^2) = \frac{n^{(n-1)/2}}{(\sigma^2)^{(n-1)/2} 2^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (\sigma'^2)^{(n-3)/2} \exp\left(-\frac{n\sigma'^2}{2\sigma^2}\right) d(\sigma'^2)$$

$$f(S^2)d(S^2) = \frac{(n-1)^{(n-1)/2}}{(\sigma^2)^{(n-1)/2} 2^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (S^2)^{(n-3)/2} \exp\left(-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma^2}\right) d(S^2)$$

Para determinar la esperanza matemática y la variancia de estas leyes de probabilidad, basta tener en cuenta que por ser

$$\begin{aligned} E[\chi^2] &= \nu \\ \text{Var}[\chi^2] &= 2\nu \end{aligned}$$

podrá escribirse

$$E[n\sigma'^2/\sigma^2] = n - 1$$

$$\text{Var}[n\sigma'^2/\sigma^2] = 2(n - 1)$$

$$E[(n - 1)S^2/\sigma^2] = n - 1$$

$$\text{Var}[(n - 1)S^2/\sigma^2] = 2(n - 1)$$

y, teniendo en cuenta las expresiones [1] y [4] del teorema de adición de variables aleatorias, puede finalmente escribirse:

$$E[\sigma'^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$$\text{Var}[\sigma'^2] = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4$$

$$E[S^2] = \sigma^2$$

$$\text{Var}[S^2] = \frac{2}{n-1} \sigma^4$$

Para tamaños de muestra grandes, puede escribirse, aproximadamente:

$$E[\sigma'^2] \approx E[S^2] \approx \sigma^2$$

$$\text{Var}[\sigma'^2] \approx \text{Var}[S^2] \approx \frac{2\sigma^4}{n}$$

En virtud del Teorema Límite Central, las variables aleatorias centradas y reducidas

$$\sqrt{n} \frac{\sigma'^2 - \sigma^2}{\sqrt{2} \sigma^2}$$

y

$$\sqrt{n} \frac{S^2 - \sigma^2}{\sqrt{2} \sigma^2}$$

tienden hacia una variable normal  $N(0, 1)$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ .

### 3.3 LEY DE $\chi$

1) La variable aleatoria  $\chi$ . Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  variables aleatorias independientes distribuidas de acuerdo con una ley normal  $N(0, 1)$ . La ley de probabilidad de la variable

$$\chi = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

se denomina ley de  $\chi$  de  $\nu$  grados de libertad y tiene por función densidad de probabilidad

$$f_{\nu}(\chi) = \frac{2}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \chi^{\nu-1} \exp(-\chi^2/2) \quad \text{para } \chi \geq 0$$

$$= 0 \quad \text{para } \chi < 0$$

2) Propiedades de la ley de  $\chi$ .

— Media y variancia. La media de la ley de  $\chi$  es

$$E[\chi] = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} = \sqrt{2} \frac{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu-2}{2}\right)!}$$

y la variancia

$$\text{Var}[\chi] = \nu - (E[\chi])^2$$

Utilizando la fórmula de Stirling se encuentran los siguientes desarrollos en serie para la media y la variancia de la ley de  $\chi$

$$E[\chi] \approx \sqrt{\nu} \left( 1 - \frac{1}{4\nu} + \frac{1}{32\nu^2} - \dots \right)$$

$$\text{Var}[\chi] \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8\nu} + \frac{1}{128\nu^2} - \dots$$

Cuando  $\nu$  es muy grande

$$E[\chi] \approx \sqrt{\nu}$$

$$\text{Var}[\chi] \approx \frac{1}{2}$$

— Comportamiento asintótico. La variable  $\chi$  tiende hacia una ley normal de media  $\sqrt{\nu - 0.5}$  y de desvia-

ción tipo  $1/\sqrt{2}$  cuando  $\nu$  tiende a infinito. Es decir, la variable

$$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

tiende, en el límite, a una ley normal  $N(0, 1)$ .

3) Ley de probabilidad de la raíz cuadrada  $S$  de la cuasi-variancia muestral.

Dado que la variable

$$(n - 1)S^2/\sigma^2$$

sigue una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = n - 1$  grados de libertad, la variable

$$\sqrt{n - 1} S/\sigma$$

sigue una ley de  $\chi$  de  $\nu = n - 1$  grados de libertad.

De igual forma la variable

$$\sqrt{n} \sigma'/\sigma$$

sigue una ley de  $\chi$  de  $\nu = n - 1$  grados de libertad.

En la teoría de la estimación conviene en ciertos casos referirse a la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $\sigma'/\sigma$ .

Esta variable aleatoria sigue una ley de  $\chi/\sqrt{n}$ . En consecuencia

$$E\left[\frac{\sigma'}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} E[\chi] = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}$$

A esta esperanza matemática se la representa por el símbolo  $b_n$ . El parámetro  $b_n$  ha sido tabulado para  $n$  comprendido entre 2 y 30 (tabla 4).

Finalmente en el caso de una ley normal  $N(m, \sigma)$  de media conocida, la variable  $nT/\sigma^2$ , siendo

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

sigue evidentemente una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = n$  grados de libertad, por lo que la variable

$$\sqrt{nT}/\sigma$$

sigue una ley de  $\chi$  de  $n$  grados de libertad.

### 3.4 LEY DE STUDENT

1) La variable  $t$  de Student. Sean  $Y$  y  $Z$  dos variables aleatorias independientes tales que  $Y$  es normal  $N(0, 1)$  mientras que  $Z$  tiene una distribución de  $\chi^2$  con  $\nu$  grados de libertad. La ley de probabilidad de la variable aleatoria

$$t = \sqrt{\nu} \frac{Y}{\sqrt{Z}}$$

tiene por función densidad de probabilidad

$$f_{\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

$$(-\infty < t < \infty)$$

La distribución definida por esta ley de probabilidad se denomina distribución  $t$  de Student. El parámetro  $\nu$  es aquí, como en el caso de la distribución de  $\chi^2$ , el número de grados de libertad de la distribución.

La curva densidad de probabilidad  $f(t)$  es simétrica respecto del punto  $t = 0$ , es decir,

$$E[t] = 0$$

La variancia vale

$$\text{Var}[t] = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

Para valores grandes de  $\nu$  la variable  $t$  se aproxima mucho a la variable normal  $N(0, 1)$ . Para valores pequeños de  $\nu$ , en cambio, la función densidad de probabilidad se desvía considerablemente de la correspondiente a la ley normal  $N(0, 1)$ , en el sentido de que una gran desviación respecto a la media es mayor según la distribución  $t$  que según la distribución normal, tal como puede apreciarse en la figura 3.3. Prácticamente, a partir de  $\nu > 30$ , la variable  $t$  puede suponerse normal  $N(0, 1)$ .

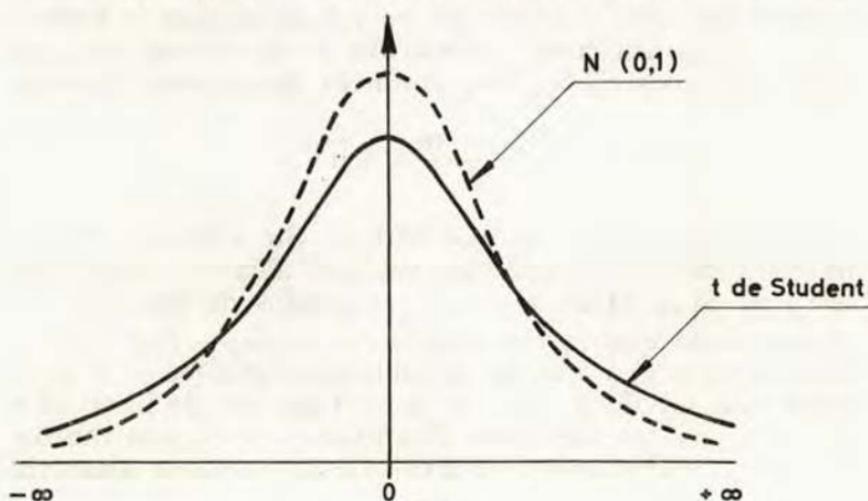


Fig. 3.3

Para facilitar los cálculos cuando se opera con leyes  $t$  de Student se han tabulado para diferentes valores del número de grados de libertad, los valores de  $t_{\alpha, \nu}$  tales que

$$\Pr\{t \geq t_{\alpha, \nu}\} = \alpha$$

En la tabla 5 se dan los valores de  $t_{\alpha, \nu}$  para valores de  $\alpha$  comprendidos entre 0.05 y 0.005 y para valores de  $\nu$  comprendidos entre 1 y 30. Para  $\nu > 30$  puede considerarse aproximadamente que la variable  $t$  está distribuida de acuerdo con una ley normal  $N(0, 1)$ .

2) Ley de probabilidad de la variable aleatoria  $(\bar{x} - m)\sqrt{n}/S$ . De acuerdo con lo expuesto en el apartado 2.8.1 la variable aleatoria centrada y reducida

$$\frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n}$$

es normal  $N(0, 1)$ . Esta propiedad es muy interesante, según tendremos ocasión de comprobar al desarrollar la teoría del razonamiento estadístico. Sin embargo, ocurre muchas veces que la variancia  $\sigma^2$  de la población de la cual se extrae la muestra aleatoria es totalmente desconocida. En estas condiciones, en vez de utilizar la variancia  $\sigma^2$ , se utiliza como estimación de la misma la cuasi-variancia muestral  $S^2$ . Pero entonces, la variable aleatoria

$$\frac{\bar{x} - m}{S} \sqrt{n}$$

ya no sigue una ley normal  $N(0, 1)$ . Sin embargo, se demuestra fácilmente que esta variable aleatoria sigue una ley  $t$  de Student de  $\nu = n - 1$  grados de libertad. En efecto, dado que la variable aleatoria  $(\bar{x} - m)\sqrt{n}/\sigma$  es normal  $N(0, 1)$  y que la variable aleatoria  $(n - 1)S^2/\sigma^2$  sigue una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = n - 1$  grados de libertad y que además las variables aleatorias  $\bar{x}$  y  $S^2$  son mutuamente independientes, resulta que la variable aleatoria

$$\sqrt{n - 1} \frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}/\sigma}{\sqrt{(n - 1)S^2/\sigma^2}} = \frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{S}$$

sigue una ley  $t$  de Student con  $\nu = n - 1$  grados de libertad.

3) Ley de probabilidad de la diferencia de dos medias muestrales. Sean  $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$  y  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n_2})$  dos muestras aleatorias independientes, la primera procedente de una población normal  $N(m_1, \sigma)$  y la segunda de una población también normal  $N(m_2, \sigma)$ . En estas condiciones sabemos que las variables aleatorias centradas y reducidas  $(\bar{x}_1 - m_1)\sqrt{n_1}/\sigma$  y  $(\bar{x}_2 - m_2)\sqrt{n_2}/\sigma$  se distribuyen de acuerdo con una ley normal  $N(0, 1)$  y que las variables aleatorias  $(n_1 - 1)S_1^2/\sigma^2$  y  $(n_2 - 1)S_2^2/\sigma^2$  se distribuyen de acuerdo con leyes de  $\chi^2$  de  $n_1 - 1$  y  $n_2 - 1$  grados de libertad, respectivamente.

Haciendo uso de las propiedades de las combinaciones lineales de las variables aleatorias independientes, resulta que la variable aleatoria  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  se distribuye de acuerdo con una ley normal

$$N\left(m_1 - m_2, \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

o lo que es lo mismo, la variable aleatoria

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

es normal  $N(0, 1)$ .

Si la desviación tipo  $\sigma$ , común a las dos poblaciones normales, es conocida el problema ya está resuelto. Si la desviación tipo  $\sigma$  es desconocida, como ocurre en la mayor parte de las situaciones prácticas, es necesario hacer nuevas consideraciones.

Haciendo uso de las propiedades de la variable aleatoria  $\chi^2$ , resulta que la variable aleatoria

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}$$

tiene una distribución de  $\chi^2$  de  $n_1 + n_2 - 2$  grados de libertad. Además esta variable es independiente de

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ . En consecuencia, de acuerdo con la definición de variable aleatoria  $t$  de Student, la variable aleatoria

$$\begin{aligned} & \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \\ \sqrt{n_1 + n_2 - 2} & \frac{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}}} = \\ & = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \end{aligned}$$

sigue una ley  $t$  de Student de  $\nu = n_1 + n_2 - 2$  grados de libertad.

Es de observar que esta variable aleatoria no depende de la variancia desconocida  $\sigma^2$ .

La expresión

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

no es otra cosa que la media ponderada de  $S_1^2$  y  $S_2^2$  afectadas de los pesos  $n_1 - 1$  y  $n_2 - 1$ .

### 3.5 LEY DE $t$ NO CENTRADA

1) La variable aleatoria  $t^*$  ( $t$  no centrada). Sean  $Y$  y  $Z$  dos variables aleatorias independientes tales que  $Y$  es normal  $N(0, 1)$  mientras que  $Z$  tiene una distribución de  $\chi^2$  con  $f$  grados de libertad. Sea  $\delta$  una constante cualquiera. La ley de probabilidad de la variable aleatoria

$$t^* = \sqrt{f} \frac{Y + \delta}{\sqrt{Z}}$$

sigue una ley de probabilidad llamada de  $t$  no centrada con  $f$  grados de libertad, cuya función densidad es mucho más complicada que la correspondiente a la  $t$  de Student, y que no reproduciremos.

La  $t$  de Student no es sino un caso particular de la  $t$  no centrada por  $\delta = 0$ .

El procedimiento para la tabulación de la distribución de  $t$  no centrada ha sido desarrollado por Johnson y Welch los cuales han preparado dos grupos de tablas<sup>1</sup> que permiten resolver dos tipos de problemas muy concretos.

El primer grupo de tablas permite determinar, dados  $\delta$  y  $f$ , el valor crítico,  $t_0$ , de la distribución de  $t$  no centrada para el cual la probabilidad de que la variable aleatoria  $t^*$  adopte valores iguales o menores que  $t_0$ , es igual a  $\gamma$ , es decir,

$$P_r\{t^* \leq t_0/\delta, f\} = \gamma$$

siendo  $\gamma = 0.90, 0.95$  ó  $0.99$ .

Para entrar en estas tablas es preciso determinar previamente un parámetro  $\eta$  definido por la expresión

$$\eta = \delta/\sqrt{2f + \delta^2}$$

Con el valor  $\eta$  obtenido, y el número de grados de libertad  $f$ , se entra en la tabla correspondiente al valor de  $\gamma$  elegido (0.90, 0.95 ó 0.99) y se lee el valor de un parámetro llamado  $\lambda$ . La interpolación para la  $f$  debe hacerse linealmente con respecto a  $12/\sqrt{f}$  (o con respecto a  $144/f$ ). La interpolación para la  $\eta$  debe hacerse linealmente con respecto a  $\eta$ .

Una vez obtenido  $\lambda$ , el valor  $t_0$  se calcula a partir de la expresión

$$t_0 = \left[ \delta + \lambda \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{2f} - \frac{\lambda^2}{2f}} \right] / \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2f} \right)$$

<sup>1</sup> Véase, por ejemplo, la obra *Handbook of Statistical Tables*, de Owen.

El segundo grupo de tablas permite determinar, dados  $t_0$  y  $f$ , el valor del parámetro de descentramiento  $\delta$  para el cual la probabilidad de que la variable aleatoria  $t^*$  adopte valores iguales o menores que  $t_0$  es igual a  $\gamma$ , es decir,

$$Pr\{t^* \leq t_0 \mid t_0, f\} = \gamma$$

siendo  $\gamma = 0.90, 0.95$  ó  $0.99$ .

Para entrar en estas tablas es preciso determinar previamente unos parámetros  $y$  e  $y'$  definidos por las expresiones

$$y = 1 / \sqrt{1 + \frac{t_0^2}{2f}}$$

$$y' = t_0 / \sqrt{2f \left(1 + \frac{t_0^2}{2f}\right)}$$

Con los valores  $y$  e  $y'$  obtenidos y el número de grados de libertad  $f$  se entra en las tablas y se lee el valor del parámetro  $\lambda$ . La interpolación para  $f$  debe hacerse linealmente con respecto a  $12/\sqrt{f}$  (o con respecto a  $144/f$ ). La interpolación para  $y$  o  $y'$  debe hacerse linealmente respecto a  $y$  o  $y'$ .

Una vez obtenido  $\lambda$ , el valor de  $\delta$  se calcula a partir de la expresión

$$\delta = t_0 - \lambda \sqrt{1 + \frac{t_0^2}{2f}}$$

- 2) Propiedades de la ley de  $t$  no centrada.
  - a) Media y variancia

$$E[t^*] = c_{11}\delta$$

$$\text{Var}[t^*] = c_{22}\delta^2 + c_{20}$$

siendo

$$c_{11} = \frac{\sqrt{\frac{f}{2}} \Gamma\left(\frac{f-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}$$

$$c_{22} = \frac{f}{f-2} - c_{11}^2$$

$$c_{20} = \frac{f}{f-2}$$

b) Comportamiento asintótico. De acuerdo con el Teorema Límite Central, la variable centrada y reducida

$$\frac{t^* - c_{11}\delta}{\sqrt{c_{22}\delta^2 + c_{20}}}$$

tiende hacia la ley normal  $N(0, 1)$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ .

c)

$$Pr\{t^* \leq t_0 \mid \delta, f\} = 1 - Pr\{t^* \leq -t_0 \mid -\delta, f\}$$

d) Si  $t_0 = 0$

$$Pr\{t^* \leq 0 \mid \delta, f\} = \phi(-\delta)$$

siendo  $\phi(-\delta)$  el valor de la función de distribución de la ley normal  $N(0, 1)$  correspondiente a la abscisa  $-\delta$ .

e) Si  $t_0 = 1$  y  $f = 1$

$$Pr\{t^* \leq 1 \mid \delta, 1\} = 1 - [\phi(\delta/\sqrt{2})]_2$$

3) Límites de tolerancia unilateralmente especificados de una ley normal  $N(m, \sigma)$ . Para una variable aleatoria  $X$  normal  $N(m, \sigma)$  es posible determinar un límite  $T$  tal que por debajo de él se distribuye una proporción  $P$  de la población (fig. 3.4). Dicho límite es:

$$T = m + K_{1-P}\sigma$$

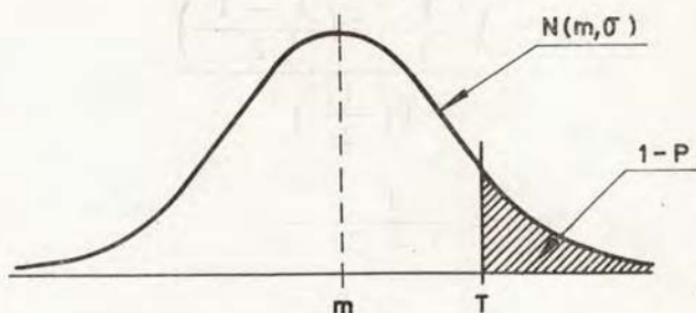


Fig. 3.4

siendo  $K_{1-P}$  la cuantila de orden  $P$  de la distribución normal  $N(0, 1)$ , o sea, el valor  $K_{1-P}$  que cumple con la condición

$$Pr\{K \leq K_{1-P}\} = \phi(K_{1-P}) = P$$

A este límite  $T$  se le denomina límite superior de tolerancia natural.

Sin embargo en la mayoría de los casos prácticos  $m$  y  $\sigma$  son desconocidos, y la obtención del límite  $T$  resulta, en consecuencia, imposible.

Ahora bien, si  $\bar{x}$  y  $S^2$  son la media y la cuasi-variancia muestrales de una muestra de extensión  $n$  procedente de una población normal de media y variancia desconocidas, es posible definir un límite de tolerancia

$$\bar{x} + K S$$

tal que la probabilidad de que por lo menos una proporción  $P$  de la población esté por debajo de él, sea igual a  $\gamma$ .

El asociar al límite  $\bar{x} + K S$  una probabilidad  $\gamma$  es inevitable toda vez que dicho límite es una variable aleatoria.

Analicemos a fondo el significado de este límite. Desde luego, aunque desconocidos,  $m$  y  $\sigma$  valen lo que valen.

Existirá pues un cierto límite desconocido  $T$  tal que por debajo de él quedará justamente una proporción  $P$  de la población (fig. 3.5).

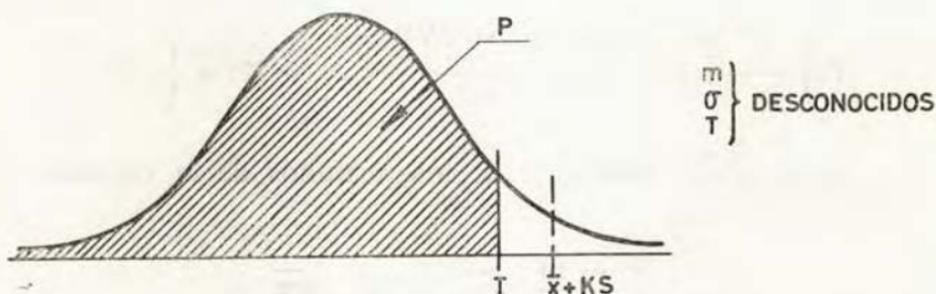


Fig. 3.5

En estas condiciones, determinar un límite  $\bar{x} + KS$  que tenga una probabilidad  $\gamma$  de que al menos una proporción  $P$  de la población quede por debajo de él, equivale a determinar un límite aleatorio tal que la probabilidad de caer por encima del límite desconocido  $T$  sea precisamente igual a  $\gamma$ , es decir, un límite  $\bar{x} + KS$  que cumpla con la condición

$$Pr\{\bar{x} + KS \geq T\} = \gamma \quad [1]$$

En esta ecuación de condición se pueden efectuar las siguientes transformaciones

$$Pr\left\{\frac{\bar{x} + KS - m}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{T - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \gamma$$

$$Pr\left\{\frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} + \frac{KS}{\sigma} \sqrt{n} \geq K_{1-P} \sqrt{n}\right\} = \gamma$$

$$P_r \left\{ \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} - K_{1-p} \sqrt{n} \geq -\frac{KS}{\sigma} \sqrt{n} \right\} = \gamma$$

$$P_r \left\{ \frac{\frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} - K_{1-p} \sqrt{n}}{S/\sigma} \geq -K \sqrt{n} \right\} = \gamma$$

Analícemos cada uno de los términos de la variable aleatoria

$$\frac{\frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} - K_{1-p} \sqrt{n}}{S/\sigma}$$

En primer lugar, la variable aleatoria  $(\bar{x} - m)\sqrt{n}/\sigma$  es una variable normal  $N(0, 1)$ . Por otra parte, como la variable aleatoria  $(n - 1)S^2/\sigma^2$  está distribuida de acuerdo con una ley de  $\chi^2$  de  $f = n - 1$  grados de libertad, la variable aleatoria  $S/\sigma$  no es otra cosa que la raíz cuadrada de una variable  $\chi^2$  dividida por su número de grados de libertad ( $\sqrt{\chi^2/f}$ ). Finalmente  $-K_{1-p}\sqrt{n}$  es una constante. Por consiguiente la variable aleatoria analizada es una variable  $t$  no centrada con  $\delta = -K_{1-p}\sqrt{n}$  y  $f = n - 1$  grados de libertad.

En consecuencia, la condición [1] puede escribirse en la forma

$$P_r\{t^* \geq -K\sqrt{n} \mid \delta = -K_{1-p}\sqrt{n}, f = n - 1\} = \gamma$$

o lo que es lo mismo

$$P_r\{t^* \leq -K\sqrt{n} \mid \delta = -K_{1-p}\sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \gamma \quad [2]$$

y teniendo en cuenta las propiedades de la variable aleatoria  $t^*$

$$P_r\{t^* \leq K\sqrt{n} \mid \delta = K_{1-P}\sqrt{n}, f = n - 1\} = \gamma \quad [3]$$

Las ecuaciones [2] y [3] permiten determinar el valor de  $K$ , haciendo uso de las tablas de Johnson y Welch.

Bastará, en efecto, determinar un valor  $t_0$  que cumpla con la condición

$$P_r\{t^* \leq t_0 \mid \delta = K_{1-P}\sqrt{n}, f = n - 1\} = \gamma$$

si  $\gamma$  es grande (por ejemplo, 0.90, 0.95 ó 0.99), o con la condición

$$P_r\{t^* \leq t_0 \mid \delta = -K_{1-P}\sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \gamma$$

si  $\gamma$  es pequeño (por ejemplo, 0.10, 0.05 ó 0.01).

Para ello deberá calcularse en primer lugar el valor de  $\eta$ , y una vez leído en las tablas el correspondiente valor de  $\lambda$ , determinar  $K$  mediante la expresión

$$K = \frac{t_0}{\sqrt{n}} =$$

$$= \left[ K_{1-P} + \lambda \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{K_{1-P}^2}{2(n-1)} - \frac{\lambda^2}{2n(n-1)}} \right] /$$

$$/ \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{2(n-1)} \right]$$

si se ha partido de la ecuación [2], o mediante la expresión

$$K = - \frac{t_0}{\sqrt{n}} =$$

$$= \left[ K_{1-P} - \lambda \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{K_{1-P}^2}{2(n-1)} - \frac{\lambda^2}{2n(n-1)}} \right] /$$

$$/ \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{2(n-1)} \right]$$

si se ha partido de la ecuación [3].

En la obra de Owen titulada *Handbook of Statistical Tables* pueden encontrarse tabulados valores de  $K$  para  $\gamma = 0.90$  y  $\gamma = 0.95$  y una amplia gama de valores de  $P$  y  $n$ .

La tabla 6, debida al autor, da los valores de  $K$  para  $\gamma = 0.05$ .

Estas tablas permiten el planteamiento de pruebas de hipótesis relativas a las leyes normales de media y variancia desconocidas, en condiciones de eficacia preestablecidas.

### 3.6 LEY DE FISHER-SNEDECOR

1) La variable aleatoria  $F$ . Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos variables aleatorias independientes que siguen leyes de  $\chi^2$  de  $\nu_1$  y  $\nu_2$  grados de libertad respectivamente. La ley de probabilidad de la variable aleatoria

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

tiene por función densidad de probabilidad

$$f_{\nu_1\nu_2}(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} F^{[(\nu_1/2)-1]} \left[1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} F\right]^{-[(\nu_1+\nu_2)/2]}$$

para  $F \geq 0$

$$= 0$$

para  $F < 0$

La distribución definida por esta función de densidad de probabilidad se denomina distribución  $F$  de Fisher-Snedecor de  $\nu_1$  y  $\nu_2$  grados de libertad.

La función densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $F$  tiene un aspecto marcadamente asimétrico, tal como se indica en la figura 3.6.

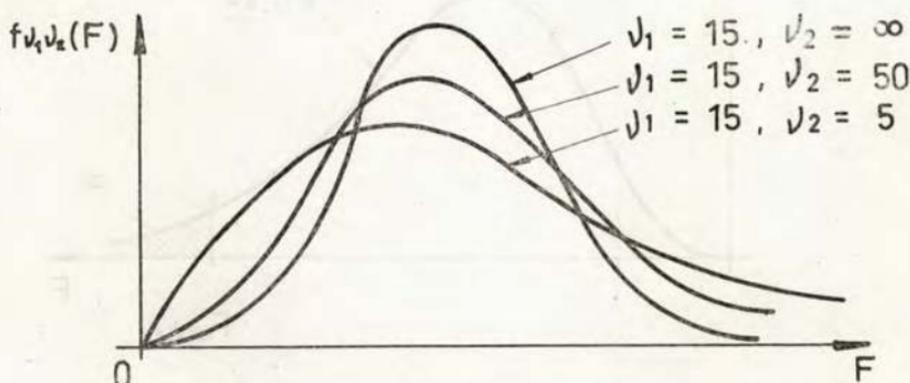


Fig. 3.6

La esperanza matemática de variable aleatoria  $F$  tiene por valor

$$E[F] = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad \text{para } \nu_2 > 2$$

y la variancia

$$\text{Var}[F] = \frac{\nu_2^2(2\nu_2 + 2\nu_1 - 4)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} \quad \text{para } \nu_2 > 4$$

Para facilitar los cálculos cuando se opera con leyes de  $F$  se han tabulado para diferentes valores de  $\nu_1$  y  $\nu_2$  los valores de  $F_{\alpha; \nu_1, \nu_2}$  tales que (ver fig. 3.7)

$$P_r\{F \geq F_{\alpha; \nu_1, \nu_2}\} = \alpha$$

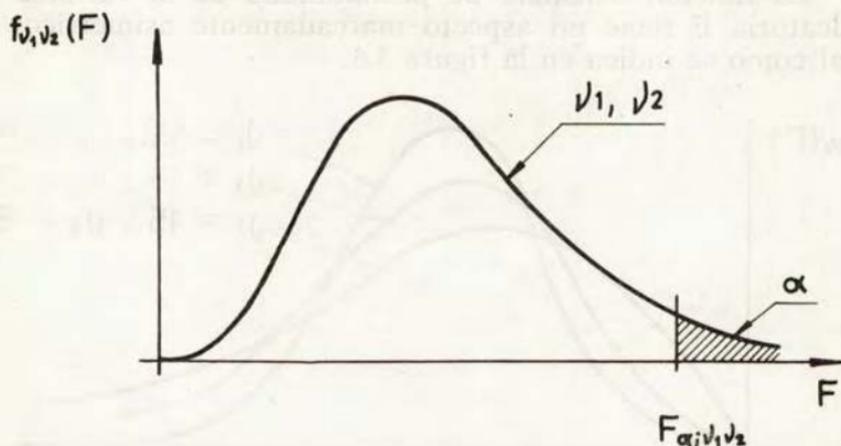


Fig. 3.7

En la obra de Mothes y Torrens-Ibern titulada *Estadística Aplicada a la Ingeniería* se pueden encontrar tabulados los valores de  $F_{\alpha; v_1, v_2}$  para  $\alpha = 5\%$ ,  $1\%$ ,  $0.1\%$  y una extensa gama de valores de  $v_1$  y  $v_2$ .

Si se desea calcular el valor de  $F_{\alpha; v_1, v_2}$  para  $\alpha = 95\%$ ,  $99\%$  y  $99.9\%$  bastará tener en cuenta que

$$Pr\left\{\frac{X_1/v_1}{X_2/v_2} \geq F_{\alpha; v_1, v_2}\right\} = Pr\left\{\frac{X_2/v_2}{X_1/v_1} < \frac{1}{F_{\alpha; v_1, v_2}}\right\} = \alpha$$

o lo que es lo mismo

$$Pr\left\{\frac{X_2/v_2}{X_1/v_1} \geq \frac{1}{F_{\alpha; v_1, v_2}}\right\} = 1 - \alpha$$

Ahora bien, dado que la variable aleatoria  $X_2 v_1 / X_1 v_2$  sigue igualmente una ley de F con  $v_2$  y  $v_1$  grados de libertad, puede escribirse

$$Pr\left\{\frac{X_2/v_2}{X_1/v_1} \geq F_{1-\alpha; v_2, v_1}\right\} = 1 - \alpha$$

de donde

$$F_{1-\alpha; \nu_2 \nu_1} = \frac{1}{F_{\alpha; \nu_1 \nu_2}}$$

o sea

$$F_{\alpha; \nu_1 \nu_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha; \nu_2 \nu_1}}$$

2) Ley de probabilidad de la relación de dos cuasi-variancias muestrales. Sean  $(x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$  y  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n_2})$  dos muestras aleatorias independientes, la primera procedente de una población normal  $N(m_1, \sigma_1)$  y la segunda de una población también normal  $N(m_2, \sigma_2)$ . Según sabemos las variables aleatorias

$$(n_1 - 1) \frac{S_1^2}{\sigma_1^2}$$

y

$$(n_2 - 1) \frac{S_2^2}{\sigma_2^2}$$

se distribuyen de acuerdo con leyes de  $\chi^2$  de  $\nu_1 = n_1 - 1$  y  $\nu_2 = n_2 - 1$  grados de libertad respectivamente. Además ambas son mutuamente independientes. En consecuencia la variable aleatoria

$$\frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} / (n_1 - 1)}{\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} / (n_2 - 1)} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

sigue una ley F de Snedecor de  $n_1 - 1$  y  $n_2 - 2$  grados de libertad.

Si las variancias de las dos poblaciones normales consideradas son idénticas e iguales a  $\sigma^2$ , la variable aleatoria

$$S^2/S_2^2$$

sigue una ley F de Snedecor de  $n_1 - 1$  y  $n_2 - 1$  grados de libertad.

### 3.7 RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES $K$ , $\chi^2$ , $t$ Y $F$

a) Relación entre  $\chi^2$  y  $K$ . Por definición

$$\chi^2 = \left( \frac{x - m}{\sigma} \right)^2 = K^2$$

es decir, la  $\chi^2$  de 1 grado de libertad es igual al cuadrado de una variable normal  $N(0, 1)$ . Profundicemos más en esta relación. Es evidente que

$$\begin{aligned} \Pr\{\chi^2 \geq \chi_{\alpha, 1}^2\} &= \alpha \\ \Pr\{K^2 \geq K_{\gamma}^2\} &= \alpha \end{aligned}$$

$$\Pr\{-K_{\gamma} \geq K \geq K_{\gamma}\} = \alpha$$

relación en la que, necesariamente,  $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ , es decir,

$$\Pr\{-K_{\alpha/2} \geq K \geq K_{\alpha/2}\} = \alpha$$

y en consecuencia

$$\chi_{\alpha, 1}^2 = K_{\alpha/2}^2$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{\chi_{\alpha, 1}^2} = \pm K_{\alpha/2}$$

b) Relación entre  $F$  y  $t$ . Por definición

$$t_{\nu} = \sqrt{\nu} \frac{K}{\chi_{\nu}^2}$$

$$F_{\nu_1 \nu_2} = \frac{\chi_{\nu_1}^2 / \nu_1}{\chi_{\nu_2}^2 / \nu_2}$$

$$F_{1, \nu} = \frac{\chi_1^2}{\chi_{\nu}^2 / \nu} = \nu \frac{K^2}{\chi_{\nu}^2} = t_{\nu}^2$$

es decir, la F de Snedecor con 1 y  $\nu$  grados de libertad es igual al cuadrado de una variable t de Student con  $\nu$  grados de libertad. Al igual que en el caso anterior profundicemos en el sentido de esta relación, escribiendo las siguientes relaciones evidentes:

$$P_r\{F_{1, \nu} \geq F_{\alpha; 1, \nu}\} = \alpha$$

$$P_r\{t_{\nu}^2 \geq t_{\alpha; \nu}^2\} = \alpha$$

$$P_r\{-t_{\nu} \geq t_{\nu} \geq t_{\alpha; \nu}\} = \alpha$$

$$P_r\{-t_{\alpha/2, \nu} \geq t_{\nu} \geq t_{\alpha/2, \nu}\} = \alpha$$

es decir

$$F_{\alpha; 1, \nu} = t_{\alpha/2, \nu}^2$$

o lo que es lo mismo

$$\sqrt{F_{\alpha; 1, \nu}} = \pm t_{\alpha/2, \nu}$$

c) Relación entre F y  $\chi^2$ . Sabemos que la variable aleatoria

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

sigue una ley de Snedecor de  $\nu_1 = n_1 - 1$  y  $\nu_2 = n_2 - 1$  grados de libertad.

Si  $n_2$  tiende a infinito,  $S_2^2$  tenderá a  $\sigma_2^2$  y será posible escribir

$$F_{n_1-1, \infty} = \frac{S_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{1}{n_1 - 1} (n_1 - 1) \frac{S_1^2}{\sigma_1^2} =$$

$$= \frac{1}{n_1 - 1} \chi_{n_1 - 1}^2$$

o lo que es lo mismo

$$F_{\alpha; \nu, \infty} = \frac{\chi_{\alpha, \nu}^2}{\nu}$$

De igual forma si  $n_1$  tiende a infinito,  $S_i^2$  tenderá a  $\sigma_i^2$  y resultará

$$F_{\alpha; \infty, \nu} = \frac{\nu}{\chi_{1-\alpha, \nu}^2}$$

toda vez que

$$P_r\{F_{\infty, \nu} \geq F_{\alpha; \infty, \nu}\} = \alpha$$

$$P_r\left\{\frac{\nu}{\chi_{\nu}^2} \geq \frac{\nu}{\chi_{\gamma, \nu}^2}\right\} = \alpha$$

$$P_r\left\{\frac{\chi^2}{\nu} < \frac{\chi_{\gamma, \nu}^2}{\nu}\right\} = \alpha$$

$$P_r\left\{\frac{\chi_{\nu}^2}{\nu} \geq \frac{\chi_{\gamma, \nu}^2}{\nu}\right\} = 1 - \alpha$$

lo que exige que

$$\gamma = 1 - \alpha$$

### 3.8 LEY DE PROBABILIDAD DE LA MEDIANA $y_{s+1}$ , DE UNA MUESTRA DE $n$ ELEMENTOS EXTRAIDA DE UNA POBLACION NORMAL $N(m, \sigma)$

Si en las expresiones encontradas en el párrafo 2.5.3 sustituimos  $F(y_{s+1})$  por

$$\phi(y_{s+1}) = \int_{-\infty}^{y_{s+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx$$

se obtienen las leyes de probabilidad de la variable aleatoria mediana en el caso de que la muestra (de un número par o impar de elementos) procede de una ley normal  $N(m, \sigma)$ .

Si la muestra es suficientemente grande, la ley de probabilidad de la mediana es aproximadamente normal de características:

$$E[y_{s+1}] = m$$

$$\text{Var}[y_{s+1}] = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma^2}{n}$$

### 3.9 LEY DE PROBABILIDAD DE LA AMPLITUD $w$ DE UNA MUESTRA DE $n$ ELEMENTOS EXTRAIDA DE UNA POBLACION NORMAL $N(m, \sigma)$

La ley de probabilidad de la variable aleatoria  $w$  puede obtenerse sustituyendo en la ecuación encontrada en el párrafo 2.6,  $F(y_1)$  y  $(y_1 + w)$  por  $\phi(y_1)$  y  $\phi(y_1 + w)$ .

Más que referirse a la ley de probabilidad de  $w$  conviene muchas veces referirse a la ley de probabilidad de  $w/\sigma$ , siendo  $\sigma$  la desviación tipo de la población normal de donde procede la muestra aleatoria.

En la obra de Mothes y Torrens-Ibern titulada *Estadística Aplicada a la Ingeniería* se puede encontrar tabulada la función de distribución de la variable aleatoria  $w/\sigma$ , es decir, el valor de

$$\int_{-\infty}^{w/\sigma} f(w/\sigma) d(w/\sigma)$$

para valores de  $n$  comprendidos entre 2 y 12.

De igual forma en la obra de Cavé titulada *Contrôle statistique des fabrications* pueden encontrarse tabulados, para  $n$  comprendido entre 2 y 12, los valores de los parámetros  $(w/\sigma)_{\alpha, n}$  y  $d_n$  tales que:

$$P_r \left\{ \frac{w}{\sigma} > \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{\alpha, n} \right\} = \alpha$$

$$d_n = E \left[ \frac{w}{\sigma} \right]$$

### 3.10 REALIZACION PRACTICA DEL MUESTREO. MUESTREO SIMULADO (METODO DE MONTE-CARLO)

A lo largo de los capítulos 2 y 3 nos hemos referido a las propiedades de las muestras aleatorias, es decir, de las muestras extraídas de forma que todos y cada uno de los elementos de la población tengan idéntica probabilidad de resultar elegidos.

¿Cómo debe realizarse en la práctica una extracción para que el resultado de la misma pueda considerarse fruto del azar?

El problema, de fácil solución en apariencia, es en realidad muy delicado. Podría pensarse en asociar a cada elemento de la población un número y mediante un sistema del tipo «lotería» efectuar extracciones de números que, en último término, permitirían la obtención física de la muestra. Este método, sin embargo, no es utilizable en la práctica por requerir la utilización de un sistema material de generación, lo cual supone una complicación que en general no se ve compensada por los resultados, toda vez que la intrínseca imperfección de todo dispositivo mecánico puede traducirse en la introducción de perturbaciones indeseables en las secuencias de números obtenidos, por grandes que sean las precauciones que se guarden durante el proceso de obtención.

En la práctica, el problema se resuelve asignando a

cada elemento de la población un número y recurriendo al empleo de tablas de números aleatorios o a la generación de números pseudo-aleatorios mediante ordenadores.

Las tablas de números aleatorios son tablas constituidas por series de columnas de números dígitos obtenidos mediante un proceso generador (mecánico, eléctrico, electrónico, ...) asimilable a la realización de extracciones no exhaustivas de una urna con 10 bolas numeradas del 0 al 9.

Las tablas más usuales son las de Fisher y Yates, Kendall y Babington Smith<sup>2</sup> y las de la Rand-Corporation<sup>3</sup>.

La tabla 7 es un extracto de las tablas de Kendall y Babington Smith.

El manejo de estas tablas es muy simple. Si se trata de obtener, por ejemplo, una muestra de 10 elementos de un lote de 500 lámparas de incandescencia, podemos suponer las lámparas numeradas del 000 al 499 y tomar las tres primeras columnas de la tabla 7, reteniendo tan sólo los 10 primeros números que sean inferiores a 500. Dichos números son:

022,	008,	422,	092,	250
285,	014,	424,	035,	189

Las lámparas de incandescencia a las que corresponden estos números constituirán la muestra aleatoria buscada.

Si la población es infinita (variable aleatoria continua) no es posible, evidentemente, asignar a cada elemento un número, tal como se hace cuando se trata de poblaciones finitas. En este caso lo que se hace es sustituir la población infinita por otra población finita de composición aproximada y realizar el muestreo aleatorio sobre esta última.

<sup>2</sup> 100,000 dígitos obtenidos a partir de un disco giratorio dividido en sectores múltiplos de 10, iluminado de forma intermitente.

<sup>3</sup> 1,000,000 de dígitos obtenidos a partir del descrestado de un ruido de fondo.

El caso más simple es aquel en que la variable aleatoria está distribuida de acuerdo con una ley de probabilidad uniforme. Todo se reduce a sustituir el intervalo  $[0,1]$  por un número finito de puntos equidistantes, por ejemplo los puntos de abscisa  $h/10^K$ , siendo  $h$  un número entero comprendido entre 0 y  $10^K$ . Elegido el valor del parámetro  $K$ , basta tomar las  $K$  primeras columnas de una tabla de números aleatorios y dividir los números de  $K$  dígitos en ella leídos por  $10^K$ .

Si, por ejemplo,  $K = 4$ , la secuencia

0.0222  
0.8576  
0.0088  
0.6429  
0.9403

obtenida a partir de la tabla 7, es una muestra aleatoria de la distribución uniforme en  $[0,1]$ .

En el caso en que la variable aleatoria está distribuida de acuerdo con una ley de probabilidad cualquiera de función de distribución  $F(x)$ , la obtención de una muestra aleatoria de esta variable reposa sobre el lema siguiente:

«Si una variable aleatoria tiene una función de distribución  $F(x)$  continua y estrictamente creciente, la variable aleatoria  $y = F(x)$  sigue una ley de probabilidad uniforme en  $[0,1]$ .»

La demostración es inmediata. En efecto, para todo

$$0 \leq y_0 \leq 1$$

se puede escribir

$$\begin{aligned} \Pr\{y < y_0\} &= \Pr\{F(x) < y_0\} = \\ &= \Pr\{x < F^{-1}(y_0)\} = FF^{-1}(y_0) = y_0 \end{aligned}$$

El problema se reduce, pues, a obtener por los métodos descritos anteriormente una muestra aleatoria de la variable  $y = F(x)$  de distribución uniforme en  $[0,1]$  y

pasar más tarde a la determinación de los correspondientes valores de  $x$  mediante la expresión

$$x = F^{-1}(y)$$

es decir, resolviendo la ecuación

$$F(x) = y$$

Si, por ejemplo, se trata de obtener una muestra aleatoria de 5 elementos de una población normal  $N(2\ 000, 100)$ , bastará leer en unas tablas de números aleatorios 5 números de tres dígitos, tales como (tabla 7):

022  
857  
008  
642  
940

Los correspondientes valores de la función de distribución normal  $\phi(K)$  serán:

0.022  
0.857  
0.008  
0.642  
0.940

a los que corresponden los siguientes valores de la variable aleatoria  $K$  normal  $N(0, 1)$  (ver tabla 1):

- 2.014  
1.069  
- 2.410  
0.365  
1.560

Y dado que entre las variables aleatorias  $x$  y  $K$  existe la relación

$$K = \frac{x - m}{\sigma}$$

la muestra aleatoria de la variable  $x$  será

$$2\,000 - 2.014 \times 100 = 1\,798.6$$

$$2\,000 + 1.069 \times 100 = 2\,106.9$$

$$2\,000 - 2.410 \times 100 = 1\,759.0$$

$$2\,000 + 0.365 \times 100 = 2\,036.5$$

$$2\,000 + 1.560 \times 100 = 2\,156.0$$

Dado que, en último término, la obtención de una muestra aleatoria en una población normal  $N(m, \sigma)$  se reduce a la obtención de valores aleatorios de la variable  $K$  normal  $N(0, 1)$ , se han preparado tablas que permiten la lectura directa de dichos valores.

La Rand-Corporation ha preparado unas tablas con 1,000,000 valores de  $K$ .

Aparte de su utilidad para la obtención de muestras, los números aleatorios tienen un gran campo de aplicación práctica. Por ejemplo, las técnicas de simulación y numerosas técnicas de cálculo numérico están basadas en el empleo de números aleatorios.

El fundamento de las técnicas de simulación es el siguiente: los fenómenos reales son extraordinariamente complejos y muchas veces se hallan configurados por un extenso conjunto de acontecimientos aleatorios cuya ley de probabilidad es difícil de determinar. En estos casos pueden efectuarse simulaciones, es decir, realizaciones ficticias de dicho fenómeno mediante números aleatorios, lo que permite estudiar su evolución y poner claramente de manifiesto la influencia del azar. Las técnicas de simulación se aplican en estudios de física nuclear, programación matemática, gestión de stocks, teoría de juegos, previsión, etc.

En lo que al cálculo numérico se refiere, cuando un problema es difícil de resolver mediante métodos clásicos se puede estudiar el asociarle un proceso aleatorio una de cuyas características (la media, por ejemplo) esté ligada al número que se trata de calcular. La realización de un muestreo y el cálculo de la característica aleatoria correspondiente, permite obtener una solución aproximada del problema. Se han elaborado numerosos métodos de resolución de integrales múltiples y ecuaciones

diferenciales, inversión de matrices, etc., basados en este principio.

Para describir cualquier algoritmo que requiera el empleo de números aleatorios se utiliza el nombre genérico de «método de Monte-Carlo».

En los problemas cuyo tratamiento requiere el uso de ordenadores, las tablas de números aleatorios son de utilidad muy limitada toda vez que exigen la ocupación de una fracción importante de la capacidad de memoria del ordenador. En estos casos se recurre a la solución de que sea el propio ordenador quien genere los números aleatorios a medida que las necesidades lo exijan. Cada número es obtenido a partir del anterior mediante un sistema de cálculo preestablecido.

Dado que en este caso los números son obtenidos a través de un proceso determinista, se les denomina con el adjetivo de pseudo-aleatorios.

Una secuencia de números aleatorios, para ser prácticamente utilizable, debe gozar de forma razonablemente satisfactoria de una serie de propiedades que son patrimonio de las secuencias de números aleatorios, a saber: equiprobabilidad de los 10 dígitos e «independencia» entre los distintos términos de la secuencia.

Es muy importante verificar si un generador de números pseudo-aleatorios determinado satisface estas condiciones. Para ello suelen utilizarse las pruebas de  $\chi^2$  o de Kolmogorov-Smirnov.

Existen varios métodos de generación de números pseudo-aleatorios.

El mejor es, quizá, el «método congruencial multiplicativo», debido a Lehmer.

En este método, cada número se determina a partir del anterior mediante la expresión

$$x_{n+1} = (ax_n) \bmod m \quad (n \geq 0)$$

es decir,  $x_{n+1}$  es el menor número congruente con  $ax_n$  módulo  $m$ .

Todo generador de este tipo tiene un período determinado después del cual todos los números de la secuencia vuelven a repetirse.

## CAPITULO 4

### ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DE UNA POBLACION

#### 4.1 ESTIMADORES

##### 4.1.1 *Introducción*

El estudio de una característica medible,  $X$ , de un fenómeno físico o económico mediante un modelo probabilístico, exige la adopción de una ley de probabilidad  $f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)dx$  perfectamente determinada, para la distribución de la variable  $X$ , supuesta aleatoria.

En teoría, para poder operar con la ley de probabilidad adoptada, es imprescindible conocer los respectivos valores de los parámetros  $\theta_i$  característicos de la ley.

En general, sin embargo, los verdaderos valores de estos parámetros resultan inaccesibles, y hay que conformarse con valores aproximados, es decir, con «estimaciones» de estos parámetros.

En efecto, en la mayoría de los casos prácticos se carece de una información exhaustiva acerca del fenómeno, disponiéndose tan sólo de un conjunto de observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que no constituyen sino una muestra aleatoria procedente de la población ideal a la que equivale el conjunto de todos los valores posibles que la variable aleatoria  $X$  objeto de análisis puede adoptar.

El cálculo exacto de los parámetros  $\theta_i$  resulta, en consecuencia, imposible, y únicamente cabe intentar adivinar (estimar) sus valores a partir de la información parcial suministrada por la muestra.

Para estimar el valor de un parámetro  $\theta_1$  de una población se utilizan los «estimadores».

Un «estimador» es una variable aleatoria, función de los valores muestrales  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . El valor numérico adoptado por esta función para una muestra particular constituye la «estimación» del parámetro desconocido.

Todo estimador, en cuanto variable aleatoria, tiene una función densidad de probabilidad que es posible determinar a partir de la ley de probabilidad de la población. En efecto, si  $X$  es una variable aleatoria de función densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$  dependiente de un parámetro  $\theta$  que se trata de estimar y designamos por

$$T = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

un estimador de  $\theta$ , la probabilidad de una muestra genérica  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  será

$$f(x_1, \theta)f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta)dx_1dx_2 \dots dx_n$$

y, al menos en teoría, será posible pasar de esta probabilidad de la muestra a la ley de probabilidad de la variable  $T$

$$g(T, \theta)dT$$

La consideración de la ley de probabilidad de un estimador permite describir sus propiedades deseables en orden a una aproximación óptima al valor del parámetro que se trata de estimar.

Es perfectamente intuitivo que un estimador será tanto mejor cuanto más próximo esté su valor medio al valor del parámetro que se trata de estimar (desconocido pero que vale lo que vale) y cuanto menor sea su dispersión en torno a este valor medio (hablando en términos de teoría de errores, cuanto menores sean los errores sistemático y casual).

En la figura 4.1 se han representado las funciones de densidad de probabilidad de tres posibles estimadores de un parámetro  $\theta$ .

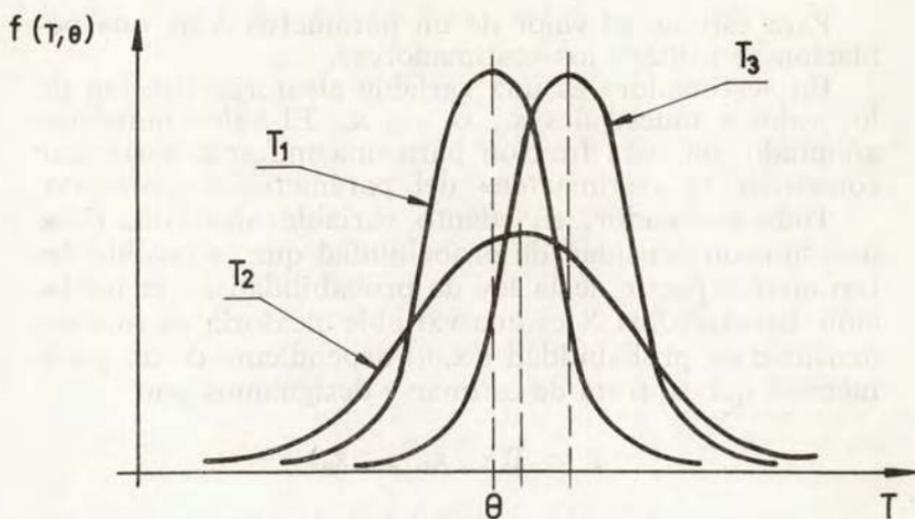


Fig. 4.1

El estimador  $T_3$  es muy preciso (error casual pequeño) pero su aproximación es mala. El estimador  $T_2$  es muy aproximado (error sistemático pequeño) pero poco preciso. El mejor de los tres es  $T_1$  pues tiene una buena precisión y su aproximación es óptima.

Estas ideas tienen desde luego un carácter puramente intuitivo. En los párrafos siguientes vamos a tratar de precisarlas en forma matemática.

#### 4.1.2 Verosimilitud, cantidad de información y resumen exhaustivo

a) Verosimilitud. Sea  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una muestra aleatoria de una variable  $X$  de función densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$ . La función

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

se denomina «verosimilitud» asociada a la muestra.

b) Cantidad de información. Si

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$$

es la verosimilitud de una muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , se denomina «cantidad de información de Fisher suministrada por la muestra sobre el parámetro  $\theta$ » la cantidad definida por:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L\right)^2\right\} = \\ &= \int \dots \int \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L\right)^2 L dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned}$$

En el caso de una muestra aleatoria simple la cantidad de información se escribe en la forma

$$\begin{aligned} I(\theta) &= nE\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x, \theta)\right)^2\right\} = \\ &= n \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x, \theta)\right]^2 f(x, \theta) dx \end{aligned}$$

En el caso particular de una ley normal  $N(\theta, \sigma)$  de desviación tipo conocida, la verosimilitud de una muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{\sum(x_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right]$$

y la cantidad de información

$$I(\theta) = n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \theta}{\sigma^2}\right)^2 \varphi(x) dx = \frac{n}{\sigma^2}$$

es decir, que la cantidad de información suministrada por la muestra en relación con el parámetro desconoci-

do  $\theta$  es tanto mayor cuanto mayor es  $n$  y cuanto más pequeña es la variancia. Esta es una justificación del nombre dado por Fisher a  $I(\theta)$ .

c) Resumen exhaustivo. Se dice que un estadístico  $T = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un resumen exhaustivo de una muestra en relación a un parámetro  $\theta$  cuando toda la información aportada por la muestra sobre el parámetro está contenida en el estadístico  $T$ , es decir, cuando se cumple la igualdad

$$I_{(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\theta) = I_T(\theta)$$

siendo

$$\begin{aligned} I_T(\theta) &= E \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln g(T, \theta) \right)^2 \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln g(T, \theta) \right]^2 g(T, \theta) dT \end{aligned}$$

Neyman ha demostrado que la condición necesaria para que un estadístico  $T = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sea un resumen exhaustivo es que sea posible efectuar una descomposición factorial de la verosimilitud del tipo

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = g(T, \theta)h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

en la que  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  no depende de  $\theta$ .

Supongamos, por ejemplo, una variable aleatoria normal  $N(m, \sigma)$ . La verosimilitud se escribe

$$\begin{aligned} L &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right]^n \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right] = \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right]^n \exp \left[ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - m)^2 \right] \\ &\quad \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] \end{aligned}$$

Si  $\sigma$  es conocido,  $T = \bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$  es un resumen exhaustivo para  $m$ . En efecto, dado que  $x$  es normal  $N(m, \sigma/\sqrt{n})$ , la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $\bar{x}$  será

$$g(\bar{x}, m) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - m)^2 \right]$$

por lo que es posible efectuar una descomposición factorial de  $L$  en la forma

$$L = g(\bar{x}, m)h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Si  $m$  es conocido,

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

es un resumen exhaustivo para  $\sigma^2$ . En efecto, dado que la variable  $nT/\sigma^2$  está distribuida de acuerdo con una ley de  $\chi^2$  de  $\nu = n$  grados de libertad, la función densidad de probabilidad de  $T$  será

$$g(T, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n} \frac{n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} T^{[(n/2)-1]} \exp(-nT/2\sigma^2)$$

y como

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

resulta

$$g(T, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n} \frac{n}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right]^{[(n/2)-1]} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right]$$

expresión que muestra que es posible una descomposición factorial de  $L$  en la forma

$$L = g(T, \sigma^2)h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

#### 4.1.3 Estimadores convergentes (correctos)

Un estimador  $T$  se dice que es convergente si se cumple que

$$E[T] \rightarrow \theta$$

$$\text{Var}[T] \rightarrow 0$$

cuando  $n$  tiende a infinito.

En un estimador convergente los errores sistemático y casual tienden a anularse a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

De un estimador convergente  $T$ , se puede deducir una infinidad de estimadores convergentes  $\varphi(n)T$ , siendo  $\varphi(n)$  una función que tiende a 1 cuando  $n$  tiende a infinito.

En el caso de una ley normal  $N(m, \sigma)$  sabemos que

$$E[\sigma'^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$$\text{Var}[\sigma'^2] = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4$$

por consiguiente  $\sigma'^2$  es un estimador convergente de la variancia de una ley normal, supuesta desconocida.

#### 4.1.4 Estimadores centrados (sin sesgo)

Un estimador  $T$  se dice que es centrado si cualquiera que sea  $n$  se verifica que

$$E[T] = \theta$$

Esto significa que, en promedio, un estimador centrado carece de error sistemático.

Si tenemos un estimador  $T$  no centrado y se verifica que

$$E[T] = \varphi(n), \theta$$

como

$$E[T/\theta] = \varphi(n)$$

para construir un estimador centrado bastará dividir  $T$  por  $\varphi(n)$ , o sea, por  $E[T/\theta]$ , es decir, el estimador

$$\frac{T}{E[T/\theta]} = \frac{T}{\varphi(n)}$$

será un estimador centrado de  $\theta$ .

Por ejemplo, en el caso de la ley normal  $N(m, \sigma)$ , y dado que

$$E[\sigma'^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

la cuasi-variancia muestral

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sigma'^2$$

es un estimador centrado de  $\sigma^2$ , supuesta desconocida.

La carencia de error sistemático o sesgo es una propiedad deseable en un estimador.

#### 4.1.5 *Estimador absolutamente correcto*

Un estimador  $T$  se dice que es absolutamente correcto si es a la vez convergente y centrado, es decir, si

$$E[T] = \theta$$

$$\text{Var}[T] \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Por ejemplo, en el caso de la ley normal  $N(m, \sigma)$

$$E[\bar{x}] = m$$

$$\text{Var}[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E[S^2] = \sigma^2$$

$$\text{Var}[S^2] = \frac{2}{n-1} \sigma^4$$

En consecuencia tanto  $\bar{x}$  como  $S^2$  son estimaciones absolutamente correctas de la media y de la variancia de una población normal, supuestas desconocidas.

#### 4.1.6 *Precisión intrínseca de un estimador. Desigualdad de Cramer-Rao*

En general, un mismo parámetro  $\theta$  puede ser estimado mediante distintos estimadores centrados. Cuando esto ocurre es natural escoger como estimador óptimo aquel que tenga «variancia mínima» (mínimo error casual). El no hacerlo implica una pérdida de información. Si  $T$  es un posible estimador centrado y  $T^*$  es el estimador de variancia mínima, la pérdida de información que supone utilizar  $T$  en lugar de  $T^*$  para la estimación de  $\theta$  puede expresarse mediante el cociente

$$e_T = \frac{\text{Var}[T^*]}{\text{Var}[T]}$$

llamado «eficacia» del estimador centrado  $T$ .

Un tipo especialmente interesante de estimador de variancia mínima es el estimador eficaz. Para mejor precisar el concepto de estimador eficaz empezamos por referirnos a la desigualdad de Cramer-Rao. Se demuestra que, dados una función densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$  y un estimador centrado  $T$  del parámetro desconocido  $\theta$ ,

se cumple, bajo condiciones muy generales (condiciones de regularidad de Wolfowitz), que

$$\text{Var}[T] \geq \frac{1}{I(\theta)}$$

siendo

$$I(\theta) = nE\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x, \theta)\right]^2\right\}$$

es decir, que la variancia del estimador está acotada inferiormente, y que el valor de la cota inferior es precisamente la inversa de la cantidad de información.

Un estimador centrado cuya variancia coincida con la cota de Cramer-Rao, es decir, tal que

$$\text{Var}[T] = 1/I(\theta)$$

se denomina estimador «eficaz» y es, evidentemente, de variancia mínima.

La eficacia de un estimador eficaz es igual a la unidad.

Puede ocurrir que no exista un estimador cuya variancia coincida con la cota de Cramer-Rao y sin embargo exista un estimador de variancia mínima. En este caso se dice que la cota de Cramer-Rao es inaccesible.

En el caso de una ley normal  $N(m, \sigma)$  de variancia conocida la cantidad de información vale  $n/\sigma^2$  y la desigualdad de Cramer-Rao se escribe

$$\text{Var}[T] \geq \frac{\sigma^2}{n}$$

La cota  $\sigma^2/n$  es alcanzada cuando se toma  $T$  igual a la media muestral  $\bar{x}$ , es decir,  $\bar{x}$  es un estimador eficaz de la media de una población normal.

Un estimador centrado y eficaz es necesariamente un resumen exhaustivo de la muestra en relación con el parámetro que se trata de estimar.

En el caso de una ley normal  $N(m, \sigma)$  de variancia desconocida

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

es un estimador centrado y eficaz (y en consecuencia resumen exhaustivo) de  $\sigma^2$ . En efecto, en el caso de  $\sigma^2$  desconocida, la cantidad de información vale  $n/2\sigma^4$  y la desigualdad de Cramer-Rao se escribe

$$\text{Var}[T] \geq \frac{2\sigma^4}{n}$$

Ahora bien, la variable  $nT/\sigma^2$  está distribuida de acuerdo con una ley de  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad de modo que

$$\text{Var}\left[\frac{nT}{\sigma^2}\right] = 2n$$

y en consecuencia

$$\text{Var}[T] = 2n \frac{\sigma^4}{n^2} = \frac{2\sigma^4}{n}$$

Así pues la cota de Cramer-Rao es alcanzada si se toma como estimador de  $\sigma^2$  la expresión

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

$T$  es, pues, centrado, eficaz y, en consecuencia, un resumen exhaustivo.

Todo estimador centrado  $T$  de  $\sigma^2$  será tal que

$$\text{Var}[T] \geq \frac{2\sigma^4}{n}$$

Por ejemplo, el estimador

$$T = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

tiene por variancia

$$\text{Var}[S^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1} > \frac{2\sigma^4}{n}$$

Su eficacia será

$$e_T = \frac{n-1}{n} < 1$$

#### 4.2 ESTIMADORES DE LA MEDIA, VARIANCIA Y DESVIACION TIPO DE UNA LEY NORMAL $N(m, \sigma)$

Según acabamos de ver en el párrafo anterior:

— la media muestral

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

es un estimador convergente, centrado y eficaz (y en consecuencia resumen exhaustivo) de la media de una población normal;

— la cuasi-variancia muestral

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sigma'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

es un estimador convergente, centrado y resumen exhaustivo, pero no eficaz, de la variancia de una población normal.

Ahora bien

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma$$

no es ya un estimador centrado de la desviación tipo. Para demostrarlo vamos a seguir un camino indirecto. Según sabemos, la variable aleatoria  $\sqrt{n} \sigma' / \sigma$  sigue una ley de  $\chi$  de  $\nu = n - 1$  grados de libertad, o lo que es lo mismo, la variable aleatoria  $\sigma' / \sigma$  sigue una ley de  $\chi / \sqrt{n}$  de media

$$E\left[\frac{\sigma'}{\sigma}\right] = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n-3}{3}\right)!} = b_n$$

Ahora bien, si  $T$  es un estimador no centrado de un parámetro  $\theta$ , el estimador  $T/E[T/\theta]$  es un estimador centrado de  $\theta$ . Por consiguiente

$$\frac{\sigma'}{E\left[\frac{\sigma'}{\sigma}\right]} = \frac{\sigma'}{b_n}$$

es un estimador centrado de la desviación tipo poblacional  $\sigma$ , y dado que

$$b_n < \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

$\sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma$  no es un estimador centrado de  $\sigma$ .

Para la estimación de la desviación tipo conviene referirse al estimador

$$T = \frac{\sigma'}{b_n}$$

que es un estimador convergente y centrado, es decir, absolutamente correcto. En efecto, dado que

$$\text{Var}\left[\sqrt{n} \frac{\sigma'}{\sigma}\right] = n - 1 - \left\{E\left[\sqrt{n} \frac{\sigma'}{\sigma}\right]\right\}^2$$

resulta

$$\text{Var}[\sigma'] = \frac{\sigma^2}{n} \left[ n - 1 - (\sqrt{n} b_n)^2 \right]$$

y

$$\text{Var}\left[\frac{\sigma'}{b_n}\right] = \frac{\sigma^2}{nb_n^2} \left[ n(1 - b_n^2) - 1 \right]$$

Cuando  $n$  tiende a  $\infty$ ,  $b_n$  tiende a 1 y

$$\text{Var}\left[\frac{\sigma'}{b_n}\right] \rightarrow 0$$

En consecuencia  $\sigma'/b_n$  es un estimador convergente. Sin embargo  $\sigma'/b_n$  no es un estimador eficaz, según puede comprobarse al comparar su variancia con la cota de Cramer-Rao.

En la Tabla 4.1 se dan los valores de  $b_n$  y  $\sqrt{(n-1)/n}$  para  $n = 5, 10, 15, 20, 25$  y  $30$ , así como su diferencia, expresada en % de  $b_n$ . Puede comprobarse que a partir de  $n = 30$  el error cometido utilizando  $\sqrt{(n-1)/n}$  en lugar de  $b_n$  es inferior al 1 %. En la práctica a partir de  $n = 30$  se utiliza el estimador

$$T = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma'$$

TABLA 4.1

n	$b_n$	$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$	Error %
5	0.841	0.894	6.3
10	0.923	0.947	2.6
15	0.949	0.966	1.8
20	0.962	0.973	1.1
25	0.970	0.981	1.1
30	0.975	0.983	0.8

que no requiere cálculos complicados y permite una estimación suficientemente buena de la desviación tipo. Sin embargo para tamaños de muestra inferiores a 30 conviene utilizar el estimador absolutamente correcto

$$T = \sigma'/b_n$$

La desviación tipo también puede estimarse a partir de la amplitud muestral  $w$ , lo que en la práctica resulta muy cómodo. Dado que la variable aleatoria  $w/\sigma$  sigue una ley de probabilidad cuya media vale (párrafo 3.8)

$$E[w/\sigma] = d_n$$

el cociente

$$\frac{w}{E[w/\sigma]} = \frac{w}{d_n}$$

es un estimador centrado de la desviación tipo.

La estimación de la desviación tipo a partir de la amplitud muestral  $w$  es menos eficaz que su estimación a partir de la desviación tipo muestral  $\sigma'$ , y la eficacia ( $\text{Var}[\sigma'/b_n]/\text{Var}[w/d_n]$ ) disminuye muy rápidamente a medida que  $n$  aumenta. Cavé<sup>1</sup> propone un método que permite estimar  $\sigma$  a partir de la amplitud muestral  $w$  con una eficacia aceptable. Este método consiste en:

- extraer una muestra de tamaño  $n$ ;
- descomponerla en  $K$  sub-muestras de tamaño  $n'(n'K = n)$ ;
- obtener las  $K$  amplitudes muestrales correspondientes;
- calcular la amplitud media  $\bar{w}$

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^K w_i/K$$

— tomar para estimador de la desviación tipo  $\sigma$  el estadístico

$$T = \bar{w}/d_n$$

La variancia de este estimador es

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{w}/d_n] &= \text{Var}\left[\frac{\Sigma w}{Kd_n}\right] = \frac{1}{K^2 d_n^2} \text{Var}[\Sigma \bar{w}] = \\ &= \frac{1}{Kd_n^2} \text{Var}[w] = \frac{1}{n} \frac{n' \text{Var}[w]}{d_n^2} = \frac{\sigma^2}{n} C_n \end{aligned}$$

Cavé ha calculado los valores de  $C_n$  para una amplia gama de valores de  $n'$  (tabla 4.2).

<sup>1</sup> R. Cavé, *Le control statistique des fabrications*, cap. IV, párrafo IV.5.

TABLA 4.2

$n'$	$d_{n'}$	$c_{n'}$
2	1.128	1.180
3	1.693	0.900
4	2.059	0.731
5	2.326	0.690
6	2.534	0.672
7	2.704	0.664
8	2.847	0.663
9	2.970	0.666
10	3.078	0.671
11	3.179	0.677
12	3.258	0.685
13	3.336	0.693
14	3.407	0.702
15	3.472	0.711
20	3.735	0.761
25	3.931	0.814
30	4.086	0.865
40	4.322	0.961
50	4.498	1.051
100	5.020	1.454

Para un tamaño de muestra dado, la variancia de  $\bar{w}/d_{n'}$  sólo depende de  $n'$  y, de acuerdo con la tabla 4.2, dicha variancia es mínima cuando  $n' = 8$  y vale

$$\text{MIN}\{\text{Var}[\bar{w}/d_{n'}]\} = \frac{\sigma^2}{n} 0.663$$

Por consiguiente, para obtener la eficacia máxima conviene escoger para tamaño de muestra un múltiplo de 8, es decir,

$$n = K8 = \dot{8}$$

La eficacia del estimador  $\bar{w}/d_s$  con respecto al estimador  $\sigma'/b_s$  ( $n = n' = 8$ ) es

$$e = \frac{\text{Var}[\sigma'/b_s]}{\text{Var}[\bar{w}/d_s]} = \frac{8(1 - \overline{0.903^2}) - 1}{0.663 \times \overline{0.903^2}} = 0.882$$

### 4.3 METODOS PARA LA FORMACION DE ESTIMADORES

#### 4.3.1 Introducción

Existen varios métodos generales para la formación de estimadores, todos ellos basados en razonamientos de carácter heurístico<sup>2</sup>, pero su descripción detallada se sale del marco de este trabajo.

Siguiendo a Sixto Ríos<sup>3</sup>, nos limitaremos a describir de forma breve el método de analogía y el método de la máxima verosimilitud, que son, con mucho, los más utilizados.

#### 4.3.2 Método de analogía

La idea heurística de este método es la analogía entre muestra y población. Por ejemplo, si la media de una población es  $m$ , por analogía tomaremos como estimador de dicha media el estadístico

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1} x_i$$

<sup>2</sup> El adjetivo «heurístico» se aplica a aquellos métodos matemáticos que, basados en hipótesis felices o en principios poco rigurosos, permiten obtener resultados satisfactorios en determinados casos.

<sup>3</sup> Sixto Ríos, *Métodos estadísticos*, tomo II, «Teoría de las muestras», cap. 20.

De hecho, todos los estimadores a que nos hemos referido en los párrafos 4.1 y 4.2 han sido formados de acuerdo con este método.

### 4.3.3 Método de la máxima verosimilitud

Para centrar ideas, supongamos que se trata de resolver el siguiente problema. Una urna contiene cuatro bolas que pueden ser blancas o negras, pero ignoramos en que proporción relativa se encuentran. Se realizan dos extracciones no exhaustivas y se obtiene una bola blanca y una bola negra. Se trata de estimar, con estos datos, la composición de la urna. Desde luego las composiciones posibles son

- 0 blancas - 4 negras
- 1 blanca - 3 negras
- 2 blancas - 2 negras
- 3 blancas - 1 negra
- 4 blancas - 0 negras

es decir, las posibles proporciones de bolas blancas son

$$0, 1/4, 1/2, 3/4 \text{ y } 1$$

En estas condiciones la probabilidad del suceso  $1b - 1n$  en dos extracciones no exhaustivas son las dadas en la tabla adjunta:

Composición	Proporción de bolas blancas	Pr $\{1b - 1n\}$
0b - 4n	0	0
1b - 3n	1/4	6/16
2b - 2n	1/2	8/16
3b - 1n	3/4	6/16
4b - 0n	1	0

La idea heurística del método de la máxima verosimilitud consiste en admitir que la población base es aquella que daría máxima probabilidad al suceso considerado.

En nuestro caso, la máxima probabilidad es 8/16; por consiguiente, admitiendo la idea heurística del método de la máxima verosimilitud, estimamos que la composición de la urna es dos bolas blancas y dos negras.

Si  $f(x, \theta)$  es la función densidad de probabilidad de una cierta población y consideramos una muestra aleatoria simple genérica  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , la estimación  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  del parámetro  $\theta$  es el valor de  $\theta$  que da a la muestra considerada la máxima probabilidad *a priori* de ser obtenida. Dicha probabilidad *a priori* no es otra cosa que la verosimilitud de la muestra, y se escribe

$$L = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta)f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta)$$

Todo se reduce, pues, a resolver la ecuación

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Toda solución  $\hat{\theta}$ , función de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , constituye un estimador de máxima verosimilitud del parámetro  $\theta$ .

A veces, por comodidad de cálculo, conviene referirse a la función  $\ln L$  en lugar de a  $L$ . El problema no cambia, toda vez que por ser  $L$  una función esencialmente positiva sus máximos coinciden con los de  $\ln L$ .

La ecuación a resolver en este caso sería

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$$

En el caso concreto de una ley normal  $N(m, \sigma)$ , si el parámetro desconocido es  $m$ , se verifica que

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = \frac{n}{\sigma^2} (\bar{x} - m) = 0$$

por consiguiente

$$\hat{m} = \bar{x}$$

Si el parámetro desconocido es  $\sigma^2$  deberemos escribir

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} = 0$$

que nos da el estimador

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

Si la media y la variancia son desconocidas, el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0$$

da como solución

$$\hat{m} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Una de las propiedades más importantes de los estimadores determinados por el método de la máxima verosimilitud es la siguiente: si  $\hat{\theta}$  es una solución de la ecua-

ción de verosimilitud, bajo condiciones muy generales se cumple que la variable aleatoria

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f\right)^2\right]}}$$

es asintóticamente normal  $N(0, 1)$ , o lo que es lo mismo, la variable aleatoria  $\hat{\theta}$  es asintóticamente normal

$$N\left[\theta, \frac{1}{\sqrt{nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f\right)^2\right]}}\right]$$

Dado que  $\hat{\theta}$  tiende a tener por media, cuando  $n$  tiende a  $\infty$ , el verdadero valor del parámetro desconocido y por variancia la cota de Cramer-Rao, resulta que  $\hat{\theta}$  es asintóticamente un estimador centrado, eficaz (y en consecuencia resumen exhaustivo) de  $\theta$ .

La eficacia de un estimador por el método de la máxima verosimilitud es, pues, una propiedad asintótica. Este método se impondrá, por tanto, en el caso en que la muestra sea grande.

Por otra parte, si existe un estimador eficaz, tiene que ser necesariamente una solución de la ecuación de verosimilitud. Se comprende que, caso de no existir estimador eficaz, se imponga adoptar un estimador de máxima verosimilitud dadas sus propiedades asintóticas.

#### 4.4 INTERVALO DE CONFIANZA DE UN ESTIMADOR

##### 4.4.1 Introducción

En los párrafos anteriores hemos descrito algunos de los puntos más importantes de la teoría de la estimación puntual.

En la estimación puntual, a una muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de una variable aleatoria cuya función densidad de probabilidad depende de un parámetro desconocido  $\theta$ , se le asocia una variable aleatoria  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que, sometida a ciertas condiciones, se denomina estimador del parámetro desconocido.

Este método de estimación no es siempre el más adecuado. En efecto, limitarse a dar como estimación de  $\theta$  el valor adoptado por el estimador  $T$  en una experiencia particular puede dar lugar a desviaciones considerables respecto del verdadero valor de  $\theta$ .

Otro método de estimación, fundamental en el razonamiento estadístico, es el método de estimación por intervalo.

Antes de plantear el problema en su forma más general, refirámonos a un caso concreto. Supongamos una población normal  $N(m, \sigma)$  de media desconocida. Según la teoría de la estimación puntual, un estimador de la media poblacional desconocida es

$$T = \bar{x}$$

Ahora bien, según sabemos, si una población es normal  $N(m, \sigma)$ , la ley de distribución de las medias muestrales es también normal  $N(m, \sigma/\sqrt{n})$ , es decir, la variable aleatoria centrada y reducida

$$K = \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

es normal  $N(0, 1)$ .

En estas condiciones podemos escribir que

$$Pr\left\{-K_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq K_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

o bien

$$Pr\left\{-K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - m \leq K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

siendo  $K_{\alpha/2}$  la cuantila de orden  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la ley normal  $N(0, 1)$ .

De la expresión anterior se deducen inmediatamente las dos relaciones equivalentes

a)

$$Pr\left\{m - K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq m + K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

b)

$$Pr\left\{\bar{x} - K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

Estas dos relaciones tienen interpretaciones diferentes. En la (a) se afirma que es  $1 - \alpha$  la probabilidad de que la variable aleatoria  $\bar{x}$  caiga dentro del intervalo determinista

$$m \pm K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Tal relación no es otra cosa que el intervalo de confianza de la variable aleatoria media muestral, y sólo tiene utilidad cuando  $m$  es perfectamente conocida.

Pero precisamente en el problema que nos ocupa  $m$  es desconocida. De ahí el interés de la relación (b), que puede interpretarse diciendo que la probabilidad de que el intervalo aleatorio

$$\bar{x} \pm K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

cubra el verdadero valor de  $m$ , desconocido pero que vale lo que vale, es  $1 - \alpha$ . Hablando en términos de frecuencia, esto significa que en una larga serie de muestras de extensión  $n$ , aproximadamente el  $(1 - \alpha) 100\%$

de los intervalos (b) cubrirán al verdadero valor de la media poblacional.

Al intervalo aleatorio

$$\bar{x} \pm K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se le da el nombre de «intervalo de confianza» de la media muestral al nivel de confianza, nivel de significación o coeficiente de confianza  $\alpha$ , queriendo indicar con ello que existe una probabilidad  $1 - \alpha$  de que dicho intervalo contenga a la media poblacional  $m$ , debiendo interpretarse esta probabilidad en el sentido frecuencial arriba indicado.

Naturalmente, si en lugar de tomar la media muestral genérica  $\bar{x}$ , tomamos un valor concreto  $\bar{x}_0$  de la misma, ya no tiene sentido decir que el intervalo

$$\bar{x}_0 \pm K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

tiene una probabilidad  $1 - \alpha$  de contener a  $m$ , toda vez que o la contiene o no la contiene. La interpretación frecuencial se impone.

En la idea de intervalo de confianza se basa el método de estimación por intervalo.

Este método consiste en determinar dos funciones de los valores muestrales

$$\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y

$$\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

tales que

$$P_r\{\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \theta \leq \theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = 1 - \alpha$$

es decir, en asociar a la muestra un intervalo aleatorio de tal forma constituido que la probabilidad de que contenga al verdadero valor del parámetro desconocido  $\theta$  sea

igual a  $1 - \alpha$ , debiendo interpretarse esta probabilidad en términos frecuenciales.

Para construir un intervalo de confianza tal como el definido puede seguirse el siguiente método general: sea  $x$  una variable aleatoria de función densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$ , siendo  $\theta$  un parámetro desconocido, y supongamos que sea posible formar un estadístico

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$$

que sea una función estrictamente monótona en  $\theta$  y cuya ley de probabilidad no dependa de  $\theta$ . Del conocimiento de la ley de probabilidad de  $\psi$  pueden determinarse dos valores  $\psi_1(\alpha)$  y  $\psi_2(\alpha)$  tales que (ver fig. 4.2)

$$Pr\{\psi_1(\alpha) \leq \psi \leq \psi_2(\alpha)\} = 1 - \alpha$$

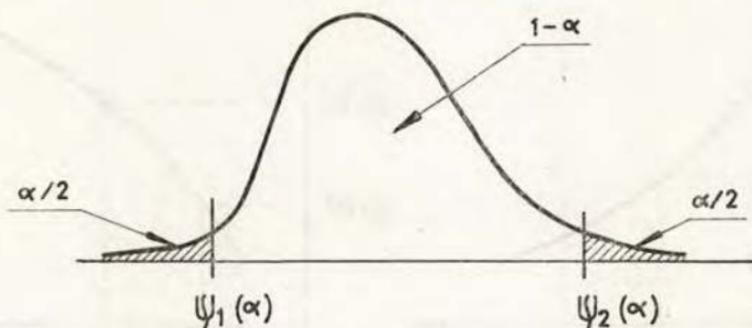


Fig. 4.2

Ahora bien, dado que  $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$  es una función monótona en  $\theta$ , será posible encontrar dos valores  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de  $\theta$  para los cuales

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1) = \psi_1(\alpha)$$

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_2) = \psi_2(\alpha)$$

Explicitando en estas ecuaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  resultará

$$\theta_1 = \theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)$$

$$\theta_2 = \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)$$

y dado que  $\psi$  es una función monótona, siempre que se verifique

$$\psi_1(\alpha) \leq \psi \leq \psi_2(\alpha)$$

se verificará

$$\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha) \leq \theta \leq \theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)$$

si  $\psi$  es una función monótona decreciente y

$$\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha) \leq \theta \leq \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)$$

si  $\psi$  es una función monótona creciente (ver fig. 4.3).

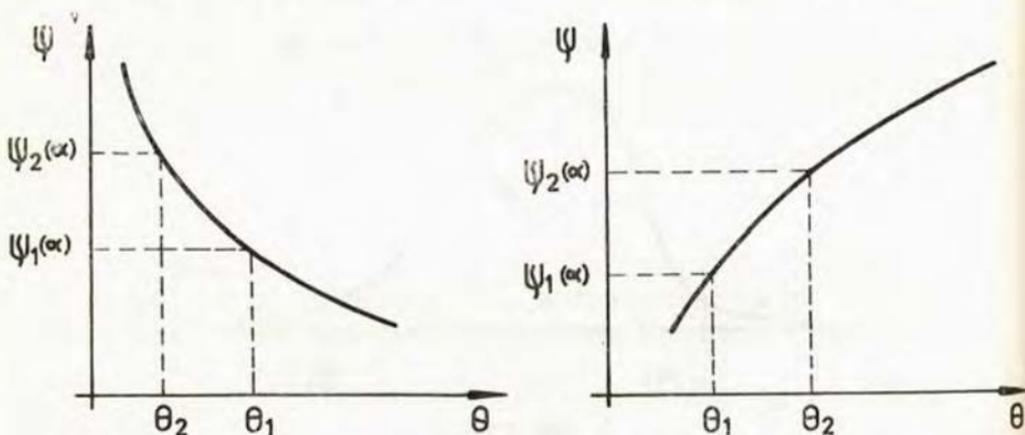


Fig. 4.3

Por consiguiente, puede escribirse inmediatamente que

$$P_r\{\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha) \leq \theta \leq \theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)\} = 1 - \alpha$$

o bien que

$$P_r\{\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha) \leq \theta \leq \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)\} = 1 - \alpha$$

que es el intervalo de confianza para  $\theta$  que intentábamos encontrar.

En los párrafos siguientes vamos a aplicar este método general a la obtención de algunos de los intervalos de confianza más importantes dentro del campo del razonamiento estadístico.

4.4.2 *Intervalo de confianza para la media de una distribución normal de desviación tipo conocida*

Si representamos por  $\bar{x}$  la media muestral, la variable aleatoria

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, m) = \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

es normal  $N(0, 1)$  y su distribución no depende del parámetro desconocido  $m$ .

En consecuencia podemos escribir

$$Pr\left\{-K_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq K_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

de la que se deduce inmediatamente

$$Pr\left\{\bar{x} - K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

que nos da el intervalo buscado.

4.4.3 *Intervalo de confianza para la media de una distribución normal de desviación tipo desconocida*

En este caso, la variable aleatoria

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, m) = \frac{\bar{x} - m}{S\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - m}{\sigma'/\sqrt{n-1}}$$

tiene una distribución  $t$  de Student con  $\nu = n - 1$  grados de libertad.

En consecuencia es posible escribir

$$Pr\left\{-t_{\alpha/2, n-1} \leq \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2, n-1}\right\} = 1 - \alpha$$

siendo  $t_{\alpha/2, n-1}$  la cuantila de orden  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la ley de Student de  $n - 1$  grados de libertad.

De la ecuación anterior se deduce que

$$Pr\left\{\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

que es el intervalo de confianza buscado.

El valor  $t_{\alpha/2, n-1}$  puede encontrarse en la tabla 5.

#### 4.4.4 *Intervalo de confianza aproximado para la media de una población cualquiera de desviación tipo conocida en el caso de muestras grandes*

En este caso, dado que en virtud del Teorema Límite Central la variable aleatoria

$$\frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

es asintóticamente normal  $N(0, 1)$ , cualquiera que sea la distribución de la variable aleatoria  $x$ , podemos escribir

$$Pr\left\{\bar{x} - K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \approx 1 - \alpha$$

que nos da el intervalo de confianza buscado. Es de observar que se ha sustituido el signo de igualdad por el

signo de igualdad aproximada, dado que en rigor el signo de igualdad sólo es válido en el límite.

En la práctica, si  $n > 30$  y la distribución de la población madre no es muy asimétrica, el intervalo de confianza anterior puede ya considerarse como válido.

Si además la desviación tipo es desconocida, aún se puede continuar tomando el intervalo de confianza encontrado, pero  $n$  debe ser como mínimo 100.

#### 4.4.5 *Intervalos de confianza aproximados utilizando estadísticos asintóticamente normales*

Si el parámetro desconocido  $\theta$  tiene un estimador  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tal que la variable aleatoria

$$\frac{T - \theta}{\sqrt{\text{Var}[T]}}$$

es asintóticamente normal  $N(0, 1)$ , podemos escribir

$$P_r \left\{ -K_{\alpha/2} \leq \frac{T - \theta}{\sqrt{\text{Var}[T]}} \leq K_{\alpha/2} \right\} \approx 1 - \alpha$$

o lo que es lo mismo

$$P_r \left\{ T - K_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{\text{Var}[T]}} \leq \theta \leq T + K_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{\text{Var}[T]}} \right\} \approx 1 - \alpha$$

Si  $\text{Var}[T]$  es conocido, la última expresión nos da un intervalo de confianza aproximado para  $\theta$ .

#### 4.4.6 *Intervalo de confianza aproximado para un estimador de máxima verosimilitud*

Para muestras grandes puede aceptarse que el estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  del parámetro desconocido  $\theta$  es aproximadamente normal  $N(\theta, \sigma)$  siendo

$$\sigma^2 = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f\right)^2\right]}$$

En estas condiciones podemos escribir

$$\Pr\left\{-K_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma} \leq K_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha$$

de donde se deduce que

$$\Pr\{\hat{\theta} - K_{\alpha/2}\sigma \leq \theta \leq \hat{\theta} + K_{\alpha/2}\sigma\} \approx 1 - \alpha$$

que es un intervalo de confianza aproximado para  $\theta$ .

#### 4.4.7 Intervalo de confianza para la variancia y la desviación tipo de una distribución normal

En el párrafo 3.2 vimos que la variable aleatoria

$$(n - 1) \frac{S^2}{\sigma^2}$$

sigue una ley de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad. Podemos escribir en consecuencia

$$\Pr\left\{\chi_{1-(\alpha/2), n-1}^2 \leq (n - 1) \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2, n-1}^2\right\} = 1 - \alpha$$

siendo  $\chi_{1-(\alpha/2), n-1}^2$  y  $\chi_{\alpha/2, n-1}^2$  las cuantilas de orden  $\frac{\alpha}{2}$  y  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la ley de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad (ver fig. 4.4).

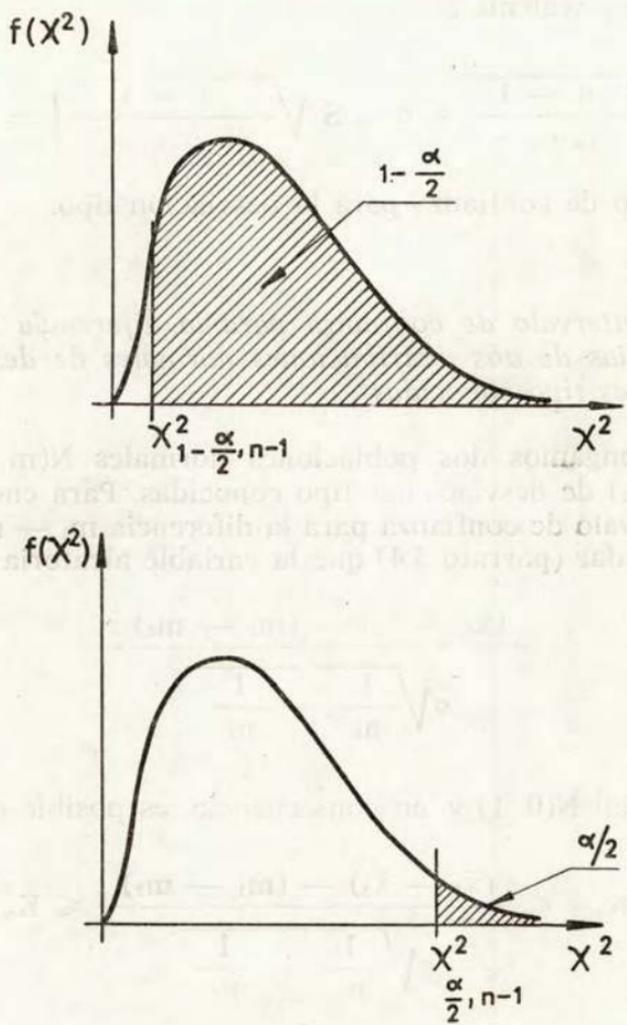


Fig. 4.4

Por consiguiente, el intervalo de confianza para la variancia será

$$Pr\left\{S^2 \frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}} \leq \sigma^2 \leq S^2 \frac{n-1}{\chi^2_{1-(\alpha/2), n-1}}\right\} = 1 - \alpha$$

que es equivalente a

$$\text{Pr} \left\{ S \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{\alpha/2}^2, n-1}} \leq \sigma \leq S \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-(\alpha/2), n-1}^2}} \right\} = 1 - \alpha$$

intervalo de confianza para la desviación tipo.

#### 4.4.8 Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos distribuciones normales de desviaciones tipo conocidas

Supongamos dos poblaciones normales  $N(m_1, \sigma_1)$  y  $N(m_2, \sigma_2)$  de desviaciones tipo conocidas. Para encontrar el intervalo de confianza para la diferencia  $m_1 - m_2$  basta recordar (párrafo 3.4) que la variable aleatoria

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

es normal  $N(0, 1)$  y, en consecuencia, es posible escribir

$$\begin{aligned} \text{Pr} \left\{ -K_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq K_{\alpha/2} \right\} = \\ = 1 - \alpha \end{aligned}$$

de donde

$$\text{Pr} \left\{ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - K_{\alpha/2} \frac{1}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq m_1 - m_2 \leq \right.$$

$$\leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + K_{\alpha/2} \left. \frac{1}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right\} = 1 - \alpha$$

que es el intervalo de confianza buscado.

#### 4.4.9 Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos distribuciones normales de desviaciones tipo desconocidas pero iguales

En este caso basta tener en cuenta (ver párrafo 3.4) que la variable aleatoria

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

sigue una ley de Student de  $\nu = n_1 + n_2 - 2$  grados de libertad. En consecuencia, es posible escribir

$$\left\{ -t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \leq \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \leq t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \right\} = 1 - \alpha$$

donde  $t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$  es la cuantila de orden  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la ley de Student de  $n_1 + n_2 - 2$  grados de libertad.

De la expresión anterior se deduce inmediatamente el intervalo de confianza para la diferencia de medias que escribiremos en la forma

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

#### 4.4.10 Intervalo de confianza para relación de las variancias y desviaciones tipo de dos distribuciones normales

En este caso basta tener en cuenta (ver párrafo 3.6) que la variable aleatoria

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

sigue una ley F de Snedecor de  $n_1 - 1$  y  $n_2 - 1$  grados de libertad. En consecuencia, es posible escribir

$$P_r \left\{ F_{1-(\alpha/2); n_1-1, n_2-1} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq F_{\alpha/2; n_1-1, n_2-1} \right\} = 1 - \alpha$$

donde

$$F_{1-(\alpha/2); n_1-1, n_2-1}$$

y

$$F_{\alpha/2; n_1-1, n_2-1}$$

son las cuantilas de orden  $\alpha/2$  y  $1 - \alpha/2$  de la ley F de Snedecor de  $n_1 - 1$  y  $n_2 - 1$  grados de libertad.

De la expresión anterior se deducen inmediatamente los intervalos de confianza para el cociente de variancias y desviaciones tipo, que escribiremos en la forma

$$P_r \left\{ \frac{S_2^2}{S_1^2} F_{1-(\alpha/2); n_1-1, n_2-1} \leq \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{S_2^2}{S_1^2} F_{\alpha/2; n_1-1, n_2-1} \right\} = 1 - \alpha$$

$$P_r \left\{ \frac{S_2}{S_1} \sqrt{F_{1-(\alpha/2); n_1-1, n_2-1}} \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \leq \frac{S_2}{S_1} \sqrt{F_{\alpha/2; n_1-1, n_2-1}} \right\} = 1 - \alpha$$

Para calcular

$$F_{1-(\alpha/2); n_1-1, n_2-1}$$

basta tener en cuenta la relación

$$F_{1-(\alpha/2); n_1-1, n_2-1} = \frac{1}{F_{\alpha/2; n_1-1, n_2-1}}$$

transformación necesaria porque las tablas dan en general las F para valores pequeños de  $\alpha$ .

#### 4.4.11 Relación entre estimación puntual y estimación por intervalo

Los ejemplos desarrollados en los párrafos anteriores muestran que, en último término, la determinación de un intervalo de confianza se reduce a la formación de un intervalo aleatorio en torno a una estimación puntual, es decir, a la formación de un intervalo de confianza de un estimador. Existe, pues, una íntima relación entre las técnicas de estimación puntual y estimación por intervalo.

El intervalo de confianza es un atributo inseparable del estimador puntual y da una idea de su aptitud. Un intervalo muy amplio implica poca precisión en la esti-

mación; por el contrario, un intervalo estrecho implica gran precisión.

La consideración del intervalo de confianza de un estimador permite plantear el problema de la estimación de un determinado parámetro desconocido, fijando *a priori* el máximo error tolerado y el nivel de significación.

Para centrar ideas supongamos que se trata de estimar el valor de la media de una distribución normal  $N(m, \sigma)$  de desviación tipo conocida. ¿Qué tamaño de muestra deberá ser extraído para tener una casi seguridad  $1 - \alpha$  de que el error cometido en la estimación no será superior en ningún caso al  $\pm \varepsilon \%$ ?

La consideración del intervalo de confianza de la media muestral  $\bar{x}$  permite la inmediata solución del problema. En efecto, dicho intervalo es

$$\bar{x} \pm K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y la especificación de que el error máximo admisible en  $\pm \varepsilon \%$  implica que

$$K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\varepsilon}{100} \bar{x}$$

de donde

$$n = \left[ \frac{100 K_{\alpha/2} \sigma}{\varepsilon \bar{x}} \right]^2$$

que permite calcular el tamaño de muestra necesario para efectuar la estimación de  $n$  en las condiciones del enunciado.

Ahora bien, la media muestral  $\bar{x}$  es desconocida *a priori*, por lo que nos encontramos ante una ecuación que debe ser resuelta por un proceso de aproximaciones sucesivas. Habrá que empezar por extraer una muestra piloto de  $n_0$  elementos para tener una primera estimación  $\bar{x}_0$  de la media poblacional. Llevando este valor a la ecua-

ción, se podrá efectuar una primera estimación del tamaño de muestra  $n$ . Si  $n \leq n_0$  el problema está resuelto, y la estimación  $\bar{x}$  garantiza con una casi seguridad  $1 - \alpha$  un error máximo del  $\pm \epsilon \%$ . Si  $n > n_0$  el proceso de nuevas extracciones y nuevos cálculos de  $n$  debe proseguirse hasta conseguir que el valor utilizado para el cálculo de la media muestral sea igual o menor que el obtenido al sustituir dicha media muestral en la ecuación de  $n$ .

Esta técnica, descrita para un caso muy simple, es de aplicación muy general y de indudable utilidad práctica.

## 4.5 LIMITES DE TOLERANCIA

### 4.5.1 Introducción

Cuando la ley de probabilidad de una variable aleatoria,  $x$ , es perfectamente conocida, es posible determinar dos límites  $T_1$  y  $T_2$ , llamados límites de tolerancia natural o simplemente límites de tolerancia, tales que

$$P_r\{T_1 \leq x \leq T_2\} = 1 - \alpha$$

Por ejemplo, en el caso de una distribución normal  $N(m, \sigma)$  de media y desviación tipo perfectamente conocidas, tales límites serán (ver fig. 4.5)

$$T_1 = m - K_{\alpha/2}\sigma$$

$$T_2 = m + K_{\alpha/2}\sigma$$

siendo  $K_{\alpha/2}$  la cuantila de orden  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la ley normal  $N(0, 1)$ .

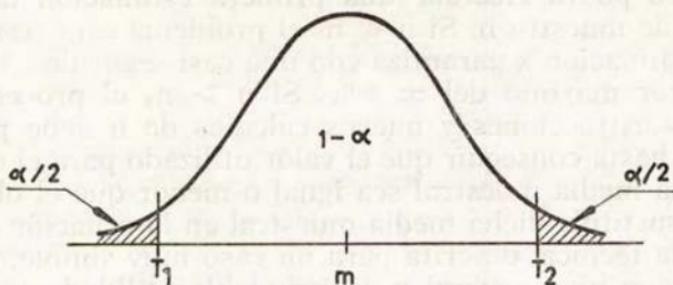


Fig. 4.5

Al intervalo  $(T_1, T_2)$  se le denomina intervalo de tolerancia con especificación bilateral.

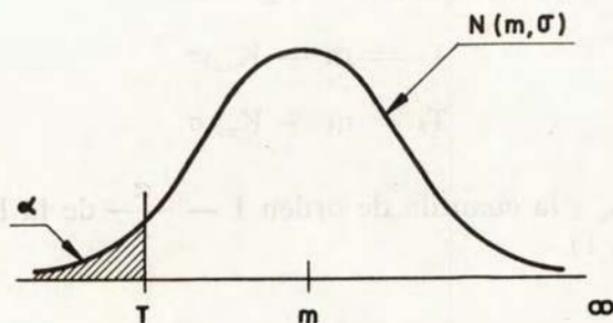
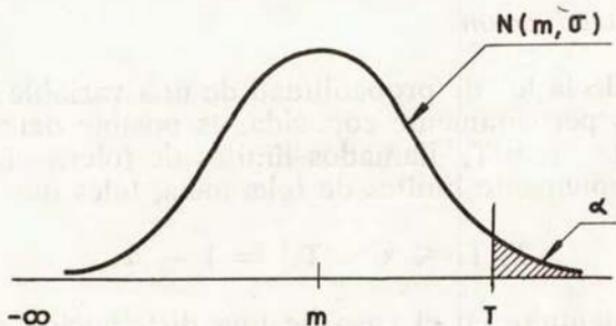


Fig. 4.6

A los intervalos de tolerancia de la forma  $(-\infty, T)$  ó  $(T, \infty)$ , definidos de forma que el límite  $T$  cumpla, respectivamente, con las condiciones (ver fig. 4.6)

$$\Pr\{x \leq T\} = 1 - \alpha$$

o bien

$$\Pr\{T \leq x\} = 1 - \alpha$$

se les denomina intervalos de tolerancia con especificación unilateral.

En el caso de una distribución normal  $N(m, \sigma)$  dichos intervalos se escriben en la forma:

— Especificación unilateral superior

$$(-\infty, m + K_\alpha \sigma)$$

— Especificación unilateral inferior

$$(m - K_\alpha \sigma, \infty)$$

siendo  $K_\alpha$  la cuantila de orden  $1 - \alpha$  de la ley normal  $N(0, 1)$ .

#### 4.5.2 *Intervalos de tolerancia con especificación unilateral para el caso de una distribución normal $N(m, \sigma)$ de media y desviación tipo desconocidas*

En la práctica, lo más frecuente es que ni la media ni la desviación tipo de la distribución normal sean conocidas y, en consecuencia, haya que proceder a su estimación.

En este caso se adopta como límite de tolerancia con especificación unilateral superior el estadístico

$$\bar{x} + KS$$

siendo  $K$  un parámetro que debe determinarse con la condición de que la probabilidad de que al menos una proporción  $P$  de la población quede por debajo de  $\bar{x} + KS$  sea igual a un valor  $\gamma$  especificado. Es decir, ha de ser

$$P_r\{\phi(\bar{x} + KS) \geq P\} = \gamma$$

o lo que es lo mismo

$$P_r\left\{\int_{-\infty}^{(\bar{x}+KS-m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \geq P\right\} = \gamma$$

En el párrafo 3.5 expusimos un método de determinación de  $K$  basado en consideraciones relativas a la ley de  $t$  no centrada.

Como límite de tolerancia con especificación unilateral inferior se adopta el estadístico

$$\bar{x} - KS$$

siendo  $K$  el mismo parámetro utilizado en el caso anterior. En efecto, la condición

$$P_r\{\phi(\bar{x} + KS) \geq P\} = \gamma$$

puede escribirse en este caso en la forma

$$P_r\{\bar{x} - KS \leq T\} = \gamma$$

siendo  $T$  un límite desconocido por encima del cual queda justamente una proporción  $P$  de la población (ver fig. 4.7).

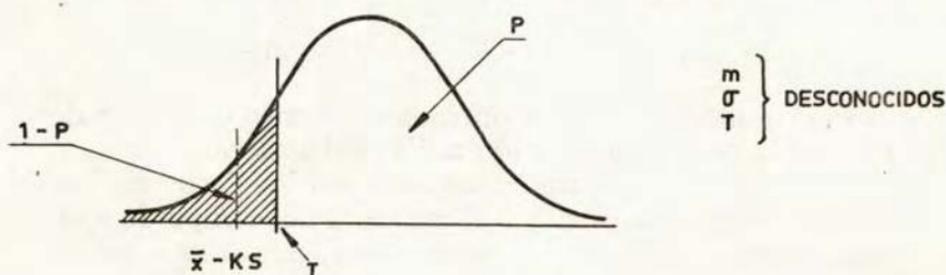


Fig. 4.7

Teniendo en cuenta que

$$\frac{T - m}{\sigma} = K_P$$

no es otra cosa que la cuantila de orden  $1 - P$  de la ley normal  $N(0, 1)$  podemos escribir la siguiente serie de relaciones evidentes:

$$Pr\left\{\frac{\bar{x} - KS - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{T - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \gamma$$

$$Pr\left\{\frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} - \frac{KS}{\sigma} \sqrt{n} \leq K_P \sqrt{n}\right\} = \gamma$$

$$Pr\left\{\frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} - K_P \sqrt{n} \leq \frac{KS}{\sigma} \sqrt{n}\right\} = \gamma$$

$$Pr\left\{\frac{\bar{x} - m}{S/\sigma} \sqrt{n} - K_P \sqrt{n} \leq K \sqrt{n}\right\} = \gamma$$

$$Pr\{t^* \leq K \sqrt{n} \mid \delta = -K_P \sqrt{n}, f = n - 1\} = \gamma$$

y dado que  $K_P = -K_{1-P}$ , resulta

$$P_r\{t^* \leq K\sqrt{n} \mid \delta = -K_{1-P}\sqrt{n}, f = n - 1\} = \gamma$$

expresión idéntica a la encontrada en el caso del límite de tolerancia con especificación unilateral superior.

Dado que la determinación de  $K$  en los casos en que alguno de los valores  $n$ ,  $\gamma$  ó  $P$  cae fuera del campo de aplicación de la Tabla 6 o de otras tablas, tales como las de Owen, es sumamente laboriosa, se han propuesto distintos métodos aproximados de cálculo. El más sencillo es debido a Jennett y Welch, que proponen para  $K$  la siguiente expresión aproximada

$$K \approx \frac{K_{1-P} + \sqrt{K_{1-P}^2 - LM}}{L}$$

siendo

$$L = 1 - \frac{K_{1-\gamma}^2}{2(n-1)}$$

y

$$M = K_{1-P}^2 - \frac{K_{1-\gamma}^2}{n}$$

La aproximación de Jennett y Welch consiste en suponer para todo  $n$  y  $f (= n - 1)$  que el parámetro  $\lambda$  de la función de distribución de la ley de  $t$  no centrada es aproximadamente igual a  $K_{1-\gamma}$ , cuantila de orden  $\gamma$  de la ley normal  $N(0, 1)$ .

Es interesante estudiar los valores límites de  $K$  cuando alguno o los dos parámetros de la ley normal  $N(\bar{m}, \sigma)$  pasan a ser conocidos.

Si  $\sigma$  es conocida, puede escribirse la siguiente serie de relaciones evidentes:

$$P_r\{\bar{x} + K\sigma \geq T\} = \gamma$$

$$P_r \left\{ \frac{\bar{x} + K\sigma - m}{\sigma} \geq \frac{T - m}{\sigma} \right\} = \gamma$$

$$P_r \left\{ \frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \geq (K_{1-p} - K)\sqrt{n} \right\} = \gamma$$

Dado que la variable  $(\bar{x} - m)\sqrt{n}/\sigma$  es normal  $N(0, 1)$ , la última relación permite escribir

$$(K_{1-p} - K)\sqrt{n} = K_\gamma = -K_{1-\gamma}$$

de donde

$$K = K_{1-p} + \frac{K_{1-\gamma}}{\sqrt{n}}$$

Si  $\gamma = 0.5$        $K = K_{1-p}$

Si  $\gamma > 0.5$        $K > K_{1-p}$

Si  $\gamma < 0.5$        $K < K_{1-p}$

Si el parámetro conocido es  $m$ , pueden escribirse las siguientes relaciones

$$P_r \{m + KS \geq T\} = \gamma$$

$$P_r \left\{ \frac{m + KS - m}{\sigma} \geq \frac{T - m}{\sigma} \right\} = \gamma$$

$$P_r \left\{ K \frac{S}{\sigma} \geq K_{1-p} \right\} = \gamma$$

$$P_r \left\{ \frac{S}{\sigma} \geq \frac{K_{1-p}}{K} \right\} = \gamma$$

$$P_r \left\{ \sqrt{n-1} \frac{S}{\sigma} \geq \sqrt{n-1} \frac{K_{1-p}}{K} \right\} = \gamma$$

En consecuencia, si  $\chi_{\gamma, n-1}^2$  es la cuantila de orden  $1 - \gamma$  de la ley de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad, podemos escribir

$$\sqrt{\chi_{\gamma, n-1}^2} = \sqrt{n - 1} \cdot \frac{K_{1-P}}{K}$$

de donde

$$K = K_{1-P} \sqrt{\frac{n - 1}{\chi_{\gamma, n-1}^2}}$$

Finalmente, si  $m$  y  $\sigma$  son conocidas, es evidente que

$$K \equiv K_{1-P}$$

con una probabilidad  $\gamma$  del 100 %.

#### 4.5.3 *Intervalo de tolerancia con especificación bilateral para el caso de una distribución normal $N(m, \sigma)$ de media y desviación tipo desconocidas*

La determinación de los límites de tolerancia con especificación bilateral reviste especiales dificultades. Se trata en este caso de calcular dos límites

$$T_1 = \bar{x} - KS$$

$$T_2 = \bar{x} + KS$$

de forma que exista una probabilidad  $\gamma$  de que al menos una proporción  $P$  de la población esté comprendida dentro de dichos límites. Hay que determinar, pues, dos estadísticos  $T_1$  y  $T_2$  que cumplan con la condición

$$P_r\{\phi(T_2) - \phi(T_1) \geq P\} = \gamma$$

es decir

$$P_r \left\{ \int_{(\bar{x} - KS - m)/\sigma}^{(\bar{x} + KS - m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \geq P \right\} = \gamma$$

Wald y Wolfowitz han resuelto de forma aproximada esta ecuación dando para K el valor

$$K \approx r u$$

siendo r la raíz de la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(1/\sqrt{n}) - r}^{(1/\sqrt{n}) + r} \exp(-x^2/2) dx = P$$

y u una función de n y  $\gamma$  definida por la expresión

$$u = \sqrt{\frac{n - 1}{\chi_{\gamma, n-1}^2}}$$

siendo  $\chi_{\gamma, n-1}^2$  la cuantila de orden  $1 - \gamma$  de la ley de  $\chi^2$  con  $n - 1$  grados de libertad.

Eisenhart, Hastay y Wallis han tabulado los valores de K para tamaños de muestra comprendidos entre 2 y 50 y  $\gamma = 0.75, 0.90, 0.95$  y  $0.99$ <sup>4</sup>.

#### 4.5.4 Límites de tolerancia independientes de la naturaleza de la ley de probabilidad de la población

Cuando la función densidad de probabilidad,  $f(x)$ , de la población es desconocida es posible encontrar dos límites de tolerancia  $T_1$  y  $T_2$  tales que, cualquiera que sea

<sup>4</sup> Eisenhart, Hastay y Wallis, *Techniques of Statistical Analysis*, cap. 2.

$f(x)$ , la probabilidad de encontrar dentro de los mismos al menos una proporción  $P$  de la población sea igual a  $\gamma$ , es decir, dos límites que cumplan con la condición

$$Pr\{F(T_2) - F(T_1) \geq P\} = \gamma$$

o lo que es lo mismo

$$Pr\left\{\int_{T_1}^{T_2} f(x)dx \geq P\right\} = \gamma$$

Una solución muy ingeniosa dada a este problema, planteado inicialmente por Shewhart, ha sido dada por Wilks a base de considerar la distribución de la variable aleatoria «recubrimiento», es decir, el área comprendida entre los valores muestrales máximo y mínimo  $y_n$  e  $y_1$ , respectivamente (ver. fig. 4.8).

La variable aleatoria recubrimiento

$$v = F(y_n) - F(y_1)$$

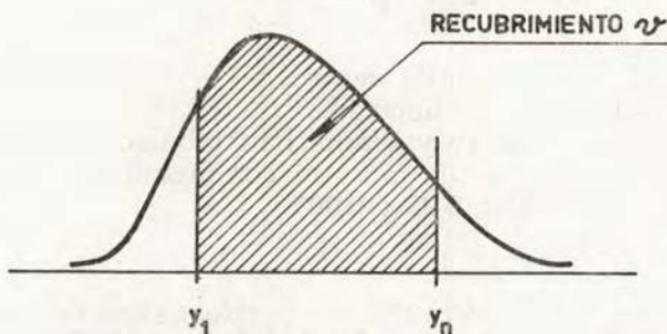


Fig. 4.8

tiene por función densidad de probabilidad <sup>5</sup>

$$f(v) = n(n-1)v^{n-2}(1-v)$$

<sup>5</sup> Sixto Ríos, *Métodos estadísticos*, tomo II, «Teoría de muestras», cap. 17.

independiente de la ley de probabilidad de la población.

Wilks toma como límite inferior  $T_1$  el valor muestral mínimo,  $y_1$ , y como límite superior  $T_2$  el valor muestral máximo,  $y_n$ . De esta forma el problema queda reducido a determinar el tamaño de muestra necesario para que se cumpla la relación

$$P_r\{v \geq P\} = \gamma$$

es decir

$$n(n-1) \int_P^1 v^{n-2}(1-v)dv = \gamma$$

expresión que integrada da

$$nP^{n-1} - (n-1)P^n = \gamma$$

Resolviendo esta ecuación se puede obtener el valor de  $n$  buscado.

Así pues, para todo conjunto de valores  $(n, P, \gamma)$  que cumplan con la condición anterior, será cierta la afirmación de que existe una probabilidad  $\gamma$  de encontrar al menos una proporción  $P$  de la población entre los valores muestrales máximo y mínimo.

Dados  $P$  y  $\gamma$ , el valor de  $n$  puede también determinarse en forma aproximada a partir de la expresión <sup>6</sup>

$$n \approx \left( \frac{1+P}{1-P} \right) \left( \frac{\chi_{1-\gamma, 4}^2}{4} \right) + \frac{1}{2}$$

Desde luego los límites  $(y_1, y_n)$  son bastante más amplios que los obtenidos cuando la ley de probabilidad se consideraba normal, y requieren un tamaño de muestra comparativamente mucho mayor para llegar a conclusiones válidas.

<sup>6</sup> Bowker y Lieberman, *Engineering Statistics*, cap. 8.

## CAPITULO 5

### *EL RAZONAMIENTO ESTADISTICO*

#### 5.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior hemos descrito con cierto detalle la teoría de la estimación de los parámetros desconocidos de una ley de probabilidad.

En la práctica los problemas no siempre se plantean en términos de estimación. Dada por ejemplo una variable aleatoria  $X$  de función densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$ , siendo  $\theta$  un parámetro desconocido, no siempre interesa estimar su valor con un grado de precisión y un nivel de confianza preestablecidos. En muchos casos es suficiente comprobar, con un nivel de seguridad aceptable,

— si el parámetro desconocido  $\theta$  es o no igual a un cierto valor  $\theta_0$ ;

— si el parámetro desconocido  $\theta$  es igual o mayor que un cierto valor  $\theta_0$ ;

— si el parámetro desconocido  $\theta$  es igual o menor que un cierto valor  $\theta_0$ ;

es decir, ya no se trata de buscar el verdadero valor de  $\theta$  sino comprobar que cumple con unas especificaciones determinadas.

En estos casos se sigue un método de razonamiento estadístico que, en líneas generales, consiste en:

— suponer, primero, que el parámetro desconocido

$\theta$  cumple con la especificación deseada, es decir, aceptar *a priori* una hipótesis de partida relativa a  $\theta$ ;

— elaborar después una regla matemática adecuada (prueba) que permita, a la vista de la información procedente de un plan de experiencias, decidir sobre la legitimidad o ilegitimidad de la hipótesis formulada, con unos riesgos de error prefijados;

— finalmente, aplicar dicha regla matemática a los resultados procedentes de la experimentación (muestra de  $n$  observaciones aleatorias de la variable  $X$ ).

Antes de entrar de lleno en la teoría general de la prueba de hipótesis vamos a analizar, a manera de introducción, un caso concreto. Este análisis previo permitirá adquirir una idea muy precisa de lo que es y puede esperarse de una prueba y pondrá de manifiesto el alcance y limitaciones de esa poderosa herramienta de decisión que es el razonamiento estadístico.

Supongamos que se trata de comprobar, mediante la información procedente de una muestra aleatoria de extensión  $n$ , si la media de una cierta distribución normal  $N(m, \sigma)$  de desviación tipo conocida es igual o menor que un valor  $m_0$  dado.

Utilizando la terminología de la teoría de la prueba de hipótesis, se trata de probar la hipótesis  $H_0$ :

— la media de la distribución es igual o menor que  $m_0$  ( $m \leq m_0$ ),

contra la hipótesis  $H_1$ :

— la media de la distribución es mayor que  $m_0$  ( $m > m_0$ ).

En este caso podemos seguir la siguiente línea de razonamiento. Aceptemos que la media de la distribución es realmente igual a  $m_0$ ; en estas condiciones, la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $x$  (media muestral) será normal  $N(m_0, \sigma/\sqrt{n})$  y resultará posible definir un límite  $m_L$  tal que la probabilidad de que un valor medio muestral concreto caiga por encima de él sea igual a  $\alpha$ , es decir, un límite que cumpla con la condición (ver fig. 5.1)

$$Pr\{\bar{x} \geq m_L\} = \alpha$$

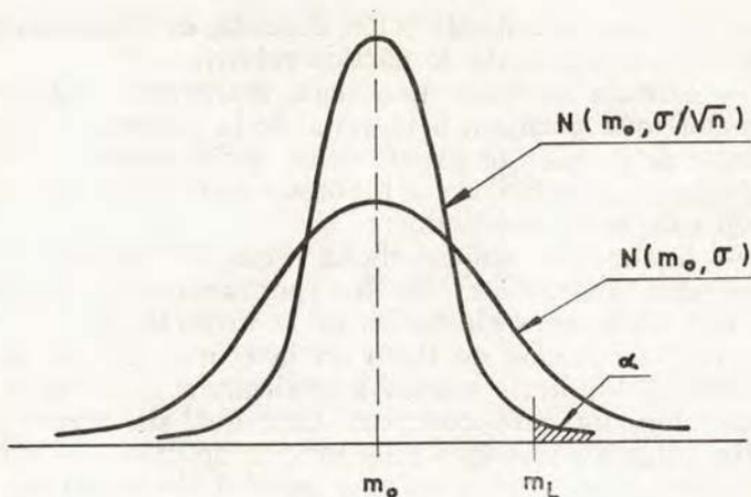


Fig. 5.1

Definido el límite  $m_L$ , si la hipótesis  $H_0$  es correcta, es decir, si la media de la distribución es realmente igual o menor que  $m_0$ , la probabilidad de que una media muestral  $\bar{x}$  caiga más allá de dicho límite será, a lo sumo, igual a  $\alpha$ . Por el contrario, si la media es superior a  $m_0$ , dicha probabilidad será superior a  $\alpha$ .

Hechas estas consideraciones, supongamos que se extrae una muestra aleatoria simple  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de extensión  $n$  y se determina su correspondiente valor medio

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Si  $\bar{x}$  resulta ser superior a  $m_L$  nos hallaremos ante las dos alternativas siguientes:

— la hipótesis  $H_0$  es correcta y ha ocurrido un fenómeno que *a priori* tenía una probabilidad pequeña de producirse (igual o inferior a  $\alpha$ );

— la hipótesis  $H_0$  es incorrecta.

Si por el contrario  $\bar{x}$  resulta ser igual o inferior a  $m_L$ , también nos hallaremos ante dos alternativas:

— la hipótesis  $H_0$  es correcta y ha ocurrido un fenómeno que *a priori* tenía una gran probabilidad de producirse (igual o superior a  $1 - \alpha$ );

— la hipótesis  $H_0$  es incorrecta.

En el caso  $\bar{x} > m_L$ , lo más razonable será optar por la segunda alternativa, toda vez que dentro del marco de la hipótesis  $H_0$  el resultado experimental obtenido tiene, *a priori*, una probabilidad muy pequeña de producirse.

En el caso  $\bar{x} \leq m_L$ , por el contrario, lo más lógico será optar por la primera alternativa.

Podemos, pues, adoptar la siguiente regla de decisión o estrategia (ver fig. 5.2):

— tomar un valor de  $\alpha$  suficientemente pequeño y definir el límite  $m_L$ ;

— extraer una muestra aleatoria simple de  $n$  elementos;

— determinar la media muestral correspondiente;

— aceptar la hipótesis  $H_0$  si  $\bar{x} \leq m_L$ ;

— rechazar la hipótesis  $H_0$  en caso contrario.

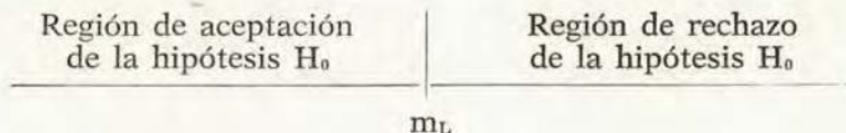


Fig. 5.2

Pasemos a analizar con detenimiento los riesgos de equivocación en que podemos incurrir al adoptar esta modalidad de acción.

Desde luego si la hipótesis  $H_0$  es realmente correcta y el valor muestral  $\bar{x}$  cae más allá del límite  $m_L$ , rechazaremos indebidamente  $H_0$  y, en consecuencia, incurriremos en error. La probabilidad de que esto ocurra es como máximo igual a  $\alpha$ . En consecuencia,  $\alpha$  será la cota superior de error al tomar la decisión de rechazar  $H_0$ .

Por el contrario, si la hipótesis  $H_0$  es realmente falsa y el valor muestral  $\bar{x}$  cae por debajo del límite  $m_L$ , aceptaremos indebidamente  $H_0$  y también incurriremos en

error. Ahora bien, a diferencia de lo que ocurría cuando se tomaba la decisión de rechazar  $H_0$ , no es posible en este caso conocer, en el momento de tomar la decisión de aceptar  $H_0$ , el riesgo que se corre de errar. En efecto, para conocer el riesgo en que se incurre al adoptar una decisión es indispensable conocer la probabilidad de la decisión alternativa. En este caso la decisión alternativa sería rechazar  $H_0$  y aceptar  $H_1$ , es decir, aceptar que  $m > m_0$  y, evidentemente, desconocemos por completo cuánto vale su probabilidad.

Ahora bien, aunque desconocido, es evidente que este último riesgo es función del valor real de  $m$ . En efecto, si la media verdadera fuese  $m$ , en virtud de la regla matemática de decisión adoptada, la probabilidad de llegar, erróneamente, a la conclusión de que la hipótesis  $H_0$  es correcta sería (ver fig 5.3):

$$\begin{aligned} \beta(m) &= \Pr\{\text{Aceptar } H_0 \mid m = m\} = \Pr\{\bar{x} \leq m_L \mid m = m\} = \\ &= \phi\left(K_{1-\beta} = \frac{m_L - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

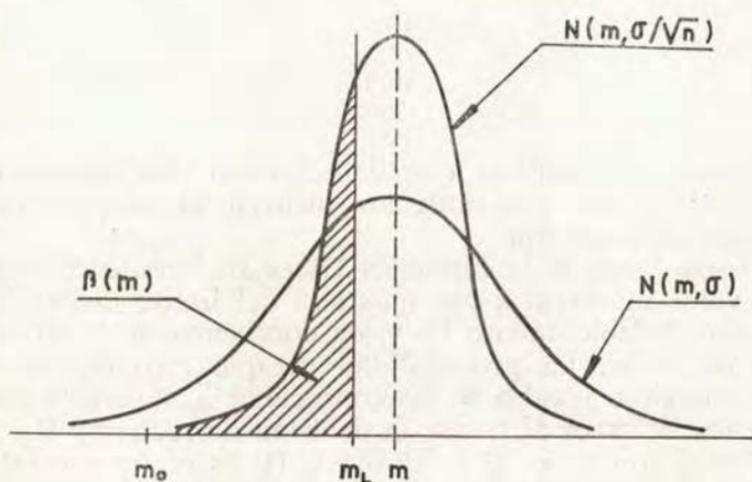


Fig. 5.3

siendo  $\phi(K_{1-\beta})$  el valor de la función de distribución de la ley normal  $N(0, 1)$  correspondiente a

$$K_{1-\beta} = \frac{m_L - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Así pues, el riesgo de error  $\beta(m)$  en que se incurre al adoptar la decisión de aceptar la hipótesis  $H_0$  es perfectamente calculable en función del verdadero valor  $m$ , desconocido pero que vale lo que vale.

Si representamos en un sistema de ejes coordenados la función  $\beta(m)$ , obtendremos una curva (ver fig. 5.4) que nos pondrá claramente de manifiesto lo que puede esperarse de la puesta en práctica de la regla de decisión adoptada. En efecto, si la media de la distribución sometida a

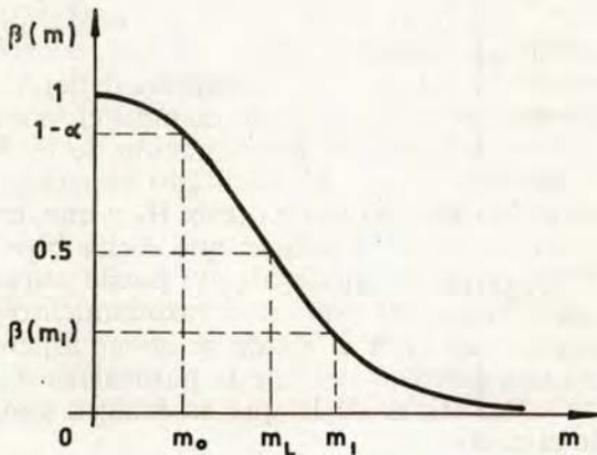


Fig. 5.4

prueba es en realidad  $m_1$ , existirá una probabilidad

$$\beta(m_1) = \phi\left(\frac{m_L - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad (m_1 > m_L)$$

de aceptar como buena la hipótesis  $H_0$  y una probabilidad  $1 - \beta(m_1)$  de rechazarla. Expresándonos en términos de frecuencia, esto quiere decir que, si sometiésemos un total de  $N$  poblaciones normales de medias desconocidas pero de valor real  $m_1$  común a todas ellas a la prueba descrita, en promedio resultaría que  $N\beta(m_1)$  poblaciones serían calificadas como de media igual o inferior a  $m_0$  y  $N[1 - \beta(m_1)]$  poblaciones serían calificadas como de media superior a  $m_0$ .

La función  $\beta(m)$  es, pues, una medida de la eficacia de la prueba, es decir, de su aptitud para conducir a decisiones correctas con un grado de certidumbre adecuado. A la representación gráfica de la función  $\beta(m)$  se le da el nombre de curva de eficacia de la prueba.

Del análisis de este caso concreto cabe destacar el hecho de que una prueba estadística (test en la literatura anglosajona), tal como ha sido planteada en este párrafo, tiene siempre un carácter negativo. En efecto, cuando el valor muestral cae fuera de la región de aceptación de  $H_0$ , dicha hipótesis es rechazada, toda vez que, dentro de las condiciones de la misma, la probabilidad del resultado obtenido es pequeña. Ahora bien, cuando el valor muestral cae dentro de la región de aceptación de  $H_0$  lo único que puede decirse es que el resultado experimental no está en contradicción con la hipótesis  $H_0$  y que, en consecuencia, nada se opone a pensar que dicha hipótesis es legítima. Pero lo que en modo alguno puede afirmarse es que realmente lo sea. El «SI» en el razonamiento estadístico queda sustituido por el «nada se opone a pensar que SI». Esto es una consecuencia de la naturaleza misma de las pruebas estadísticas de la que es imagen geométrica la curva de eficacia.

## 5.2 TEORIA GENERAL DE LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS

### 5.2.1 Definiciones previas

$X$ : variable aleatoria de función densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$ , siendo  $\theta$  un parámetro desconocido.

$\Theta = \{\theta\}$ : conjunto de valores posibles del parámetro  $\theta$ .

$M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ : muestra aleatoria de  $n$  elementos.

$R^n$ : espacio de  $n$  dimensiones. Toda muestra  $M$  tiene por representación geométrica un punto en el espacio  $n$ -dimensional  $R^n$ .

$H_0$  y  $H_1$ : hipótesis relativas al posible valor o valores del parámetro  $\theta$ . Son subconjuntos disjuntos del conjunto  $\Theta$ .

Una hipótesis  $H_i (i \in \{0, 1\})$  se denomina simple si está constituida por un solo elemento  $\theta \in \Theta$  y múltiple o compuesta en caso contrario (ver fig. 5.5.).

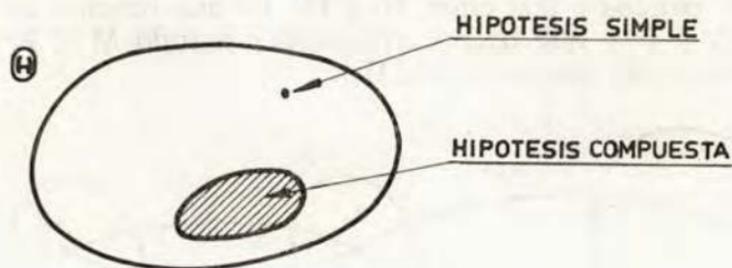


Fig. 5.5

$D = \{d_0, d_1\}$ : conjunto de decisiones posibles;  $d_i$  es la decisión de aceptar la hipótesis  $H_i$ . El conjunto  $D$  está en correspondencia biyectiva con el conjunto  $\{H_0, H_1\}$ .

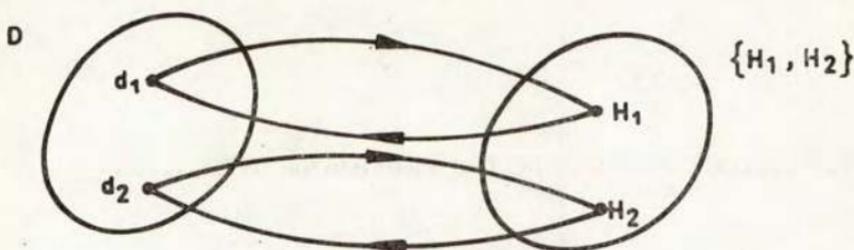


Fig. 5.6

$\Phi = \{\varphi\}$ : conjunto de funciones de decisión. Una función de decisión  $\varphi$  asocia a todo  $M \in R^n$  una decisión  $d_i \in D$ .

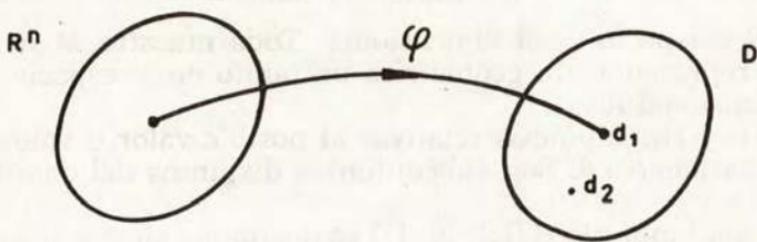


Fig. 5.7

$T$ : prueba o test entre  $H_0$  y  $H_1$ . Es una función de decisión  $\varphi \in \Phi$  que hace corresponder a todo  $M \in R^n$  un elemento del conjunto  $\{H_0, H_1\}$ .

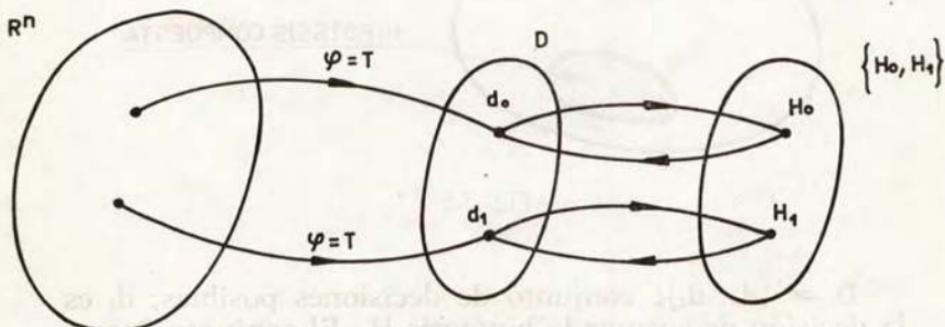


Fig. 5.8

A: región de aceptación de la hipótesis  $H_0$ . Es un subconjunto de  $R^n$  definido a partir de la relación funcional

$$\varphi^{-1}(H_0) \equiv T^{-1}(H_0)$$

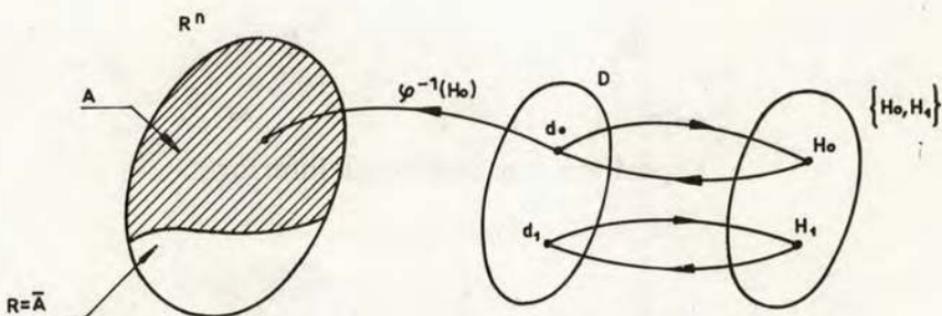


Fig. 5.9

Cuando el espacio  $n$ -dimensional  $R^n$  se reduce a un espacio monodimensional, merced a la utilización de una función de decisión adecuada, la región de aceptación se reduce a un intervalo cerrado o a un intervalo infinito cerrado a la derecha o a la izquierda.

Cuando  $A$  es un intervalo cerrado, se dice que existe una especificación bilateral (ver fig. 5.10).

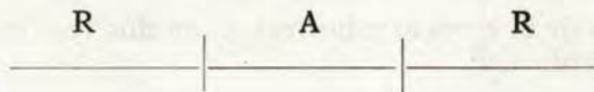


Fig. 5.10

Cuando  $A$  es un intervalo infinito cerrado a la derecha o a la izquierda, se dice que existe una especificación unilateral superior o inferior respectivamente (ver fig. 5.11).

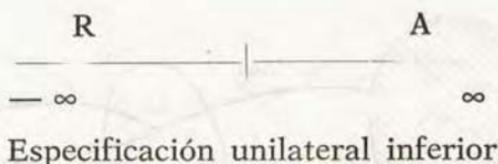
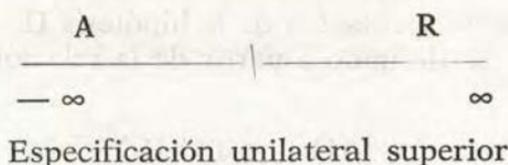


Fig. 5.11

$R = A$ : región de rechazo de la hipótesis  $H_0$ , o lo que es lo mismo, región de aceptación de la hipótesis  $H_1$ . Es el subconjunto complementario de  $A$ .

### 5.2.2. Planteamiento general del problema

Sea una variable aleatoria  $X$  de función densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$ , siendo  $\theta$  un parámetro desconocido. Se trata de someter a prueba la hipótesis  $H_0$  contra la hipótesis  $H_1$ .

La prueba o test,  $T$ , consistirá en:

- partir el espacio muestral  $R^n$  en dos regiones  $A$  y  $R$  complementarias;
- obtener una muestra aleatoria  $M$  de  $n$  elementos;
- si  $M \in A$ , tomar la decisión  $d_0$ , es decir, concluir que  $\theta \in H_0$  y, en consecuencia, aceptar la hipótesis  $H_0$ ;
- si  $M \in R$ , tomar la decisión  $d_1$ , es decir, concluir que  $\theta \in H_1$  y, en consecuencia, rechazar la hipótesis  $H_0$ .

Esta regla matemática de decisión puede dar lugar a dos tipos de errores antagónicos,  $\alpha$  y  $\beta$ , según puede verse en el cuadro adjunto.

		Decisión tomada	
		$d_0$	$d_1$
Hipótesis verdadera	$H_0$	Ningún error	$\alpha$
	$H_1$	$\beta$	Ningún error

El error  $\alpha$  o error de primera especie se produce al rechazar la hipótesis  $H_0$  siendo realmente verdadera. Dicho error viene medido por la probabilidad

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) &= P_r\{\text{Rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadera}\} = \\ &= P_r\{M \in R \mid \theta \in H_0\} \end{aligned}$$

El error  $\beta$  o error de segunda especie se produce al aceptar la hipótesis  $H_0$  siendo realmente falsa. Dicho error viene medido por la probabilidad

$$\begin{aligned} \beta(\theta) &= P_r\{\text{Aceptar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\} = \\ &= P_r\{M \in A \mid \theta \in H_1\} \end{aligned}$$

La determinación del valor de estas probabilidades no presenta, en teoría, ninguna dificultad. En efecto, la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es, según sabemos, la función verosimilitud

$$L(M) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

En estas condiciones, si  $H_0$  es verdadera

$$L(M, \theta \in H_0) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta \in H_0)$$

Por el contrario, si la hipótesis verdadera es  $H_1$

$$L(M, \theta \in H_1) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta \in H_1)$$

Así, las probabilidades  $\alpha(\theta)$  y  $\beta(\theta)$  podrán calcularse a partir de las expresiones

$$\alpha(\theta) = \int_R L(M, \theta \in H_0) dM = \int_R \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta \in H_0) dx_1 \dots dx_n$$

$$\beta(\theta) = \int_A L(M, \theta \in H_1) dM = \int_A \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta \in H_1) dx_1 \dots dx_n$$

Sea cierta o falsa, la hipótesis  $H_0$  tiene una cierta probabilidad de ser aceptada como buena, de valor

$$P(\theta) = P_r\{M \in A \mid \theta \in \Theta\} = \int_A \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta \in \Theta) dx_1 \dots dx_n$$

A la función  $P(\theta)$  se le denomina función característica o función de eficacia de la prueba  $T$ .

La función

$$1 - P(\theta) = P_r\{M \in R \mid \theta \in \Theta\}$$

recibe el nombre de potencia de la prueba  $T$ .

### 5.2.3 Propiedades de una prueba

a) Sea  $T$  una prueba de la hipótesis  $H_0$  contra la hipótesis  $H_1$ ,  $A$  la correspondiente región de aceptación de  $H_0$ , y  $\alpha(\theta)$  y  $\beta(\theta)$  los riesgos de error de primera y segunda especie. Si se cumple que

$$\alpha(\theta) \leq \alpha \quad \forall \theta \in H_0$$

se dice que  $A$  es una región de umbral  $\alpha$  para  $H_0$  y se la designa mediante el símbolo  $A_\alpha$ . A  $\alpha$  se le da el nombre de nivel de significación y se dice que la prueba  $T$  es de umbral  $\alpha$ .

b) Se dice que una prueba  $T$  de la hipótesis  $H_0$  contra la hipótesis  $H_1$  es centrada (o sin sesgo) si se cumple que

$$\alpha(\theta) \leq \alpha \quad \forall \theta \in H_0$$

y

$$1 - \beta(\theta) > \alpha \quad \forall \theta \in H_1$$

Esto significa que, si la probabilidad de rechazar equivocadamente la hipótesis  $H_0$  tiene por cota máxima el nivel de significación  $\alpha$ , la de rechazarla debidamente tiene por cota mínima  $\alpha$ .

c) Se dice que una serie de pruebas  $T_n$  de la hipótesis  $H_0$  contra la hipótesis  $H_1$  es convergente si se cumple que

$$\alpha_{n+1}(\theta) \leq \alpha_n(\theta)$$

y

$$\beta_n(\theta) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty \quad \theta \in H_1$$

d) Sea  $\{T\}$  el conjunto de pruebas posibles asociadas a las hipótesis  $\{H_0, H_1\}$ . Sean  $A'$  y  $A''$  las regiones de aceptación de la hipótesis  $H_0$  en dos pruebas  $T'$  y  $T''$ .

Se dice que  $T'$  es más potente que  $T''$  y se escribe

$$T' > T''$$

si

$$\forall \theta \in H_0 \quad \alpha'(\theta) \leq \alpha''(\theta)$$

$$\forall \theta \in H_1 \quad \beta'(\theta) \leq \beta''(\theta)$$

$$\exists \theta \in H_1 \quad \beta'(\theta) < \beta''(\theta)$$

Si una prueba  $T'$  es tal que no existe ninguna prueba  $T \in \{T\}$  tal que  $T > T'$  se dice que  $T'$  es una «prueba admisible».

#### 5.2.4 Método de Neyman-Pearson

La mejor prueba de contraste entre dos hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  es, caso de existir, una prueba admisible.

El método de Neyman-Pearson para buscar una prueba óptima consiste en fijar el nivel de significación  $\alpha$ , y elegir entre las pruebas que cumplen con la condición

$$\alpha(\theta) \leq \alpha \quad \forall \theta \in H_0$$

es decir, entre todas las pruebas de umbral  $\alpha$ , aquella que dé lugar a un error de segunda especie  $\beta(\theta)$  mínimo. Este modo de obrar reposa sobre la siguiente consideración: las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  no deben ser tratadas de forma simétrica pues, en general, rechazar una de ellas equivocadamente tiene consecuencias mucho más graves que rechazar también equivocadamente la otra. Suele representarse por  $H_0$  la hipótesis cuyo rechazo erróneo tiene consecuencias más desagradables y se la denomina hipótesis nula. Esto conduce, naturalmente, a fijar una cota superior para el riesgo de primera especie  $\alpha(\theta)$  ( $\theta \in H_0$ ) y escoger una prueba admisible de umbral  $\alpha$ . Se comprende que en estas condiciones sea lógico hablar de prueba de la hipótesis  $H_0$  contra la hipótesis  $H_1$ .

Si  $A_\alpha$  es la región de aceptación para  $H_0$  de dicha prue-

ba, es preciso distinguir el caso en que  $H_1$  es simple de aquel en que es múltiple. En el caso en que  $H_1$  es simple se dice que  $T$  es la prueba más potente de umbral  $\alpha$ . En el caso en que  $H_1$  es múltiple, si se cumple que la región de aceptación  $A_\alpha$  permanece invariable para todo  $\theta \in H_1$ , se dice que la prueba  $T$  es uniformemente de máxima potencia (*Uniformly Most Powerful* o UMP).

### 5.3 PRUEBA ENTRE DOS HIPOTESIS SIMPLS

#### 5.3.1 Teorema de Neyman

Sea  $X$  una variable aleatoria de función densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$  y  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  una muestra aleatoria de extensión  $n$ .

Se trata de probar la hipótesis  $H_0$  de que  $\theta = \theta_0$  contra la hipótesis  $H_1$  de que  $\theta = \theta_1$ .

Si  $X$  admite una función densidad de probabilidad  $f(x, \theta) > 0 \forall x \in R^1$  y si  $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$  se tiene que  $\forall \alpha \in [0,1]$  existe una prueba de potencia máxima definida por la región de aceptación.

$$A_\alpha = \left\{ \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1) \leq c_\alpha \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_0) \right\}$$

donde  $c_\alpha \geq 0$ .

En efecto, supongamos que las funciones de verosimilitud

$$L(M, \theta_0) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_0)$$

$$L(M, \theta_1) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1)$$

son finitas y están determinadas para cada punto  $M$  del espacio  $R^n$ . Para cada  $c > 0$  siempre es posible definir un conjunto  $A$  de puntos de  $R^n$  para los cuales

$$L(M, \theta_1) \leq cL(M, \theta_0)$$

En la figura 5.12 se ha representado un caso concreto en un espacio  $R^1$

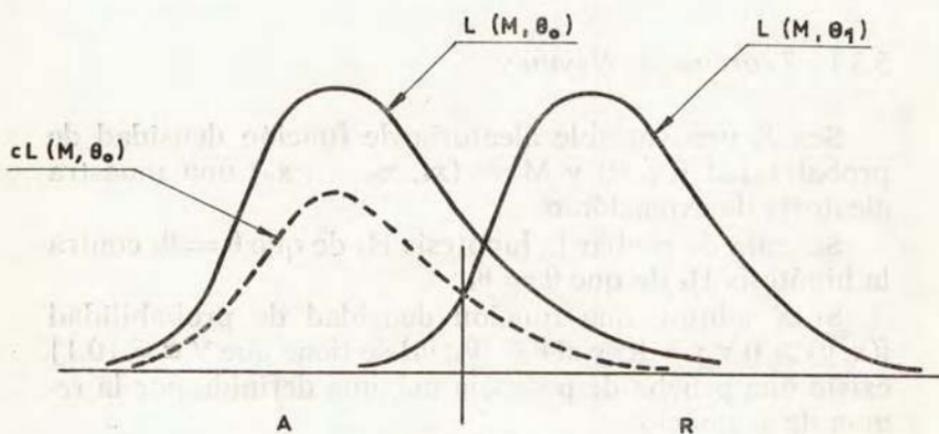


Fig. 5.12

En estas condiciones la probabilidad

$$P_r\{M \in R \mid \theta_0\}$$

será una función de  $c$ ,  $g(c)$ . Supongamos que, fijado un  $\alpha \in [0,1]$ , existe una  $c$  tal que  $g(c) = \alpha$ , y que designaremos con el símbolo  $c_\alpha$ . Entonces, podremos escribir

$$P_r\{M \in R \mid \theta_0\} = \int_R L(M, \theta_0) dM = \alpha$$

Vamos a verificar que esta prueba es de mayor potencia que cualquier otra del mismo nivel de significación, para probar la hipótesis  $H_0$  contra la hipótesis  $H_1$ . Para ello bastará probar que

$$P_r\{M \in R \mid \theta_1\} \geq P_r\{M \in R' \mid \theta_1\} \quad [1]$$

cualquiera que sea  $R'$ , tal que

$$P_r\{M \in R' \mid \theta_0\} = \int_{R'} L(M, \theta_0) dM = \alpha$$

Sea  $R' \cap R$  la intersección de los conjuntos  $R'$  y  $R$  (ver fig. 5.13). Si restamos de los dos miembros de la expresión [1]

$$P_r\{M \in R' \cap R \mid \theta_1\}$$

resultará, como nueva expresión a demostrar

$$P_r\{M \in R - R' \cap R \mid \theta_1\} \geq P_r\{M \in R' - R' \cap R \mid \theta_1\}$$

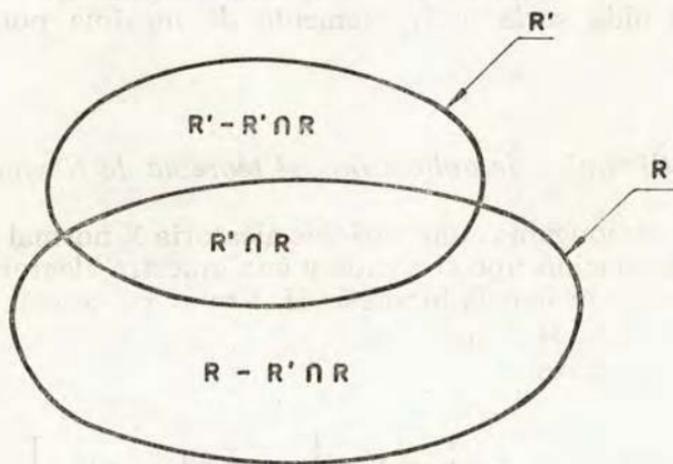


Fig. 5.13

En  $R$  se verifica que

$$L(M, \theta_1) \geq c_\alpha L(M, \theta_0)$$

y en  $R' - R' \cap R$  que es exterior a  $R$  se verifica que

$$L(M, \theta_1) \leq c_\alpha L(M, \theta_0)$$

$$P_r\{M \in R - R' \cap R \mid \theta_1\} \geq c_\alpha P_r\{M \in R - R' \cap R \mid \theta_0\}$$

$$P_r\{M \in R' - R' \cap R \mid \theta_1\} \leq c_\alpha P_r\{M \in R' - R' \cap R \mid \theta_0\}$$

Si a los segundos miembros de estas expresiones se les suma

$$c_\alpha P_r\{M \in R' \cap R \mid \theta_0\}$$

resultan ser ambos iguales a  $c_\alpha \alpha$ . Por consiguiente

$$P_r\{M \in R - R' \cap R \mid \theta_1\} \geq P_r\{M \in R' - R' \cap R \mid \theta_1\}$$

que es la expresión que pretendíamos demostrar.

Si  $\forall \theta \neq \theta_0$  encontrásemos la misma región  $A_\alpha$ , la prueba obtenida sería uniformemente de máxima potencia (UMP).

### 5.3.2 Ejemplos de aplicación del teorema de Neyman

a) Supongamos una variable aleatoria  $X$  normal  $N(m, \sigma)$  de desviación tipo conocida y una muestra aleatoria  $M$ . Se trata de probar la hipótesis  $H_0 : m = m_0$  contra la hipótesis  $H_1 = H_0 : m = m_1$ .

En este caso

$$f(x_i, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (x_i - m)^2 \right]$$

$$L(M, m_0) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right]^n \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_0)^2 \right]$$

$$L(M, m_1) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right]^n \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2 \right]$$

La región de aceptación  $A_\alpha$  de  $H_0$ , de acuerdo con el teorema de Neyman, quedará definida por

$$\frac{L(M, m_1)}{L(M, m_0)} \leq c_\alpha$$

o lo que es lo mismo

$$\ln \frac{L(M, m_1)}{L(M, m_0)} \leq \ln c_\alpha$$

es decir

$$\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - m_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2 \right] \leq \ln c_\alpha$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} \sum (x_i - m_0)^2 &= \sum x_i^2 + nm_0^2 - 2m_0 n\bar{x} \\ \sum (x_i - m_1)^2 &= \sum x_i^2 + nm_1^2 - 2m_1 n\bar{x} \end{aligned}$$

en consecuencia, resulta

$$n(m_1 - m_0)[2\bar{x} - (m_0 + m_1)] \leq 2\sigma^2 \ln c_\alpha$$

Si  $m_1 > m_0$

$$A_\alpha = \left\{ \bar{x} \leq \frac{m_0 + m_1}{2} + \frac{\sigma^2 \ln c_\alpha}{n(m_0 - m_1)} \right\}$$

o lo que es lo mismo

$$A_\alpha = \{\bar{x} \leq m'_L\}$$

Si  $m_1 < m_0$

$$A_\alpha = \left\{ \bar{x} \geq \frac{m_0 + m_1}{2} + \frac{\sigma^2 \ln c_\alpha}{n(m_0 - m_1)} \right\}$$

o lo que es lo mismo

$$A_\alpha = \{\bar{x} \geq m''_L\}$$

Así pues, la prueba de máxima potencia consistirá en verificar si la media muestral  $\bar{x}$  de una muestra de  $n$  elementos está a uno u otro lado de una cierta frontera  $m_L$ . Para determinar el valor de dicha frontera deberemos referirnos a la ley de distribución de la variable aleatoria  $\bar{x}$  que, según sabemos, es normal  $N(m, \sigma/\sqrt{n})$ .

En el caso  $m_1 > m_0$  (ver fig. 5.14) la frontera  $m_L$  podrá determinarse a partir de la condición

$$Pr\{\bar{x} > m_L \mid m = m_0\} = \alpha$$

lo que implica que

$$m_L = m_0 + K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

siendo  $K_\alpha$  la cuantila de orden  $1 - \alpha$  de la ley normal  $N(0, 1)$ .

El valor del riesgo de segunda especie  $\beta$  será

$$\beta = \phi\left(\frac{m_L - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

inferior al que se obtendría con cualquier otra prueba. En efecto, si en lugar de utilizar la media muestral  $\bar{x}$  nos refiriésemos a la mediana muestral  $y_{s+1}$  (o  $y_s$ ), cuya ley

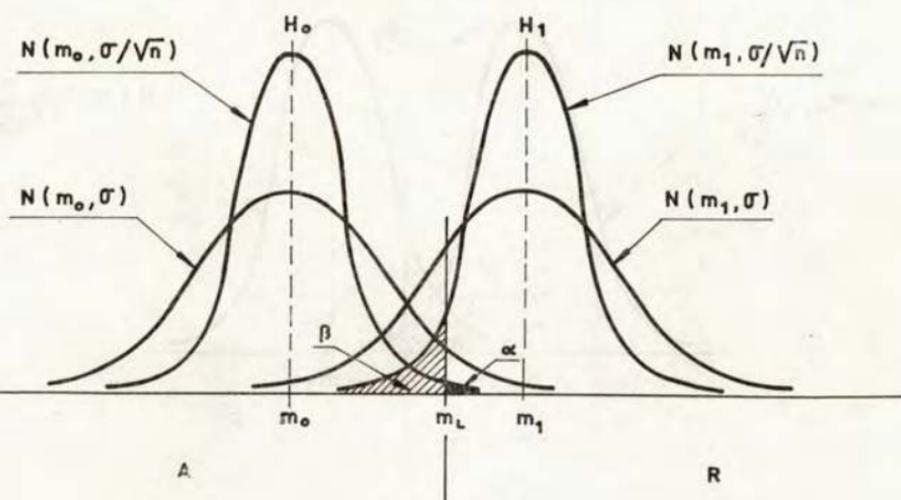


Fig. 5.14

de distribución para tamaños de muestra grandes es aproximadamente normal  $N(m, \sqrt{\pi/2} \sigma/\sqrt{n})$ , la región de aceptación pasaría a ser

$$A_\alpha = \{y_{s+1} \leq m_L\}$$

estando definido  $m_L$  por la condición

$$Pr\{y_{s+1} \geq m_L \mid m = m_0\} = \alpha$$

En consecuencia (ver fig. 5.15)

$$m_L = m_0 + K_\alpha \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y el correspondiente riesgo de segunda especie  $\beta'$  sería

$$\beta' = \phi\left(\frac{m_L - m_1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) > \phi\left(\frac{m_L - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \rho$$

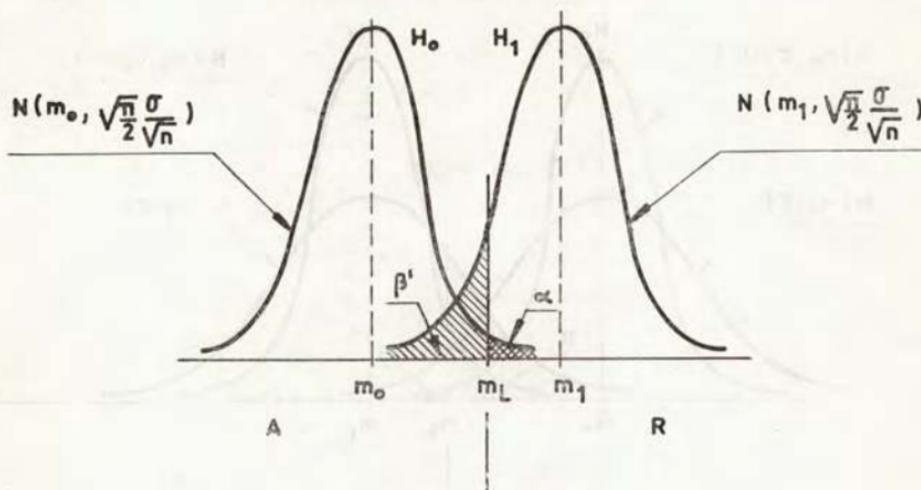


Fig. 5.15

lo que viene a refrendar el teorema de Neyman.

En el caso  $m_1 < m_0$  la frontera  $m_L$  deberá determinarse a partir de la condición

$$P_r\{\bar{x} \leq m_L \mid m = m_0\} = \alpha$$

lo que implica que

$$m_L = m_0 - K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Es de observar que la región de aceptación  $A_\alpha$  de la hipótesis  $H_0$  es por completo independiente del valor  $m_1$ , tanto en el caso  $m_1 > m_0$  como en el caso  $m_1 < m_0$ . En consecuencia:

— si  $m_1 > m_0$ , la región

$$A_\alpha = \{\bar{x} \leq m_L\}$$

será válida para la prueba de la hipótesis  $H_0 : m = m_0$  contra la hipótesis múltiple  $H_1 : m > m_0$ ;

— si  $m_1 < m_0$ , la región

$$A_\alpha = \{\bar{x} \geq m_L\}$$

será válida para la prueba de la hipótesis  $H_0 : m = m_0$  contra la hipótesis múltiple  $H_1 : m < m_0$ .

Estamos, pues, ante el caso de una prueba uniformemente de mayor potencia (UMP).

b) Supongamos una variable aleatoria  $X$  normal  $N(m, \sigma)$  de media conocida y una muestra aleatoria  $M$ . Se trata de probar la hipótesis  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  contra la hipótesis  $H_1 : \sigma = \sigma_1$ .

En este caso la región de aceptación  $A_\alpha$  de la hipótesis  $H_0$  viene definida por

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2\right]} \leq c_\alpha$$

expresión que puede escribirse en la forma

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq 2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \ln \left[ c_\alpha \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^n \right] = \\ = \chi_{\alpha, n}^{\prime 2}$$

si  $\sigma_1 > \sigma_0$ , y en la forma

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \geq 2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2} \ln \left[ c_\alpha \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^n \right] =$$

$$= \chi''_{1-\alpha, n}$$

si  $\sigma_1 < \sigma_0$ .

En consecuencia, dado que la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m)^2}{\sigma_0^2}$$

sigue una ley de probabilidad de  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad, las regiones de aceptación de umbral  $\alpha$  serán:

— si  $\sigma_1 > \sigma_0$

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi'^2_{\alpha, n} \right\}$$

donde  $\chi'^2_{\alpha, n}$  es tal que

$$\Pr\{\chi_n^2 \geq \chi'^2_{\alpha, n}\} = \alpha$$

— si  $\sigma_1 < \sigma_0$

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi''_{1-\alpha, n} \right\}$$

donde  $\chi''^2_{1-\alpha, n}$  es tal que

$$\Pr\{\chi_n^2 \leq \chi''^2_{1-\alpha, n}\} = \alpha$$

Es de observar que la región de aceptación  $A_\alpha$  de la hipótesis  $H_0$  es por completo independiente del valor  $\sigma_1$ , tanto en el caso  $\sigma_1 > \sigma_0$  como en el caso  $\sigma_1 < \sigma_0$ . En consecuencia:

— si  $\sigma_1 > \sigma_0$ , la región

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\sum(x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi'^2_{\alpha, n} \right\}$$

será válida para la prueba de la hipótesis  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  contra la hipótesis múltiple  $H_1 : \sigma > \sigma_0$ ;

— si  $\sigma_1 < \sigma_0$ , la región

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\sum(x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi''^2_{1-\alpha, n} \right\}$$

será válida para la prueba de la hipótesis múltiple  $H_1 : \sigma < \sigma_0$ .

Estamos, pues, ante el caso de una prueba uniformemente de mayor potencia (UMP).

## 5.4 PRUEBA ENTRE DOS HIPOTESIS MULTIPLES

### 5.4.1 Introducción

En el párrafo anterior nos hemos referido al método de Neyman de obtención de una prueba de máxima potencia en el caso en que las dos hipótesis sometidas a contraste son simples.

Sin embargo, no es éste el caso más frecuente. En la

mayor parte de las aplicaciones prácticas intervienen hipótesis múltiples.

Se han elaborado métodos que permiten la obtención de pruebas UMP en el caso de hipótesis múltiples.

En lo que sigue, para presentar una prueba  $T$  de la hipótesis  $H_0$  contra la hipótesis  $H_1$  utilizaremos la notación

$$T\{H_0 \mid H_1\}$$

Nos limitaremos a estudiar, siguiendo a Lehmann, pruebas relativas a las siguientes clases de hipótesis

$$\{\theta \leq \theta_0 \mid \theta > \theta_0\}$$

$$\{\theta \geq \theta_0 \mid \theta < \theta_0\}$$

$$\{\theta \leq \theta_1, \theta \geq \theta_2 \mid \theta_1 < \theta < \theta_2\}$$

$$\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \mid \theta < \theta_1, \theta > \theta_2\}$$

La existencia de pruebas UMP para estas clases de hipótesis está ligada a una propiedad, denominada propiedad (G), de la variable aleatoria  $X$ .

Se dice que una variable aleatoria  $X$  posee la propiedad (G) si  $\forall M \in \mathbb{R}^n$  y  $\forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta$  ( $\theta_1 > \theta_2$ ), la relación  $L(M, \theta_1)/L(M, \theta_2)$  puede escribirse bajo la forma  $\varphi[G(x)]$  siendo  $\varphi$  una función real estrictamente creciente.

#### 5.4.2 Prueba UMP para la clase $\{\theta \leq \theta_0 \mid \theta > \theta_0\}$

Sea  $X$  una variable aleatoria que posee la propiedad (G) y  $M$  una muestra aleatoria de extensión  $n$ . Consideremos las hipótesis  $\{\theta \leq \theta_0 \mid \theta > \theta_0\}$ . Lehmann ha demostrado que  $\forall \alpha \in ]0, 1[$  existe una prueba  $T$ , UMP, de umbral  $\alpha$  centrada y convergente, definida por la región de aceptación

$$A_\alpha = \{G(x) \leq c_\alpha\}$$

donde  $c_\alpha$  es tal que

$$Pr\{G(x) > c_\alpha \mid \theta = \theta_0\} = \alpha$$

El teorema de Lehmann también es aplicable a las hipótesis  $\{\theta \geq \theta_0 \mid \theta < \theta_0\}$ . En este caso la región de aceptación es

$$A_\alpha = \{G(x) \geq c_\alpha\}$$

donde  $c_\alpha$  es tal que

$$Pr\{G(x) < c_\alpha \mid \theta = \theta_0\} = \alpha$$

Como ejemplo de aplicación, supongamos el caso de una variable aleatoria normal  $N(m, \sigma)$  de desviación tipo conocida. Se trata de probar las hipótesis  $\{m \leq m_0 \mid m > m_0\}$ .

En este caso,  $X$  posee la propiedad (G). En efecto

$$\begin{aligned} \frac{L(M, m_1)}{L(M, m_2)} &= \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - m_1)^2 \right]}{\exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - m_2)^2 \right]} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} [2n(m_1 - m_2)\bar{x} + n(m_2^2 - m_1^2)] \right\} \end{aligned}$$

y si tomamos

$$G(x) = \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$$

la propiedad (G) se cumple. En estas condiciones la región de aceptación será

$$A_\alpha = \{\bar{x} \leq c_\alpha\}$$

con  $c_\alpha$  determinado por la condición

$$P_r\{\bar{x} > c_\alpha \mid m = m_0\} = \alpha$$

Esta prueba es idéntica a la que ya encontramos en el párrafo 5.3.2 para el caso de dos hipótesis simples.

Así pues, en el caso de una variable aleatoria normal  $N(m, \sigma)$  de desviación tipo desconocida, las pruebas

$$T\{m = m_0 \mid m = m_1\} \quad (m_1 > m_0)$$

$$T\{m = m_0 \mid m > m_0\}$$

$$T\{m \leq m_0 \mid m > m_0\}$$

son formalmente idénticas. La construcción de una prueba UMP para hipótesis múltiples se reduce, pues, en este caso, a su sustitución por hipótesis simples y subsiguiente aplicación del método de Neyman.

Lo mismo cabe decir para las pruebas formalmente idénticas

$$T\{m = m_0 \mid m = m_1\} \quad (m_1 < m_0)$$

$$T\{m = m_0 \mid m < m_0\}$$

$$T\{m \geq m_0 \mid m < m_0\}$$

En el caso en que la desviación tipo es desconocida puede comprobarse fácilmente que es posible tomar

$$G(x) = \frac{\sum(x_i - m)^2}{\sigma_0^2}$$

resultando que las pruebas

$$T\{\sigma = \sigma_0 \mid \sigma = \sigma_1\} \quad (\sigma_1 > \sigma_0)$$

$$T\{\sigma = \sigma_0 \mid \sigma > \sigma_0\}$$

$$T\{\sigma \leq \sigma_0 \mid \sigma > \sigma_0\}$$

son formalmente idénticas.

Lo mismo cabe decir de las pruebas

$$T\{\sigma = \sigma_0 \mid \sigma = \sigma_1\} \quad (\sigma_1 < \sigma_0)$$

$$T\{\sigma = \sigma_0 \mid \sigma < \sigma_0\}$$

$$T\{\sigma \geq \sigma_0 \mid \sigma < \sigma_0\}$$

Como resumen podemos decir que, en el caso de una distribución normal  $N(m, \sigma)$ , cualquier prueba de hipótesis compuestas, con especificación unilateral, relativa a la media o a la desviación tipo, puede plantearse mediante el método de Neyman, sustituyendo dichas hipótesis por hipótesis simples.

Este resultado es de considerable importancia práctica y haremos uso de él en los próximos capítulos.

#### 5.4.3 Prueba UMP para la clase $\{\theta \leq \theta_1, \theta \geq \theta_2 \mid \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ .

Sea  $X$  una variable aleatoria que posee la propiedad (G) y  $M$  una muestra aleatoria de extensión  $n$ . Consideremos las hipótesis  $\{\theta \leq \theta_1, \theta \geq \theta_2 \mid \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ . Se demuestra que  $\forall \alpha \in ]0,1[$  existe una prueba  $T$ , UMP de umbral  $\alpha$ , centrada y convergente definida por la región de rechazo

$$R = \bar{A} = \{c_1 \leq G(x) \leq c_2\}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes definidas por las condiciones

$$P_r\{c_1 \leq G(x) \leq c_2 \mid \theta = \theta_1\} = \alpha$$

$$P_r\{c_1 \leq G(x) \leq c_2 \mid \theta = \theta_2\} = \alpha$$

5.4.4 Prueba UMP para la clase  $\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \mid \theta < \theta_1, \theta > \theta_2\}$

Sea una variable aleatoria que posee la propiedad (G) y M una muestra aleatoria de extensión n. Consideremos la hipótesis  $\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \mid \theta < \theta_1, \theta > \theta_2\}$ . Se demuestra que  $\forall \alpha \in ]0,1[$  existe una prueba T, UMP y centrada definida por la región de aceptación

$$A_\alpha = \{c_1 \leq G(x) \leq c_2\}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes definidas por las condiciones

$$Pr\{c_1 > G(x) > c_2 \mid \theta = \theta_1\} = \alpha$$

$$Pr\{c_1 > G(x) > c_2 \mid \theta = \theta_2\} = \alpha$$

Como ejemplo de aplicación supongamos una variable aleatoria normal  $N(m, \sigma)$  de desviación tipo conocida. Se trata de probar las hipótesis  $\{m = m_0 \mid m \neq m_0\}$ .

En este caso

$$G(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

y la región de aceptación será

$$A_\alpha = \{m_0 - c \leq \bar{x} \leq m_0 + c\}$$

estando definida la constante única c por la condición

$$Pr\{\bar{x} \leq m_0 - c\} = \alpha/2$$

lo cual implica que (ver fig. 5.16)

$$c = K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

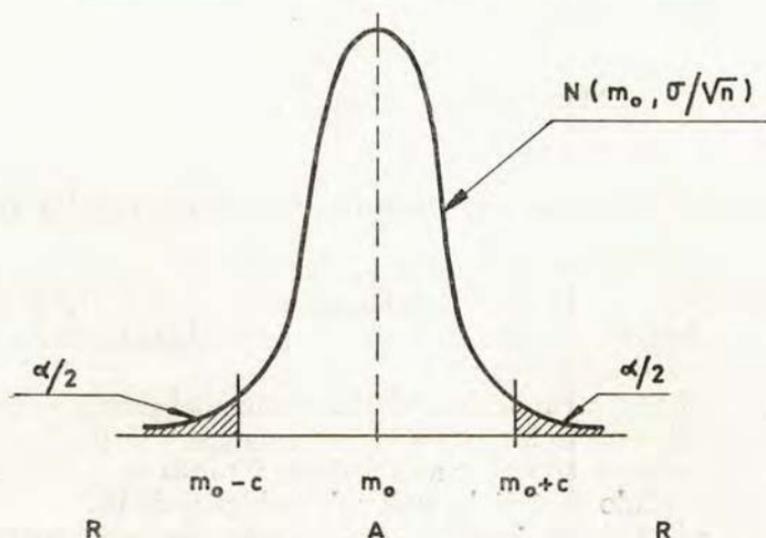


Fig. 5.16

### 5.4.5 Método de la razón de verosimilitudes

Neymann ha propuesto un método de construcción de una prueba «razonablemente buena» para hipótesis múltiples, que encuentra su justificación en sus singulares propiedades asintóticas cuando  $H_0$  es una hipótesis simple.

Dicho método consiste en formar la variable aleatoria

$$\lambda = \frac{\text{Max}_{\theta \in \Theta} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)}{\text{Max}_{\theta \in H_0} \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)} = \frac{\text{Max}_{\theta \in \Theta} L(M, \theta)}{\text{Max}_{\theta \in H_0} L(M, \theta)}$$

llamada «razón de verosimilitudes».

Desde luego, como

$$\max_{\theta \in \Theta} L(M, \theta) \geq \max_{\theta \in H_0} L(M, \theta)$$

y ambos números son mayores que cero, resulta que  $\lambda \geq 1$ .

Si el verdadero valor del parámetro desconocido  $\theta$  es compatible con la hipótesis  $H_0$ , es decir, si  $\theta \in H_0$ , la variable aleatoria  $\lambda$  sólo diferirá de la unidad debido a la aleatoriedad del muestreo.

Por el contrario si el verdadero valor del parámetro es compatible con la hipótesis  $H_1$ , es decir, si  $\theta \notin H_0$ ,  $\lambda$  será necesariamente superior a la unidad y tanto mayor cuanto más alejado esté dicho valor de la hipótesis  $H_0$ .

En estas condiciones se comprende que será posible plantear una prueba teniendo en cuenta la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $\lambda$  cuando  $\theta \in H_0$ . En efecto, si la función densidad de probabilidad de  $\lambda$  es  $f(\lambda)$ , bastará encontrar un valor  $\lambda_\alpha$  (ver fig. 5.17) tal que

$$P_r\{\lambda > \lambda_\alpha\} = \alpha$$

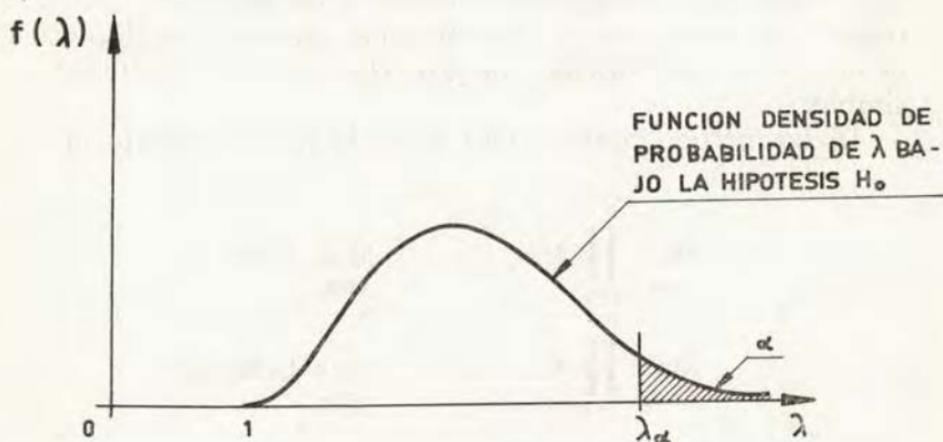


Fig. 5.17

y establecer como región de aceptación

$$A_\alpha = \{\lambda \leq \lambda_\alpha\}$$

Si el valor de  $\lambda$  para la muestra  $M$  es inferior a  $\lambda_\alpha$ , diremos que nada se opone a pensar que la hipótesis  $H_0$  es correcta, mientras que si es superior a  $\lambda_\alpha$  preferiremos pensar que  $H_0$  no es correcta, toda vez que la probabilidad de que realmente lo sea es pequeña (igual al nivel de significación  $\alpha$ ).

El interés de este método reside en las propiedades asintóticas de  $\lambda$  cuando  $H_0$  es una hipótesis simple. Supongamos una variable aleatoria  $X$  de función densidad de probabilidad  $f(x, \theta_0)$  y designemos por  $\hat{\theta}$  un estimador de  $\theta_0$  por el método de máxima verosimilitud, asociado a una muestra  $M$  de extensión  $n$ . En estas condiciones

$$\lambda = \frac{\text{Max}_{\theta \in \Theta} L(M, \theta)}{L(M, \theta_0)} = \frac{L(M, \hat{\theta})}{L(M, \theta_0)}$$

y se demuestra que

$$2 \ln \lambda \rightarrow \chi_1^2$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Es decir, la variable aleatoria  $2 \ln \lambda$  se distribuye bajo la hipótesis  $H_0$  aproximadamente según una ley de  $\chi^2$  de 1 grado de libertad, para muestras grandes.

Puesto que el intervalo de variación de  $\lambda$  es  $(1, \infty)$ , el intervalo de variación de  $2 \ln \lambda$  será  $(0, \infty)$  y la región de aceptación podrá expresarse en la forma (ver fig. 5.18)

$$A_\alpha = \{\chi_1^2 \leq \chi_{\alpha, 1}^2\}$$

siendo  $\chi_{\alpha, 1}^2$  la cuantila de orden  $1 - \alpha$  de la ley de  $\chi^2$  con 1 grado de libertad (ver fig. 5.19)

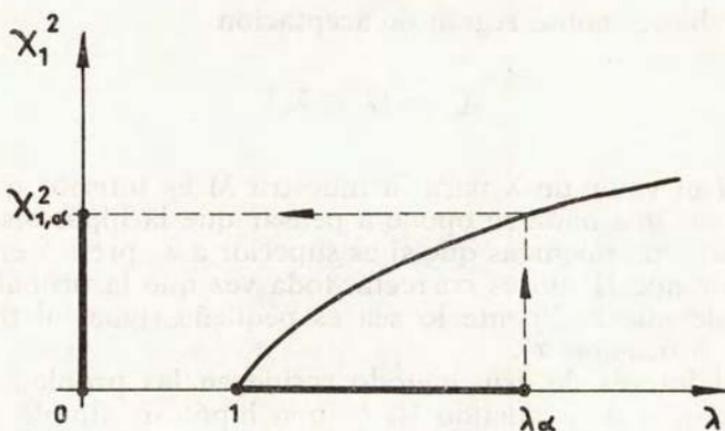


Fig. 5.18

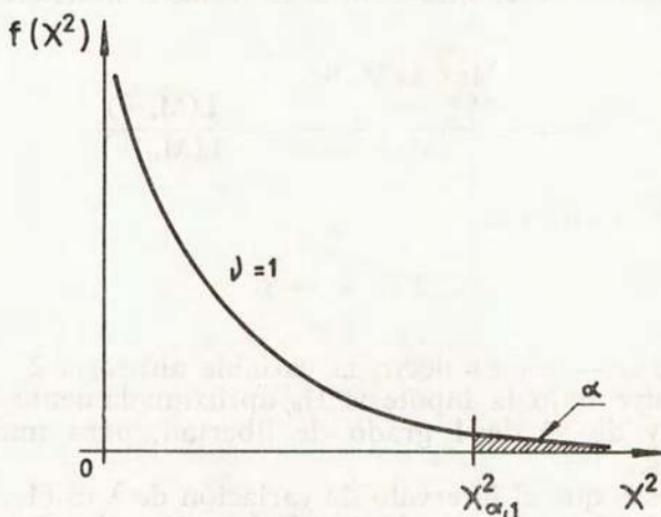


Fig. 5.19

Unos ejemplos permitirán aclarar el método.

Supongamos, en primer lugar, una variable aleatoria normal  $N(m, \sigma)$  de desviación tipo conocida. Se trata de probar las hipótesis  $\{m = m_0 \mid m \neq m_0\}$ .

En este caso, sabemos que  $\hat{m} = \bar{x}$  hace máxima la función de verosimilitud. En consecuencia

$$\lambda = \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 \right]}{\exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - m_0)^2 \right]}$$

y

$$2 \ln \lambda = \frac{n}{\sigma^2} (\bar{x} - m_0)^2$$

La región de aceptación para  $H_0$  será, pues

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \left\{ \frac{n}{\sigma^2} (\bar{x} - m_0)^2 \leq \chi_{\alpha, 1}^2 \right\} = \\ &= \left\{ |\bar{x} - m_0| \leq \frac{\sigma \sqrt{\chi_{\alpha, 1}^2}}{\sqrt{n}} \right\} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\sqrt{\chi_{\alpha, 1}^2} = \pm K_{\alpha/2}$$

siendo  $K_{\alpha/2}$  la cuantila de orden  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la distribución normal  $N(0, 1)$ , dicha región de aceptación podrá escribirse en la forma

$$A_\alpha = \left\{ m_0 - K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq m_0 + K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

que coincide con la obtenida en el párrafo 5.4.4 a partir de los teoremas de Lehmann.

Supongamos, en segundo lugar, una variable aleatoria normal  $N(m, \sigma)$  de media y desviación tipo desconocidas. Se trata de probar las hipótesis  $\{m = m_0 \mid m \neq m_0\}$ .

En este caso sabemos que la verosimilitud de una muestra  $M$  de extensión  $n$  se hace máxima para

$$\hat{m} = \bar{x}$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

En consecuencia dado que

$$L = [1/\sqrt{2\pi} \sigma]^n \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \Sigma(x_i - m)^2 \right]$$

$$\text{Max}_{\theta \in \Theta} L(M, \theta) = [1/(2\pi/n)\Sigma(x_i - \bar{x})^2]^{n/2} \exp(-n/2)$$

De igual forma, para el subconjunto  $H_0$ , que contiene un solo punto  $(m_0)$ , la verosimilitud se hará máxima para

$$m = m_0$$

y

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_0)^2$$

En consecuencia

$$\text{Max}_{\theta \in H_0} L(M, \theta) = [1/(2\pi/n)\Sigma(x_i - m_0)^2]^{n/2} \exp(-n/2)$$

y

$$\lambda = \left[ \frac{\Sigma(x_i - m_0)^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} \right]^{n/2}$$

Ahora bien, dado que

$$\Sigma(x_i - m_0)^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - m_0)^2$$

la variable aleatoria  $\lambda$  puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \lambda &= \left[ 1 + \frac{n(\bar{x} - m_0)^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \right]^{n/2} = \\ &= \left[ 1 + \frac{\frac{n(\bar{x} - m_0)^2}{\sigma^2}}{\frac{n-1}{n-1} \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}} \right]^{n/2} = \\ &= \left[ 1 + \frac{\left( \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2}{(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2}} \right]^{n/2} \end{aligned}$$

Ahora bien, la variable  $\left[ \frac{(\bar{x} - m_0)\sqrt{n}}{\sigma} \right]^2$  es una variable  $\chi^2$  con un grado de libertad y la variable  $\frac{S^2}{\sigma^2}$  es una variable  $\chi^2$  con  $n - 1$  grados de libertad dividida por  $n - 1$ . En consecuencia, el cociente

$$\left( \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 / \frac{S^2}{\sigma^2}$$

es una variable aleatoria  $F$  de Snedecor de 1 y  $n - 1$  grados de libertad.

En consecuencia, la variable aleatoria  $\lambda$  puede escribirse en la forma

$$\lambda = \left[ 1 + \frac{F_{1, n-1}}{n-1} \right]^{n/2}$$

Dado que  $\lambda$  es una función monótona creciente de  $F_{1, n-1}$ , de forma que para  $\lambda = 1$ ,  $F = 0$  y para  $\lambda = \infty$ ,  $F = \infty$ , una región de aceptación de la forma:

$$A_\alpha = \{ \lambda \leq \lambda_\alpha \}$$

se transforma en una región de la forma (ver fig. 5.20):

$$A_\alpha = \{F_{1, n-1} \leq F_{\alpha; 1, n-1}\}$$

siendo  $F_{\alpha; 1, n-1}$  tal que

$$Pr\{F_{1, n-1} > F_{\alpha; 1, n-1}\} = \alpha$$

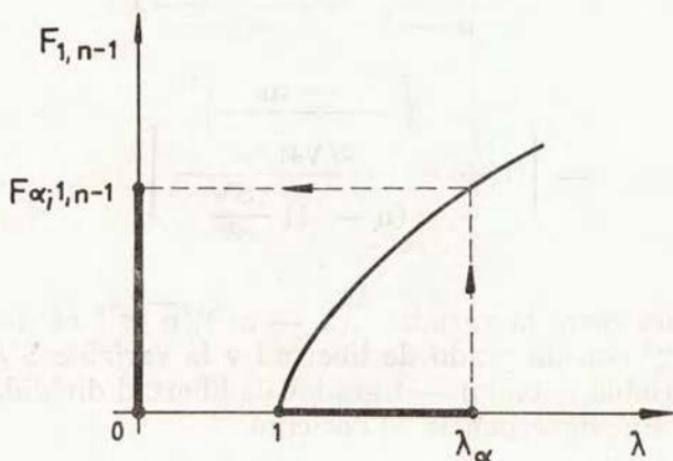


Fig. 5.20

Por otra parte, dado que

$$F_{\alpha; 1, n-1} = t_{\alpha/2, n-1}^2$$

siendo  $t_{\alpha/2, n-1}$  la cuantila de orden  $1 - \alpha/2$  de la  $t$  de Student con  $n - 1$  grados de libertad, la región de aceptación podrá escribirse en la forma

$$A_\alpha = \{t_{n-1}^2 \leq t_{\alpha/2, n-1}^2\}$$

o lo que es lo mismo

$$A_\alpha = \{-t_{\alpha/2, n-1} \leq t_{n-1} \leq t_{\alpha/2, n-1}\}$$

y dado que

$$t_{n-1} = \frac{\sqrt{F_{1, n-1}}}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}}$$

queda, finalmente

$$A_\alpha = \left\{ m_0 - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq m_0 + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right\}$$

Es de resaltar el hecho de que en este caso ha sido posible obtener una prueba exacta sin necesidad de recurrir a las propiedades asintóticas de  $2 \ell n \lambda$ .

Supongamos, finalmente, una variable aleatoria normal  $N(m, \sigma)$  de media y desviación tipo desconocidas. Se trata de probar las hipótesis  $\{\sigma^2 = \sigma_0^2 \mid \sigma^2 \neq \sigma_0^2\}$ .

En este caso la función de verosimilitud se hace máxima

— para  $\hat{m} = \bar{x}$   $\hat{\sigma}^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2/n$  cuando  $\theta \in \Theta$ ;

— para  $\hat{m} = \bar{x}$   $\hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2$  cuando  $\theta \in H_0$ .

Por consiguiente resulta que

$$\lambda = \left[ \frac{\sigma_0^2 n}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2} \right]^{n/2} \exp \left[ \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma_0^2} - \frac{n}{2} \right]$$

Si hacemos

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_0} \right)^2 = \psi$$

resulta

$$\lambda = \left[ \frac{n}{\psi} \right]^{n/2} \exp \left[ \frac{1}{2} (\psi - n) \right]$$

donde la variable aleatoria  $\psi$  está distribuida de acuerdo con una ley de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad.

Para determinar la región de aceptación  $A_\alpha$  para  $H_0$  podemos hacer uso de las propiedades asintóticas de  $2 \ln \lambda$ , o bien, tener en cuenta que, en virtud de la relación funcional entre  $\lambda$  y  $\psi$  (ver fig. 5.21), a la región de aceptación

$$A_\alpha = \{\lambda \leq \lambda_\alpha\}$$

corresponderá la región de aceptación

$$A_\alpha = \{\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2\}$$

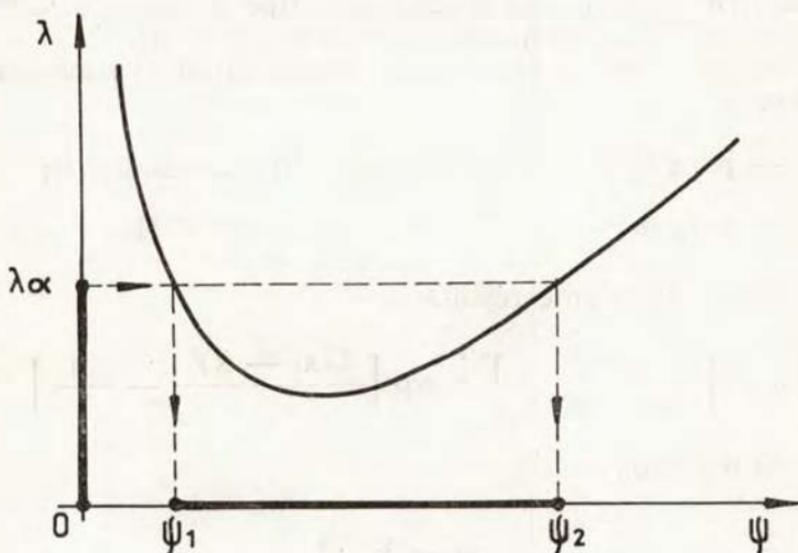


Fig. 5.21

$\psi_1$  y  $\psi_2$  deben ser dos valores de la ley  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad, tales que, fuera de los mismos, sólo queda una proporción  $\alpha$  de la distribución (ver fig. 5.22).

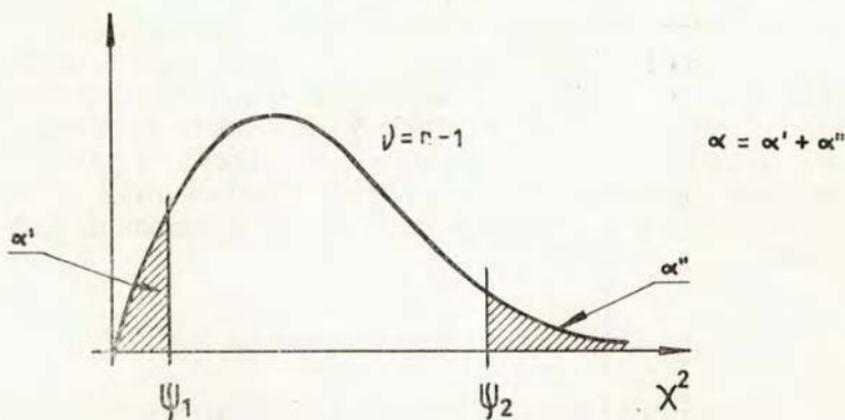


Fig. 5.22

Para evitar complicaciones se suele tomar como región de aceptación de  $H_0$  al nivel de significación  $\alpha$

$$A_\alpha = \{ \chi_{1-(\alpha/2), n-1}^2 \leq \psi \leq \chi_{\alpha/2, n-1}^2 \}$$

siendo  $\chi_{1-(\alpha/2), n-1}^2$  y  $\chi_{\alpha/2, n-1}^2$  las cuantilas de orden  $\alpha/2$  y  $1 - \alpha/2$  de la ley de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad respectivamente (ver fig. 5.23).

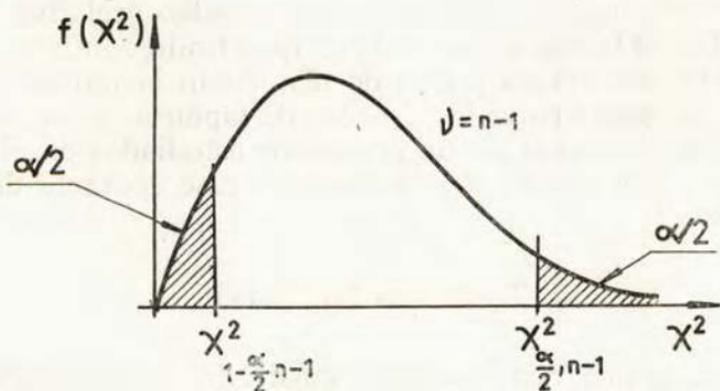


Fig. 5.23

En todos los ejemplos desarrollados la hipótesis  $H_0$  ha sido una hipótesis simple. En realidad, cuando la hipótesis  $H_0$  es compuesta, la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $\lambda$  no está unívocamente determinada, toda vez que puede ser diferente para los distintos valores de  $\theta \in H_0$ . En este caso es quizá preferible construir la prueba a partir de los teoremas de Lehmann.

### 5.5 RELACION ENTRE LAS PRUEBAS DE HIPOTESIS Y LOS INTERVALOS DE CONFIANZA

Los ejemplos desarrollados en los párrafos 5.3 y 5.4 muestran que la aplicación del teorema de Neyman en el caso de dos hipótesis simples, y de los teoremas de Lehmann y del método de la razón de verosimilitudes en el caso de hipótesis múltiples, conduce a pruebas o tests estadísticos, generalmente UMP, expresables en términos de:

— un estadístico unidimensional  $\xi$ , función de los valores muestrales, al que suele darse el nombre de función discriminante;

— una región de aceptación o de rechazo relativa a  $\xi$ , definida en forma de intervalo cerrado finito o infinito.

Estos resultados ponen de manifiesto la íntima relación que existe entre las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza de un estimador estudiados en el capítulo 4. En efecto, refiriéndonos al caso concreto de la prueba

$$T\{m = m_0 \mid m \neq m_0\}$$

relativa a una distribución normal  $N(m, \sigma)$  de media y desviación tipo desconocidas, lo mismo da decir que la región de aceptación para la hipótesis  $H_0: m = m_0$  es

$$A_\alpha = \left\{ m_0 - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq m_0 + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right\}$$

que decir que debe formarse el intervalo

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

y si cubre al valor  $m_0$  aceptar la hipótesis  $H_0$ , rechazándola en caso contrario.

La analogía entre ambas formas de razonar es completa. Así

— el fallo de cobertura por parte del intervalo, del valor  $m_0$ , cuando  $\theta \in H_0$ , equivale al riesgo de primera especie, y

— la indebida cobertura por parte del intervalo, del valor  $m_0$ , cuando  $\theta \in H_1$ , equivale al riesgo de segunda especie.

La identidad, a efectos de decisión, entre prueba de hipótesis y un intervalo de confianza permite plantear pruebas sin tener que recurrir a la utilización de los métodos descritos en los párrafos 5.3 y 5.4. Por ejemplo, de los intervalos de confianza estudiados en el párrafo 4.4 pueden obtenerse de forma inmediata pruebas de hipótesis muy interesantes.

Todas estas consideraciones conducen al siguiente método práctico de construcción de pruebas de hipótesis consistente en:

— adoptar un estadístico adecuado  $\xi$ , función de los valores muestrales, cuya ley de probabilidad sea conocida. Generalmente se adopta como función discriminante  $\xi$  un estimador del parámetro desconocido  $\theta$ , o una función sencilla de dicho estimador;

— determinar la región  $A_\alpha$  dentro de la cual cabe esperar se sitúe el valor numérico de  $\xi$  en una experiencia concreta, con una casi seguridad  $1 - \alpha$ , dentro del marco de la hipótesis  $H$  ( $\theta \in H_0$ ).

Planteadas la prueba en esta forma, bastará proceder a la extracción de una muestra aleatoria y calcular el va-

lor adoptado por el estadístico  $\xi$ . Entonces, si el valor muestral de  $\xi$  se sitúa dentro del intervalo  $A_\alpha$ , diremos que nada se opone a pensar en la legitimidad de la hipótesis  $H_0$ . Por el contrario, si el valor muestral de  $\xi$  se sitúa fuera del intervalo  $A_\alpha$ , diremos que es preferible pensar que la hipótesis  $H_0$  no es correcta, toda vez que la probabilidad de que lo sea, a la vista de los resultados experimentales obtenidos, es muy pequeña (a lo sumo igual a  $\alpha$ ).

Naturalmente este método no siempre conducirá a la obtención de una prueba UMP. Ahora bien, en contra de lo que a primera vista pudiera parecer, esto no constituye un inconveniente del método, sino todo lo contrario. En efecto, a veces ocurre que la realización práctica de una prueba UMP es complicada y/o costosa. En estos casos puede resultar más interesante la adopción de una prueba de menor potencia pero menos costosa y de realización más sencilla.

De hecho, en la aplicación práctica de las pruebas de hipótesis siempre debe buscarse un compromiso entre la eficacia por un lado y el coste y la facilidad de realización por otro.

Como norma general, siempre que los ensayos sean muy costosos, tal como ocurre en investigación, será conveniente recurrir a la prueba de potencia máxima, a fin de reducir al mínimo los ensayos necesarios.

Por el contrario en el control estadístico industrial de recepción o en curso de fabricación, los ensayos son, en general, poco costosos, por lo que resulta conveniente ir a pruebas de realización sencilla, siempre y cuando su eficacia sea aceptablemente buena.

## 5.6 CURVA DE EFICACIA DE UNA PRUEBA

Dada una prueba  $T\{H_0 | H_1\}$ , siempre existe una probabilidad *a priori* de que, cualquiera que sea el valor del

parámetro  $\theta$ , la hipótesis nula  $H_0$  sea aceptada. Dicha probabilidad vale

$$P(\theta) = P_r\{\text{Aceptar } H_0 \mid \theta = \theta\} = P_r\{M \in A \mid \theta \in \Theta\} = \\ = \int_A \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta \in \Theta) dM$$

y es función de  $\theta$ . La representación gráfica de esta función recibe el nombre de curva de eficacia o curva característica de la prueba.

En la práctica, la determinación de la función  $P(\theta)$  no reviste, en general, especiales dificultades. En efecto, si la función discriminante elegida es  $\xi$  y su función densidad de probabilidad es  $f(\xi, \theta)$ , la probabilidad  $P(\theta)$  no será otra cosa que el área bajo la fracción de la curva  $f(\xi, \theta)$  comprendida dentro de la región de aceptación, es decir,

$$P(\theta) = \int_A f(\xi, \theta) d\xi$$

Por ejemplo, en el caso de la prueba  $T\{\theta \leq \theta_0 \mid \theta > \theta_0\}$ , la región de aceptación tiene la forma

$$A_\alpha = \{\xi \leq c\}$$

y la curva de eficacia vendrá definida por la ecuación

$$P(\theta) = \int_{-\infty}^c f(\xi, \theta) d\xi$$

y tendrá la forma indicada en la figura 5.23a. En la figura 5.24 se ha representado el proceso de obtención del punto  $[\theta_1, P(\theta_1)]$ . Al ir variando  $\theta$ , irá cambiando la posición y forma de la curva  $f(\xi, \theta)$ , la cual determinará áreas distintas a la izquierda de  $c$ . De esta forma se irán generando los distintos puntos de la curva de eficacia.

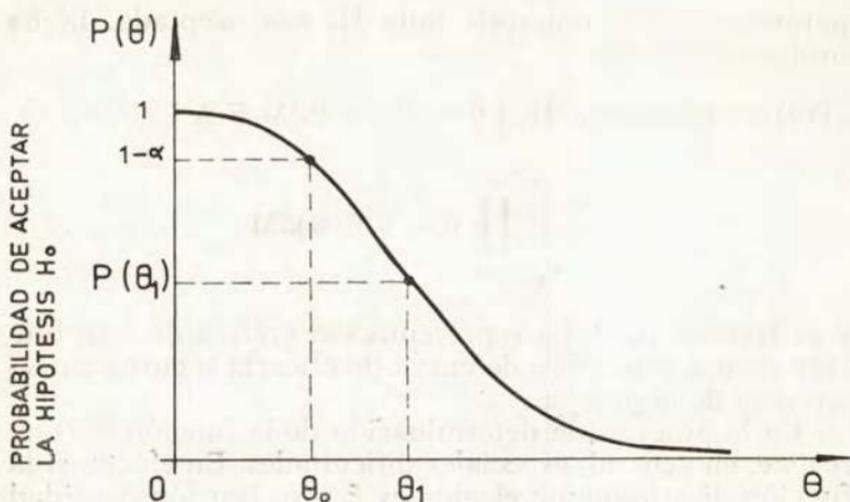


Fig. 5.23a

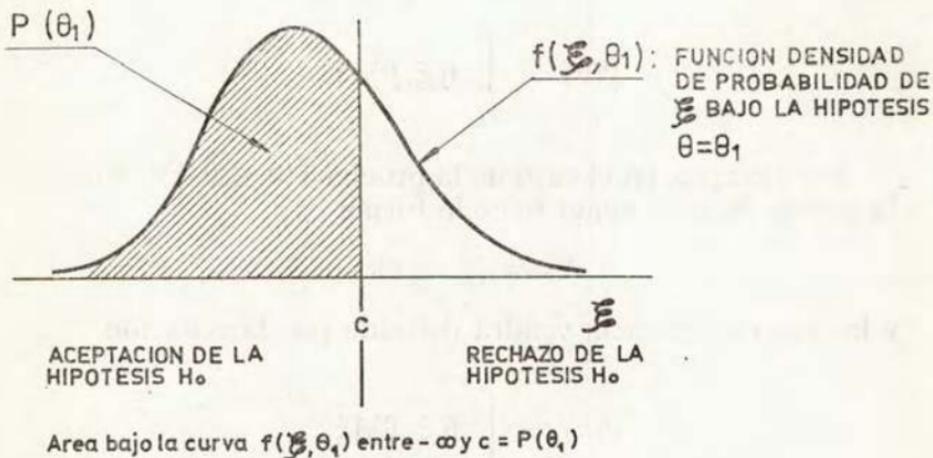


Fig. 5.24

En el caso de la prueba  $T\{\theta \geq \theta_0 \mid \theta < \theta_0\}$  la región de aceptación tiene la forma

$$A_\alpha = \{\xi \geq c\}$$

y la curva de eficacia vendrá definida por la ecuación

$$P(\theta) = \int_c^{\infty} f(\xi, \theta) d\xi$$

y tendrá la forma indicada en la figura 5.25. En la figura 5.26 se ha representado el proceso de obtención del punto  $[\theta_1, P(\theta_1)]$ .

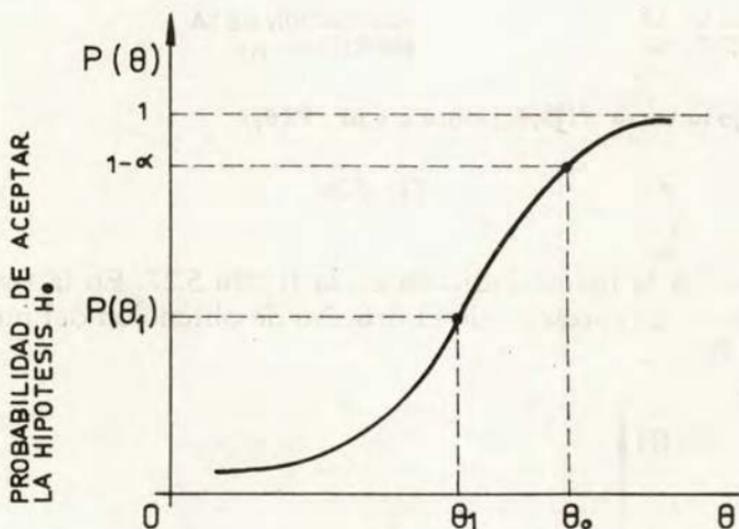


Fig. 5.25

En el caso de la prueba  $T\{\theta = \theta_0 \mid \theta \neq \theta_0\}$  la región de aceptación tiene la forma

$$A_a = \{c_1 \leq \xi \leq c_2\}$$

y la curva de eficacia vendrá definida por la ecuación

$$P(\theta) = \int_{c_1}^{c_2} f(\xi, \theta) d\xi$$

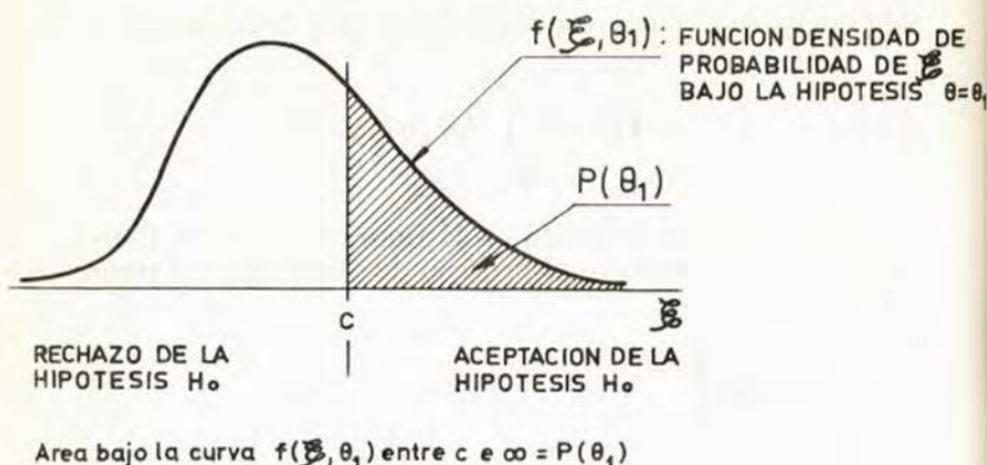


Fig. 5.26

y tendrá la forma indicada en la figura 5.27. En la figura 5.28 se ha representado el proceso de obtención del punto  $[\theta_1, P(\theta_1)]$ .

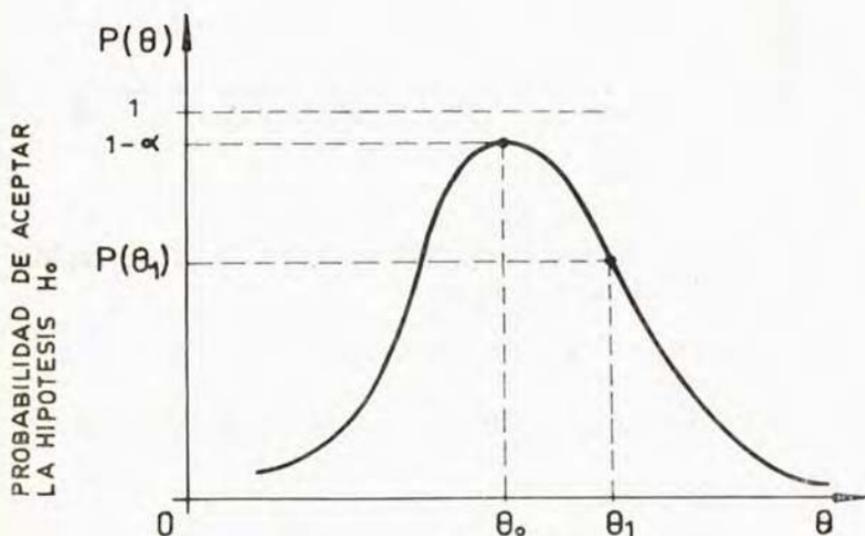


Fig. 5.27

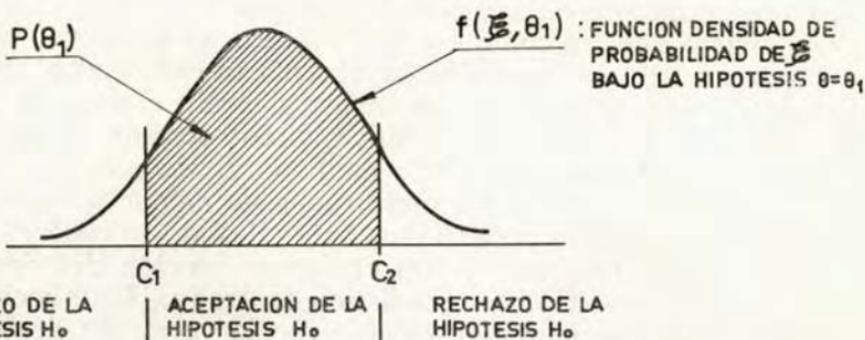


Fig. 5.28

Finalmente en el caso de la prueba  $T\{\theta = \theta_0 \mid \theta = \theta_1\}$  la curva de eficacia se reduce, evidentemente a dos puntos (ver fig. 5.29).

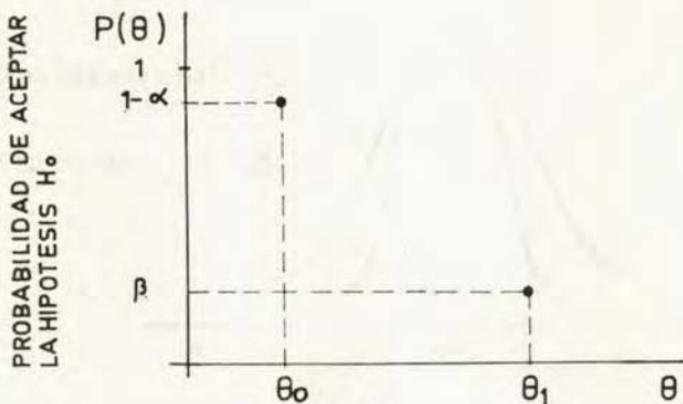


Fig. 5.29

La curva característica de una prueba es una imagen completa de la misma, que permite:

- establecer comparaciones con otras pruebas, y
- predecir las consecuencias de su aplicación práctica.

La curva de eficacia permite establecer comparaciones entre pruebas distintas. Para centrar ideas refirámonos

al caso concreto de una distribución normal  $N(m, \sigma)$ . Hemos visto que, en cualquier caso, la prueba de mayor potencia, relativa a la media, se obtenía usando como función discriminante la media muestral  $\bar{x}$ . En el caso de la prueba  $T \{m = m_0 \mid m = m_1\}$ , tuvimos ocasión de comprobar que la adopción de la mediana  $y_{s+1}$  como función discriminante conducía a una prueba de menor potencia. A idéntico resultado podríamos haber llegado en cualquier otro tipo de hipótesis y con cualquier función discriminante (por ejemplo, un estadístico centrado). Este hecho puede visualizarse perfectamente mediante el uso de las curvas de eficacia. En la figura 5.30 se han representado las curvas de eficacia correspondientes a la prueba  $T\{m = m_0 \mid m \neq m_0\}$ , tomando en un caso la media muestral y en otro la mediana muestral como funciones discriminantes.

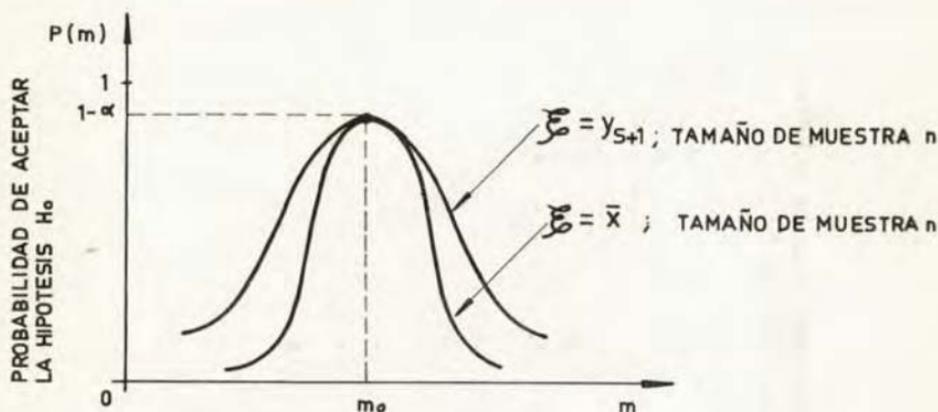


Fig. 5.30

Puede observarse que, para un mismo tamaño de muestra ( $n$ ) y un mismo nivel de significación ( $\alpha$ ), la prueba en que se utiliza la media muestral  $\bar{x}$  como función discriminante permite, en todos los casos, tomar decisiones con menor riesgo de segunda especie que la prueba en que se utiliza como función discriminante la mediana muestral  $y_{s+1}$ .

La existencia de un límite máximo para la potencia

obtenida en una prueba, con un tamaño de muestra y un nivel de significación establecidos, se traduce geoméricamente en la existencia de una zona prohibida del plano  $m - P(m)$  dentro de la cual no es posible penetrar por simple modificación de la función discriminante (ver fig. 5.31).

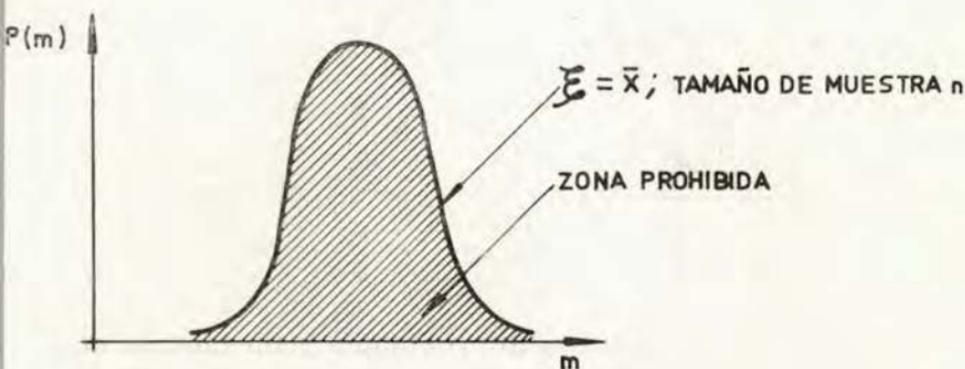


Fig. 5.31

Para poder penetrar en esta zona es imprescindible, o bien aumentar el tamaño de la muestra, o bien aumentar el valor del nivel de significación.

Adoptada una función discriminante y un nivel de significación determinados, es evidente que la potencia de la prueba puede aumentar al aumentar el tamaño de la muestra. En efecto, aumentar el tamaño de la muestra implica aumentar la información, lo que, a igualdad de las restantes condiciones ( $\xi$  y  $\alpha$ ), debe traducirse necesariamente en la posibilidad de adoptar decisiones con un menor riesgo de segunda especie. En la figura 5.32 se ha representado una familia de curvas de eficacia correspondientes a la prueba  $T\{m = m_0 \mid m \neq m_0\}$  para un mismo nivel de significación ( $\alpha$ ), una misma función discriminante ( $\xi = \bar{x}$ ) y distintos tamaños de muestra. Puede observarse que, a medida que aumenta el tamaño de la muestra, aumenta la potencia de la prueba, es decir, disminuye la probabilidad de error.

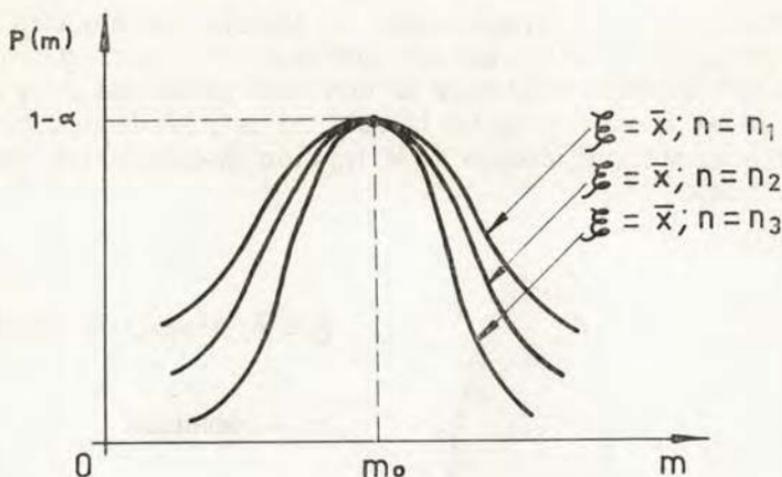


Fig. 5.32

Adoptada una función discriminante y un tamaño de muestra determinados, es posible aumentar la potencia de la prueba aumentando el valor del nivel de significación. Esto también resulta evidente toda vez que al cumplirse en toda prueba centrada las condiciones

$$\alpha(\theta) \leq \alpha \quad \forall \theta \in H_0$$

y

$$\beta(\theta) < 1 - \alpha \quad \forall \theta \in H_1$$

todo aumento de  $\alpha$  se traduce necesariamente en una disminución de  $\beta(\theta)$ , es decir, en un aumento de la potencia de la prueba. En la figura 5.33 se ha representado una familia de curvas de eficacia correspondientes a la prueba  $T\{m = m_0 \mid m \neq m_0\}$  para un mismo tamaño de muestra ( $n$ ) y una misma función discriminante ( $\xi = \bar{x}$ ) y distintos valores del nivel de significación. Puede observarse que, a medida que aumenta el nivel de significación, aumenta la potencia de la prueba.

El uso de las curvas de eficacia, según acabamos de ver, permite caracterizar la noción de prueba UMP, comparar entre sí distintas pruebas y analizar las consecuen-

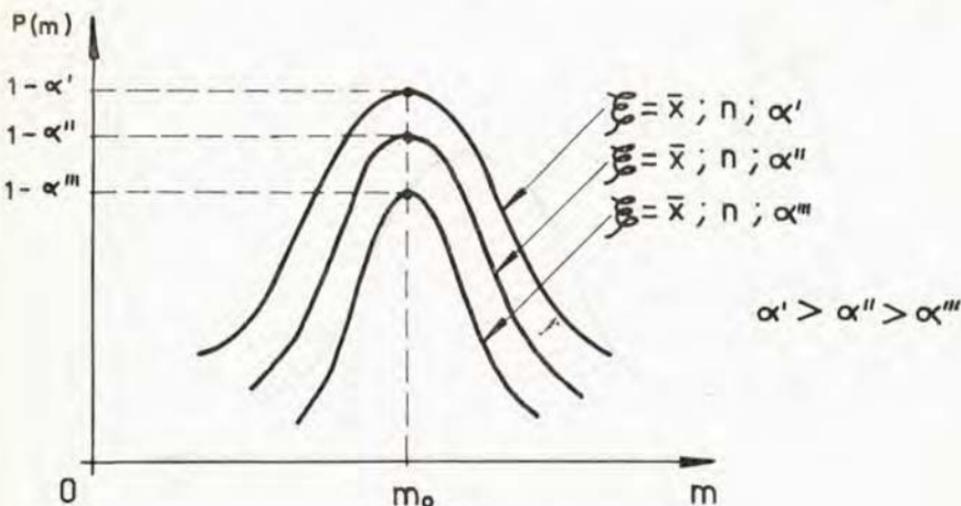


Fig. 5.33

cias de una modificación del nivel de significación o del tamaño de la muestra.

La curva de eficacia de una prueba permite también predecir lo que, en noción media, puede esperarse que ocurra en la práctica como consecuencia de su aplicación. Para centrar ideas, volvamos al caso de la prueba  $T\{m = m_0 \mid m \neq m_0\}$ , cuya curva de eficacia es la representada en la figura 5.34. Si el número de lotes sometidos a examen es  $N$  y todos ellos poseen una media igual a  $m_1$  (por supuesto totalmente desconocida para nosotros), la aplicación de la prueba  $T\{m = m_0 \mid m \neq m_0\}$  traerá como consecuencia que, en promedio,  $NP(m_1)$  lotes serán calificados como de media  $m_0$  y  $N[1 - P(m_1)]$  lotes serán calificados como de media distinta de  $m_0$ . Se comprende que esto tenga que ser así. Para no equivocarse nunca sería necesario que la curva de eficacia de la prueba tuviese la forma indicada en la figura 5.35 y, evidentemente, tal curva sólo puede ser obtenida para un tamaño de muestra infinito, lo que cae por supuesto fuera de las posibilidades prácticas y fuera del campo de aplicación de la estadística inductiva.

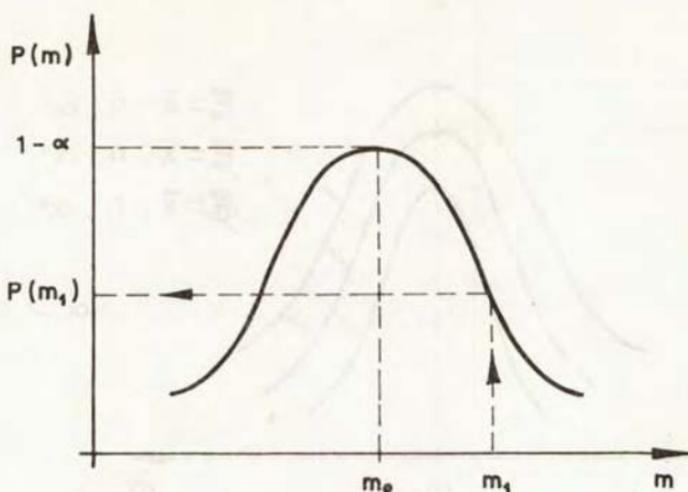


Fig. 5.34

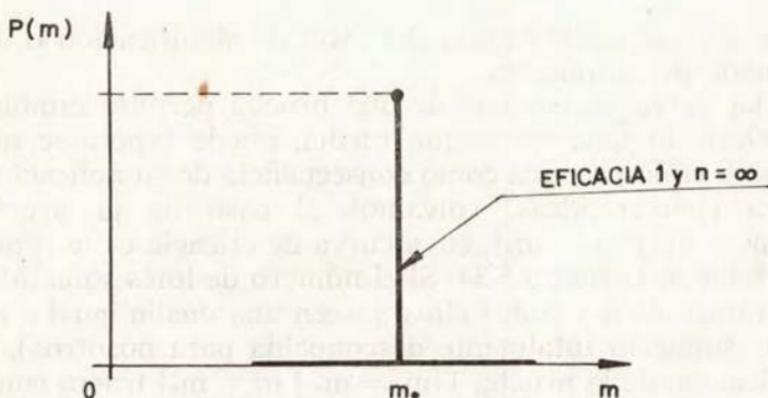


Fig. 5.35

Lo que sí puede y debe hacerse, si se juzga *a priori* que estos resultados esperados son mediocres, es modificar la prueba de manera que su eficacia aumente hasta el límite deseado. De esta forma el problema con el que se enfrenta en la práctica el experimentador no consiste en plantear una prueba y buscar su curva de eficacia, sino

en elegir la forma deseada de la curva de eficacia y tratar de buscar la prueba que más se ajuste a la misma.

La posibilidad de seguir este camino inverso será objeto de análisis y comentario en el párrafo siguiente.

### 5.7 PLATEAMIENTO DE UNA PRUEBA A PARTIR DE UNAS CONDICIONES DE EFICACIA PREESTABLECIDAS

La posibilidad de plantear una prueba a partir de unas condiciones de eficacia preestablecidas se basa en el hecho de que una prueba queda totalmente determinada dando:

- la función discriminante  $\xi$ ;
- la función densidad de probabilidad,  $f(\xi, \theta)$ , de  $\xi$  y
- dos puntos cualesquiera de la curva de eficacia.

En efecto, dado que la curva de eficacia de una prueba viene definida por la función

$$P(\theta) = \int_A f(\xi, \theta) d\xi$$

siempre será posible, dados dos puntos  $[\theta_1, P(\theta_1)]$  y  $[\theta_2, P(\theta_2)]$  de la misma (ver fig. 5.36), plantear y resolver el sistema de ecuaciones

$$P(\theta_1) = \int_A f(\xi, \theta_1) d\xi$$

$$P(\theta_2) = \int_A f(\xi, \theta_2) d\xi$$

despejando los valores frontera de la región de aceptación y el tamaño de la muestra.

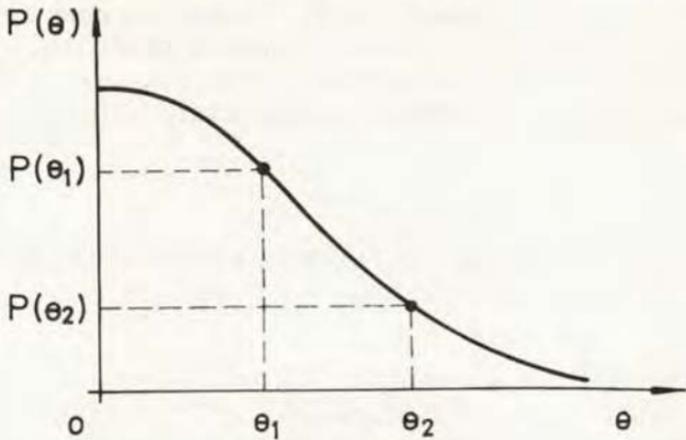


Fig. 5.36

Hemos afirmado que la resolución del sistema de ecuaciones es posible, al menos en teoría. En la práctica ocurre muchas veces que la resolución es sumamente complicada y debe recurrirse a métodos especiales de cálculo numérico o, en su defecto, a la adopción de soluciones aproximadas.

La elección de los dos puntos de la curva de eficacia de la prueba depende por completo de la naturaleza concreta del problema que se trate de resolver.

En general, uno de los puntos que se eligen es  $(\theta_0, 1 - \alpha)$ , siendo  $\theta_0$  el valor extremo del parámetro  $\theta$  bajo la hipótesis nula  $H_0$ , y  $\alpha$  el nivel de significación.

Supongamos el caso de una fabricación de ciertos dispositivos eléctricos en los que se utiliza cable de cobre cuya resistencia media, para poder garantizar el correcto funcionamiento de los mismos, debe ser como máximo de  $20 \Omega/\text{Km}$ . Se han recibido una serie de lotes de cable de cobre y se decide someterlos a un control de calidad mediante una prueba del tipo  $(m \leq m_0 \mid m > m_0)$ . Para plantear dicha prueba, empezaremos por tomar  $m_0 = 20$ .

El correspondiente riesgo  $\alpha$  viene siempre determinado por la gravedad de las consecuencias que puede traer consigo la adopción de una decisión equivocada. Así, por ejemplo, se podrá tomar según los casos  $\alpha = 0.001, 0.01,$

0.05, 0.10, 0.50, etc. Si el coste de una decisión errónea puede ser muy elevado, entonces deberá tomarse para  $\alpha$  un valor muy pequeño (por ejemplo  $\alpha = 0.001$ ). Si, por el contrario, el coste de una decisión errónea es muy bajo, podrán adoptarse para  $\alpha$  valores muy superiores. Un ejemplo del primer caso sería el que la decisión pudiese significar la detención o incluso el abandono de la fabricación de dispositivos eléctricos. Un ejemplo del segundo caso se presentaría si se tratase simplemente de escoger entre dos tipos de cable de cobre de características eléctricas muy similares y precios comparables.

La elección de las coordenadas  $(m_1, \beta)$  del segundo punto también viene determinada por la naturaleza del problema y el riesgo que se está dispuesto a aceptar. Se comprende que llegar a la conclusión de que la resistencia en  $\Omega/\text{Km}$  del cable de cobre es 20 cuando en realidad es 20.005 no tendrá ninguna repercusión práctica, pero el llegar a esa misma conclusión cuando en realidad es 25 puede tener muchísima importancia de cara a la calidad de la fabricación. Si consideramos que 25 es una calidad límite más allá de la cual ya no puede garantizarse el correcto funcionamiento de los dispositivos fabricados, convendrá que la prueba sea capaz de detectar esta calidad con una pequeña probabilidad de error. Si aceptamos correr un riesgo del 5 por 100 de que un lote de 25  $\Omega/\text{Km}$  sea dado como bueno, las coordenadas del segundo punto de la curva serán

$$m_1 = 25$$

$$\beta = 0.05$$

Como resumen podemos afirmar que es en cada caso la naturaleza del problema y la gravedad de las consecuencias que una decisión errónea puede ocasionar las que imponen la elección de los puntos  $(\theta_0, 1 - \alpha)$  y  $(\theta_1, \beta)$  de la curva de eficacia de la prueba (ver fig. 5.37).

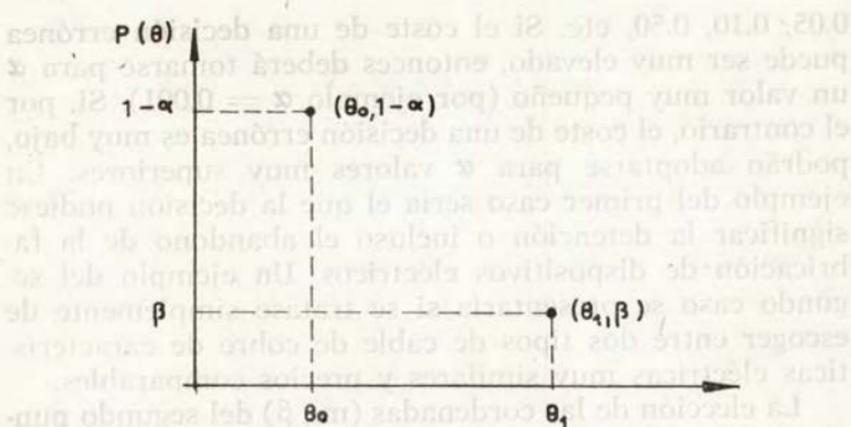


Fig. 5.37

Una vez elegidos estos puntos, la resolución del sistema de ecuaciones

$$1 - \alpha = \int_{\Delta} f(\xi, \theta_0) d\xi$$

$$\beta = \int_{\Delta} f(\xi, \theta_1) d\xi$$

permitirá encontrar la prueba deseada.

En los dos capítulos siguientes nos ocuparemos del planteamiento de pruebas con condiciones de eficacia preestablecidas, en algunos casos de gran interés práctico. Nos referiremos siempre a distribuciones normales que son las que aparecen con mayor frecuencia en el control de recepción y en el control en curso de fabricación.

## 5.8 PLANTEAMIENTO DE UNA PRUEBA POR EL METODO DE BAYES

En el planteamiento de la teoría de las pruebas estadísticas, realizado en los párrafos anteriores, no se ha hecho ninguna hipótesis relativa a la posible ley de probabilidad del parámetro desconocido  $\theta$ . Esta forma de obrar debe considerarse razonable, toda vez que  $\theta$  no es una variable aleatoria sino un parámetro, desconocido pero que vale lo que vale.

Ahora bien, algunas veces ocurre que la experiencia acumulada a lo largo de otras pruebas anteriores nos suministra información en torno a los posibles valores de  $\theta$ , resultando posible, de forma objetiva, atribuirle *a priori* una cierta ley de probabilidad.

En estos casos cabe preguntarse si el planteamiento de la prueba siguiendo el método clásico conducirá a la obtención de una regla de decisión óptima.

Además, en el planteamiento clásico no se tiene en cuenta el coste de la experimentación, es decir, el coste de obtención de la muestra y del valor muestral de la función discriminante. Tampoco se tienen en cuenta, al menos de forma explícita, las consecuencias económicas de las decisiones erróneas.

Ultimamente se ha desarrollado una teoría general, denominada teoría de los procesos de decisión, que incluye como un caso particular las teorías clásicas de la estimación y de la prueba de hipótesis. A partir de algunos resultados de esta teoría, es posible elaborar un método de construcción de pruebas de hipótesis teniendo en cuenta:

- una ley de probabilidad *a priori* relativa al parámetro  $\theta$ ;
- un coste de experimentación, y
- un coste para las decisiones erróneas.

Para mejor captar las ideas maestras de este método, denominado método de Bayes, nos referiremos al caso concreto de la prueba de la hipótesis  $H_0: \theta = \theta_0$ , contra la hipótesis  $H_1: \theta = \theta_1$ .

En lo que sigue adoptamos la siguiente nomenclatura:

- $\mu_0$ : probabilidad *a priori* del valor  $\theta = \theta_0$ .
- $\mu_1 = 1 - \mu_0$ : probabilidad *a priori* del valor  $\theta = \theta_1$ .
- $C_1$ : coste correspondiente al error de primera especie  $\alpha$ , es decir, coste que supone rechazar la hipótesis  $H_0$  siendo en realidad correcta.
- $C_0$ : coste correspondiente al error de segunda especie  $\beta$ , es decir, coste que supone aceptar la hipótesis  $H_0$  siendo en realidad falsa.
- $C_n$ : coste de extracción de la muestra y determinación del valor muestral de la función discriminante.

Todos estos conceptos pueden resumirse en el cuadro adjunto:

		Decisión		Coste de la decisión		Coste del muestreo	Probabilidades <i>a priori</i>
		$d_0$	$d_1$	$d_0$	$d_1$		
Hipótesis verdadera	$H_0$	Ningún error	$\alpha$	0	$C_1$	$C_n$	$\mu_0$
	$H_1$	$\beta$	Ningún error	$C_2$	0	$C_n$	$\mu_1$

El método bayesiano de decisión consiste en adoptar, a la vista de una muestra aleatoria  $M$  de extensión  $n$ , la decisión para la cual la esperanza matemática del coste es mínima.

Para ello se hace uso de la información adicional que, en relación con la ley de probabilidad de  $\theta$ , aporta la muestra aleatoria extraída. En virtud del teorema de Bayes, es posible calcular, a partir de las probabilidades

a priori iniciales y de la información adicional, las nuevas probabilidades a posteriori, mediante la expresión

$$P_r\{H_i | M\} = \frac{P_r\{H_i\}P_r\{M | H_i\}}{P_r\{M\}}$$

Así, para  $H_0$ , tendremos:

$$\begin{aligned} p_0 = P_r\{H_0 | M\} &= \frac{\mu_0 L(M, \theta_0) dM}{\mu_0 L(M, \theta_0) dM + \mu_1 L(M, \theta_1) dM} = \\ &= \frac{\mu_0 L(M, \theta_0)}{\mu_0 L(M, \theta_0) + \mu_1 L(M, \theta_1)} \end{aligned}$$

De igual forma, para  $H_1$ , resultará

$$p_1 = P_r\{H_1 | M\} = \frac{\mu_1 L(M, \theta_1)}{\mu_0 L(M, \theta_0) + \mu_1 L(M, \theta_1)}$$

$L(M, \theta_0)$  y  $L(M, \theta_1)$  no son otra cosa que las funciones de verosimilitud de la muestra  $M$ , es decir, las funciones densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $M$  bajo las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  respectivamente.

Una vez transformadas las probabilidades a priori,  $\mu_0$  y  $\mu_1$ , en probabilidades a posteriori,  $p_0$  y  $p_1$ , que incluyen la información adicional suministrada por la muestra, podemos pasar a la determinación de los costes esperados como consecuencia de cada decisión.

Desde luego, sea cual fuere la decisión siempre existirá el coste fijo  $c_n$  de experimentación.

Si se adopta la decisión  $d_0$ , la esperanza matemática del coste total será:

$$E[C(d_0)] = c_n \times 1 + 0p_0 + c_0p_1 = c_n + c_0p_1$$

toda vez que si la hipótesis correcta es realmente  $H_0$  (probabilidad  $p_0$ ) no incurriremos en ningún coste, mientras que si la hipótesis correcta es  $H_1$ , incurriremos en un coste  $c_0$ .

De igual forma, si se adopta la decisión  $d_1$ , la esperanza matemática del coste total será

$$E[C(d_1)] = c_n \times 1 + c_1 p_0 + 0 p_1 = c_n + c_1 p_0$$

Teniendo en cuenta los valores de  $p_0$  y  $p_1$ , estas esperanzas matemáticas pueden escribirse en la forma

$$E[C(d_0)] = c_n + c_0 \frac{\mu_1 L(M, \theta_1)}{\mu_0 L(M, \theta_0) + \mu_1 L(M, \theta_1)}$$

$$E[C(d_1)] = c_n + c_1 \frac{\mu_0 L(M, \theta_0)}{\mu_0 L(M, \theta_0) + \mu_1 L(M, \theta_1)}$$

El método de Bayes consiste en adoptar la siguiente regla de decisión:

— si el coste medio  $E[C(d_0)]$  es igual o inferior al coste medio  $E[C(d_1)]$ , tomar la decisión  $d_0$ , es decir, aceptar la hipótesis  $H_0$ ;

— en caso contrario, tomar la decisión  $d_1$ , es decir, rechazar la hipótesis  $H_0$  (y en consecuencia aceptar la hipótesis  $H_1$ ).

La condición de aceptación para  $H_0$  es, pues

$$E[C(d_0)] \leq E[C(d_1)]$$

es decir

$$c_0 \mu_1 L(M, \theta_1) \leq c_1 \mu_0 L(M, \theta_0)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{L(M, \theta_1)}{L(M, \theta_0)} \leq \frac{c_1}{c_0} \frac{\mu_0}{1 - \mu_0} = K$$

Esta expresión permite definir una región de aceptación para  $H_0$  en la forma

$$A = \left\{ \frac{L(M, \theta_1)}{L(M, \theta_0)} \leq K \right\}$$

y adoptar la siguiente regla de decisión:

— si  $M \in A$ , tomar la decisión  $d_0$ , es decir, aceptar la hipótesis  $H_0$ ;

— si  $M \notin A$ , tomar la decisión  $d_1$ , es decir, rechazar la hipótesis  $H_0$  y, en consecuencia, aceptar la hipótesis  $H_1$ .

Este resultado muestra la analogía entre la teoría clásica y la teoría de las funciones de decisión. En efecto, ambas conducen, para el caso de dos hipótesis simples, a una región de aceptación de la forma

$$A = \left\{ \frac{L(M, \theta_1)}{L(M, \theta_0)} \leq c \right\}$$

Sin embargo, sus principios son completamente distintos.

Lo arbitrario del método clásico reside en la elección del nivel de significación. Por otra parte, el coeficiente  $c$  carece de una significación concreta.

En el método bayesiano, lo arbitrario reside en las probabilidades *a priori*  $\mu_0$  y  $\mu_1$ . Por el contrario, el coeficiente  $c$ , en la medida en que se puedan asignar costes a los errores de primera y segunda especie, tiene una interpretación económica. En efecto, la relación

$$c_1 \mu_0 / c_0 (1 - \mu_0)$$

puede ser escrita en la forma

$$\frac{c_1}{c_0} \frac{\mu_0}{1 - \mu_0} = \frac{E[C^*(d_1)]}{E[C^*(d_0)]}$$

es decir, en forma de cociente entre las esperanzas matemáticas de los costes de las decisiones  $d_1$  y  $d_0$  con la ley de probabilidad *a priori*, es decir, antes de haber efectuado experiencia alguna.

Si se conoce la relación  $c_1/c_0$ , se puede asociar a todo valor  $\alpha$  del nivel de significación una probabilidad  $\mu_0$  para la hipótesis  $H_0$ , a partir de la expresión

$$\frac{c_1}{c_0} \frac{\mu_0}{1 - \mu_0} = c_\alpha$$

es decir

$$\mu_0 = 1 - \frac{c_1/c_0}{\frac{c_1}{c_0} + c_\alpha}$$

Dado que  $\mu_0$  es una función creciente de  $c_\alpha$ , el imponer a  $\alpha$  un valor muy pequeño, al emplear el método de Neyman, equivale a admitir implícitamente que la hipótesis  $H_0$  es privilegiada y no debe ser abandonada sino por razones indiscutibles.

También es posible asociar a toda solución de Bayes un riesgo de primera especie  $\alpha$ .

Estas analogías entre ambas teorías muestran la existencia de una profunda relación entre las mismas. Ninguna de ellas se impone a la otra. Antes bien, de su síntesis brota una mejor comprensión de sus fundamentos y, en consecuencia, la posibilidad de aplicarlas en la práctica de una manera más racional.

Como ejemplo de aplicación supongamos una variable aleatoria normal  $N(m, \sigma)$  de desviación tipo desconocida. Se trata de probar la hipótesis  $H_0: m = m_0$ , contra la hipótesis  $H_1: m = m_1$ . Las probabilidades *a priori* para  $H_0$  y  $H_1$  son  $\mu_0$  y  $\mu_1$  y los costes correspondientes a los riesgos de primera y segunda especie son  $c_1$  y  $c_0$  respectivamente.

En este caso

$$K = \frac{c_1}{c_0} \frac{\mu_0}{1 - \mu_0}$$

$$\frac{L(M, \theta_1)}{L(M, \theta_0)} = \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} [\Sigma(x_i - m_0)^2 - \Sigma(x_i - m_1)^2] \right\}$$

lo que se traduce en la relación

$$\frac{1}{2\sigma^2} [\Sigma(x_i - m_0)^2 - \Sigma(x_i - m_1)^2] \leq \ln K$$

de la que resulta la región de aceptación

$$A = \left\{ \bar{x} \leq \frac{m_0 + m_1}{2} + \frac{\sigma^2 \ln K}{n(m_1 - m_0)} \right\} \quad \text{si } m_1 > m_0$$

y

$$A = \left\{ \bar{x} \geq \frac{m_0 + m_1}{2} + \frac{\sigma^2 \ln K}{n(m_0 - m_1)} \right\} \quad \text{si } m_1 < m_0$$

o lo que es lo mismo

$$A = \{ \bar{x} \leq m'_L \} \quad \text{si } m_1 > m_0$$

y

$$A = \{ \bar{x} \geq m''_L \} \quad \text{si } m_1 < m_0$$

que coinciden formalmente con las encontradas en el párrafo 5.3, con la única diferencia de que  $\ln c_a$  está sustituido por  $\ln K$ , de valor numérico directamente calculable.

El correspondiente riesgo de primera especie será

$$\alpha = P_r\{\text{Aceptar } H_1 \mid H_0 \text{ verdadera}\}$$

En consecuencia

$$\alpha = P_r\{\bar{x} \geq m'_L \mid m = m_0\} \quad \text{si } m_1 > m_0$$

y

$$\alpha = P_r\{\bar{x} \leq m''_L \mid m = m_0\} \quad \text{si } m_1 < m_0$$

es decir

$$\alpha = 1 - \phi\left(\frac{m'_L - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad \text{si } m_1 > m_0$$

y

$$\alpha = \phi\left(\frac{m''_L - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad \text{si } m_1 < m_0$$

$$A = \left\{ \frac{m_1 + m_2}{2} > m_0 \right\}$$

si  $m_1 > m_0$

si  $m_1 < m_0$

si  $m_1 < m_0$

que coinciden formalmente con las encontradas en el pá-  
rrafo 2.3, con la única diferencia de que  $K_0$  está susti-  
tuido por  $K_1$ , el valor numérico directamente calcu-  
ladas.

El correspondiente riesgo de primera especie será

$$\alpha = P(\text{Aceptar } H_1 \mid H_0 \text{ verdadera})$$

En consecuencia

$$\alpha = P(\bar{X} \geq m'_L \mid m = m_0) \quad \text{si } m_1 > m_0$$

$$\alpha = P(\bar{X} < m''_L \mid m = m_0) \quad \text{si } m_1 < m_0$$

## CAPITULO 6

### *PRUEBAS DE HIPOTESIS RELATIVAS A LA MEDIA O A LA DESVIACION TIPO DE UNA DISTRIBUCION NORMAL*

#### 6.1 INTRODUCCION

El objeto de este capítulo es la construcción de pruebas de hipótesis relativas a un parámetro (media o desviación tipo) de una distribución normal, partiendo de unas condiciones de eficacia preestablecidas.

Para el planteamiento de las pruebas seguiremos en todos los casos, al menos de forma implícita, el siguiente camino:

— elegir, primero, dos puntos de la curva de eficacia de la prueba, de acuerdo con la naturaleza del problema y la gravedad de las consecuencias que la adopción de una decisión errónea puede ocasionar;

— adoptar, después, una función discriminante adecuada,  $\xi$ , cuya ley de probabilidad sea perfectamente conocida y que conduzca, siempre que sea posible, a una prueba uniformemente de máxima potencia (UMP);

— plantear, más tarde, la ecuación de la curva de eficacia de la prueba, sustituyendo en ella las coordenadas de los dos puntos elegidos y obteniendo de esta forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

— resolver, finalmente, de forma analítica, numérica o gráfica dicho sistema de ecuaciones, determinando el tamaño de la muestra aleatoria a utilizar en el plan de experimentación y los límites de la región de aceptación de la hipótesis sometida a prueba.

## 6.2 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL

### 6.2.1 Especificación unilateral superior

Se trata de probar si la media de una distribución normal  $N(m, \sigma)$  de desviación tipo conocida, es igual o menor que un valor especificado  $m_0$ ; es decir, se trata de probar la hipótesis  $H_0: m \leq m_0$ , contra la hipótesis  $H_1: m > m_0$ . Se desea que cuando la media de la distribución sea realmente igual o menor que  $m_0$ , exista como mínimo una casi seguridad  $1 - \alpha$  de llegar a esta conclusión, mientras que, cuando la media de la distribución sea igual a  $m_1$ , exista tan sólo una probabilidad  $\beta$  de creer, erróneamente, que la media es igual o menor que  $m_0$ .

La curva de eficacia de la prueba debe pasar pues por los puntos  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_1, \beta)$  (ver fig. 6.1).

De acuerdo con lo expuesto en el párrafo 4.5.2, si tomamos como función discriminante la media muestral  $\bar{x}$ , será posible obtener una prueba uniformemente de máxima potencia definida por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_\alpha = \{\bar{x} \leq m_L\}$$

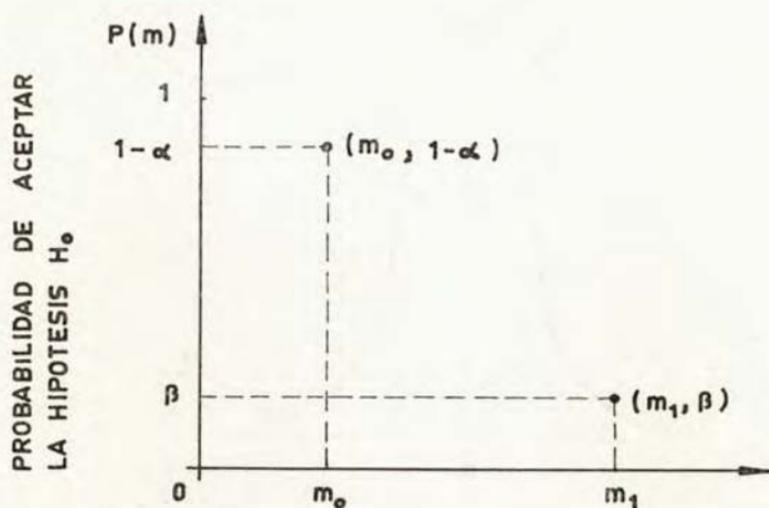


Fig. 6.1

siendo  $m_L$  un límite tal que

$$P_r\{\bar{X} > m_L \mid m = m_0\} = \alpha$$

Dado que la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $\bar{x}$  es normal  $N(m, \sigma/\sqrt{n})$ , siendo  $m$  y  $\sigma$  la media y la desviación tipo poblacionales, el límite  $m$  podrá calcularse a partir de la expresión (ver fig. 6.2)

$$m_L = m_0 + K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

siendo  $K_\alpha$  la cuantila de orden  $1 - \alpha$  de la distribución normal  $N(0, 1)$ .

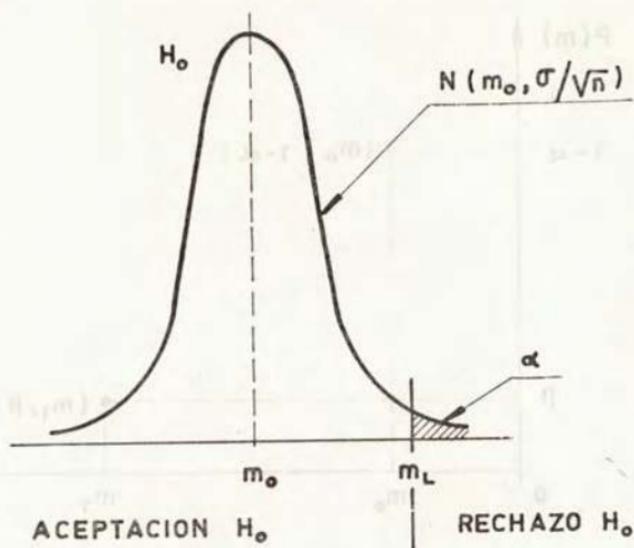


Fig. 6.2

En estas condiciones, si la media de la distribución es realmente igual a  $m$  (mayor que  $m_0$ ) existirá una probabilidad

$$P(m) = P_r\{\bar{x} \leq m_L \mid m = m\}$$

de aceptar, indebidamente, la hipótesis  $H_0$  (ver fig. 6.3), y la función de eficacia de la prueba vendrá definida por la expresión

$$P(m) = \phi\left(\frac{m_L - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

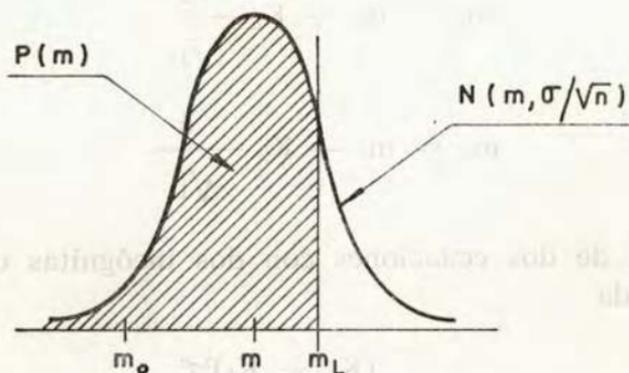


Fig. 6.3

Dado que la curva de eficacia de la prueba debe pasar por los puntos  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_1, \beta)$ , podemos escribir que

$$P(m_0) = \phi\left(\frac{m_L - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P(m_1) = \phi\left(\frac{m_L - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \beta$$

condiciones que se traducen en el sistema de ecuaciones

$$\frac{m_L - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} = K_\alpha$$

$$\frac{m_L - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} = K_{1-\beta} = -K_\beta$$

o lo que es lo mismo

$$m_L = m_0 + K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$m_L = m_1 - K_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, resuelto, da

$$n = \frac{(K_\alpha + K_\beta)^2 \sigma^2}{(m_1 - m_0)^2}$$

$$m_L = \frac{m_1 K_\alpha + m_0 K_\beta}{K_\alpha + K_\beta}$$

que son el tamaño de muestra a adoptar y el límite finito del intervalo de aceptación para la hipótesis  $H_0$ .

A idéntico resultado podríamos haber llegado razonando directamente sobre la figura 6.4. En efecto, de su análisis se deduce inmediatamente que

$$m_L = m_0 + K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$m_L = m_1 - K_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

sistema de ecuaciones idéntico al obtenido más arriba.

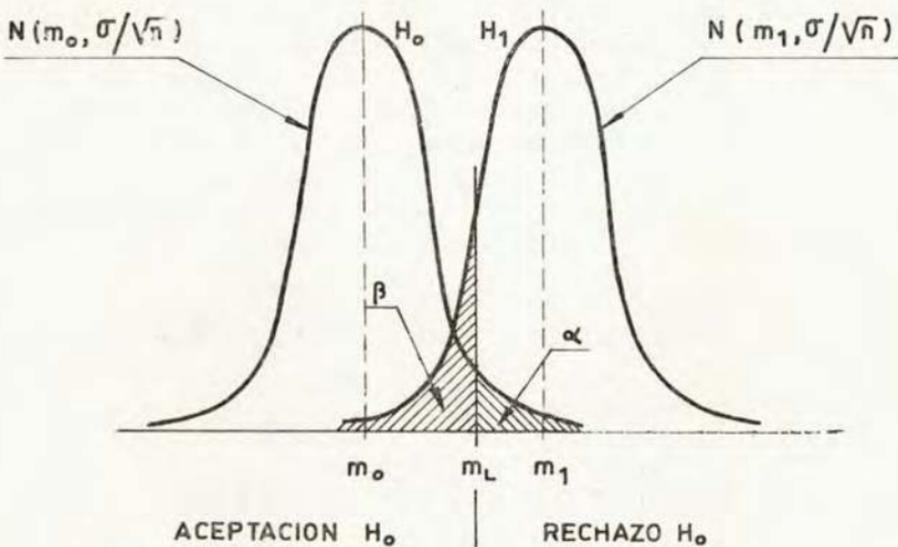


Fig. 6.4

En consecuencia la prueba consistirá en:

- determinar los valores  $n$  y  $m_L$ ;
- extraer una muestra aleatoria de extensión  $n$  y calcular la media muestral correspondiente

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- si  $\bar{x} \leq m_L$  aceptar la hipótesis  $H_0$ ;
- si  $\bar{x} > m_L$  rechazar la hipótesis  $H_0$ , toda vez que la probabilidad de que sea cierta a la vista de los resultados experimentales obtenidos es muy pequeña ( $\alpha$  como máximo).

Al aplicar la fórmula

$$n = \frac{(K_\alpha + K_\beta)^2 \sigma^2}{(m_1 - m_0)^2}$$

se obtendrá en general un número fraccionario. Dado que el tamaño de muestra debe ser necesariamente un número entero, deberá procederse a redondear por exceso el resultado obtenido. Este redondeo se traduce siempre en una disminución de los riesgos  $\alpha$  y  $\beta$ . Para aclarar esta circunstancia refirámonos al caso concreto de una distribución normal  $N(m, 2)$  y supongamos que las condiciones de eficacia deseadas sean:

$$\begin{array}{lll} m_0 = 20 & \alpha = 0.05 & (K_\alpha = 1.645) \\ m_1 = 22 & \beta = 0.10 & (K_\beta = 1.282) \end{array}$$

En estas condiciones

$$n = \left[ \frac{(1.645 + 1.282)2}{22 - 20} \right]^2 = 8.567$$

es decir, deberemos tomar  $n = 9$ .

Por otra parte

$$m_L = \frac{20 \times 1.282 + 22 \times 1.645}{1.645 + 1.282} = 21.124$$

Al adoptar como tamaño de la muestra y como límite de la región de aceptación los valores 9 y 21.124 respectivamente, los riesgos de error reales serán inferiores a los establecidos en el enunciado. En efecto

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \phi\left(\frac{m_L - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{21.124 - 20}{2\sqrt{9}}\right) = \\ &= 0.046 < 0.05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \phi\left(\frac{m_L - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \phi\left(\frac{21.124 - 22}{2\sqrt{9}}\right) = \\ &= 0.094 < 0.10 \end{aligned}$$

Si deseásemos que, para un tamaño de muestra  $n = 9$ , la curva de eficacia pasase por el punto  $(20, 0.95)$ , es decir, que el nivel de significación  $\alpha$  fuese del 5 por 100, deberíamos modificar el valor del límite  $m_L$  de la región de aceptación. El nuevo valor de  $m_L$  sería

$$m_L = m_0 + K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 + 1.645 \frac{2}{\sqrt{9}} = 21.130$$

En estas condiciones, el correspondiente valor del riesgo de error de segunda especie  $\beta$  sería

$$\beta = \phi\left(\frac{m_L - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \phi\left(\frac{21.130 - 22}{2/\sqrt{9}}\right) = 0.097$$

### 6.2.2 Especificación unilateral inferior

En este caso se trata de probar la hipótesis  $H_0: m \geq m_0$  contra la hipótesis  $H_1: m < m_0$ . Los dos puntos elegidos de la curva de eficacia son  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_1, \beta)$  (ver fig. 6.5).

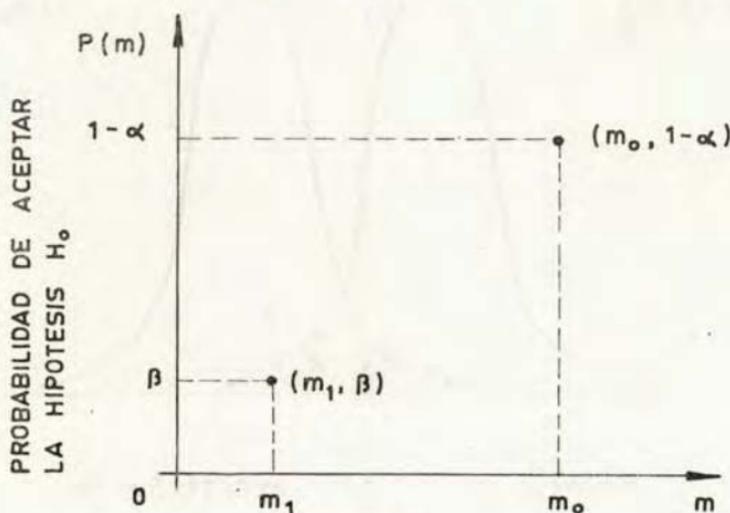


Fig. 6.5

La región de aceptación para la hipótesis  $H_0$  será

$$A_\alpha = \{\bar{x} \geq m_L\}$$

siendo  $m_L$  un límite tal que

$$Pr\{\bar{x} < m_L \mid m = m_0\} = \alpha$$

Del análisis de la figura 6.6 se deduce inmediatamente que

$$m_L = m_0 - K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$m_L = m_1 + K_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

sistema de dos ecuaciones incógnitas que, resuelto, da

$$n = \frac{(K_\alpha + K_\beta)^2 \sigma^2}{(m_0 - m_1)^2}$$

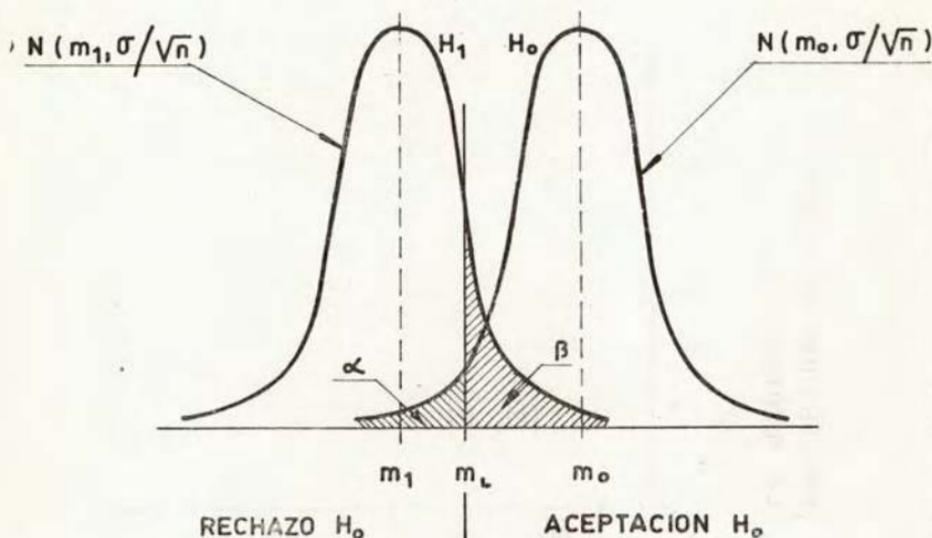


Fig. 6.6

$$m_L = \frac{m_1 K_\alpha + m_0 K_\beta}{K_\alpha + K_\beta}$$

resultado idéntico al obtenido en el caso de especificación unilateral superior.

### 6.2.3 Construcción de las curvas de eficacia

Una vez definido el tamaño de la muestra y el límite de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ , es fácil determinar la curva de eficacia de la prueba. En efecto, en el caso de la prueba  $T\{m \leq m_0 \mid m > m_0\}$ , la función de eficacia, según hemos visto anteriormente, es

$$P(m) = P_r\{\bar{x} \leq m_L \mid m = m\} = \phi\left(\frac{m_L - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

y para obtener la curva de eficacia bastará representar la función  $P(m)$  para los distintos valores de  $m$ . Dicha curva tendrá la forma indicada en la figura 6.7.

En el caso de la prueba  $T\{m \geq m_0 \mid m < m_0\}$  la función de eficacia es (ver fig. 6.8)

$$\begin{aligned} P(m) &= P_r\{\bar{x} \geq m_L \mid m = m\} = 1 - \phi\left(\frac{m_L - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \\ &= \phi\left(\frac{m - m_L}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

y la curva de eficacia tendrá la forma indicada en la figura 6.9.

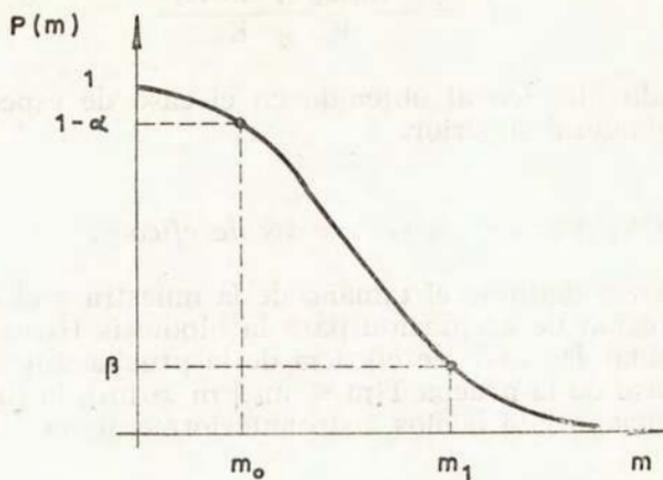


Fig. 6.7

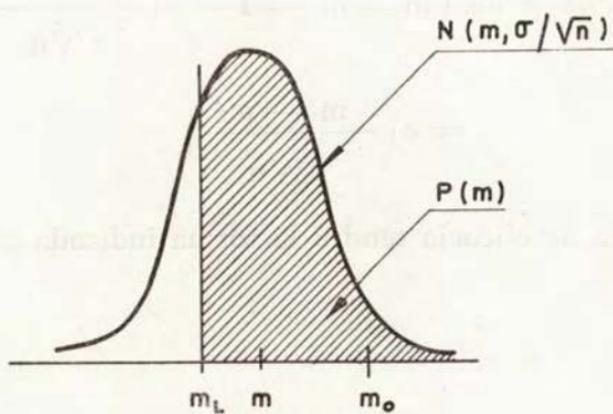


Fig. 6.8

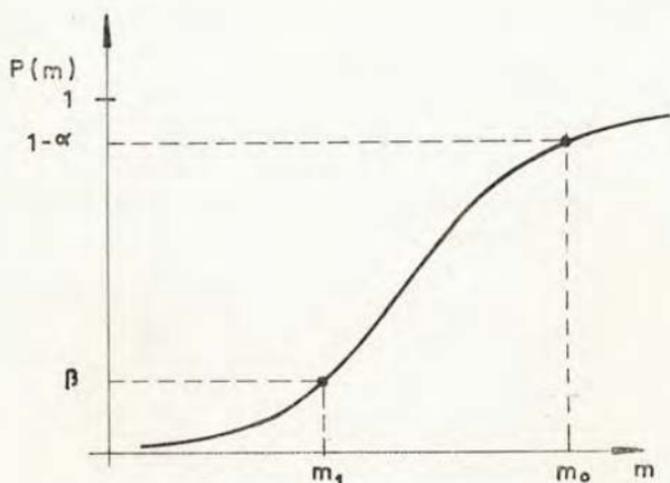


Fig. 6.9

Tal como han sido definidas, las curvas de eficacia correspondientes a las pruebas con especificación unilateral superior e inferior dependen de los valores adoptados por  $\sigma$  y  $m_0$  y, en consecuencia, son diferentes para cada problema particular. Pueden obtenerse unas curvas de eficacia independientes de  $\sigma$  y  $m_0$  y, en consecuencia, válidas para cualquier problema (curvas universales), efectuando un cambio de variable adecuado. En efecto, en el caso de la prueba  $T\{m \leq m_0 \mid m > m_0\}$  la función de eficacia es

$$P(m) = \phi\left(\frac{m_L - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

y como

$$m_L = m_0 + K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

resulta que

$$\frac{m_L - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{m_0 - m}{\sigma} \sqrt{n} + K_\alpha$$

De igual forma, en el caso de la prueba  $T\{m \geq m_0 \mid m < m_0\}$  la función de eficacia es

$$P(m) = \phi\left(\frac{m - m_L}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

y

$$m_L = m_0 - K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

por lo que

$$\frac{m - m_L}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} + K_\alpha$$

Si llamamos  $d$  al valor absoluto reducido de la desviación respecto a  $m_0$  de la media real  $m$  de la distribución, es decir,

$$d = \frac{|m - m_0|}{\sigma}$$

podremos escribir en el caso de la prueba  $T\{m \leq m_0 \mid m > m_0\}$

$$\frac{m_L - m}{\sigma/\sqrt{n}} = -d\sqrt{n} + K_\alpha$$

toda vez que  $m_0 - m < 0$ .

Para la prueba  $T\{m \geq m_0 \mid m < m_0\}$  podremos escribir

$$\frac{m - m_L}{\sigma/\sqrt{n}} = -d\sqrt{n} + K_\alpha$$

ya que en este caso  $m - m_0 < 0$ .

En consecuencia, ambas funciones de eficacia podrán escribirse en la forma común

$$P(d) = \phi(-d\sqrt{n} + K_\alpha)$$

y su representación gráfica será la indicada en la figura 6.10.

En las tablas 8.1, 2, 3, 4, 5 y 6, calculadas por el autor, se dan los valores de esta función de eficacia para una extensa gama de valores de  $d$  y  $n$ , y niveles de significación del 1 % y del 5 %.

En las figuras 6.11 y 6.12 se han representado los correspondientes haces de curvas de eficacia para algunos valores de  $n$ .

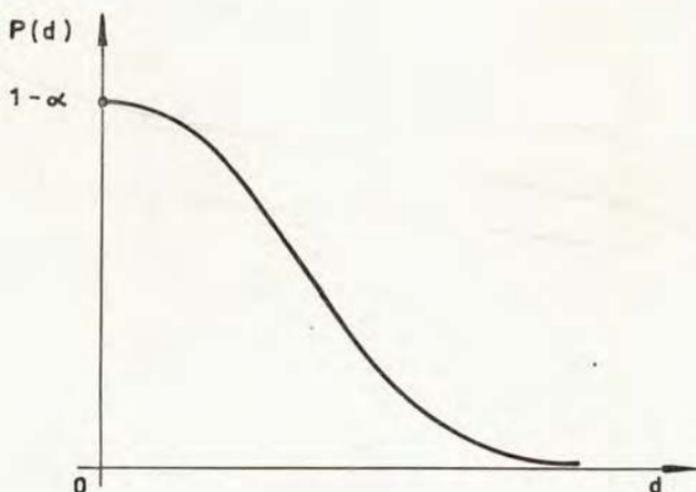
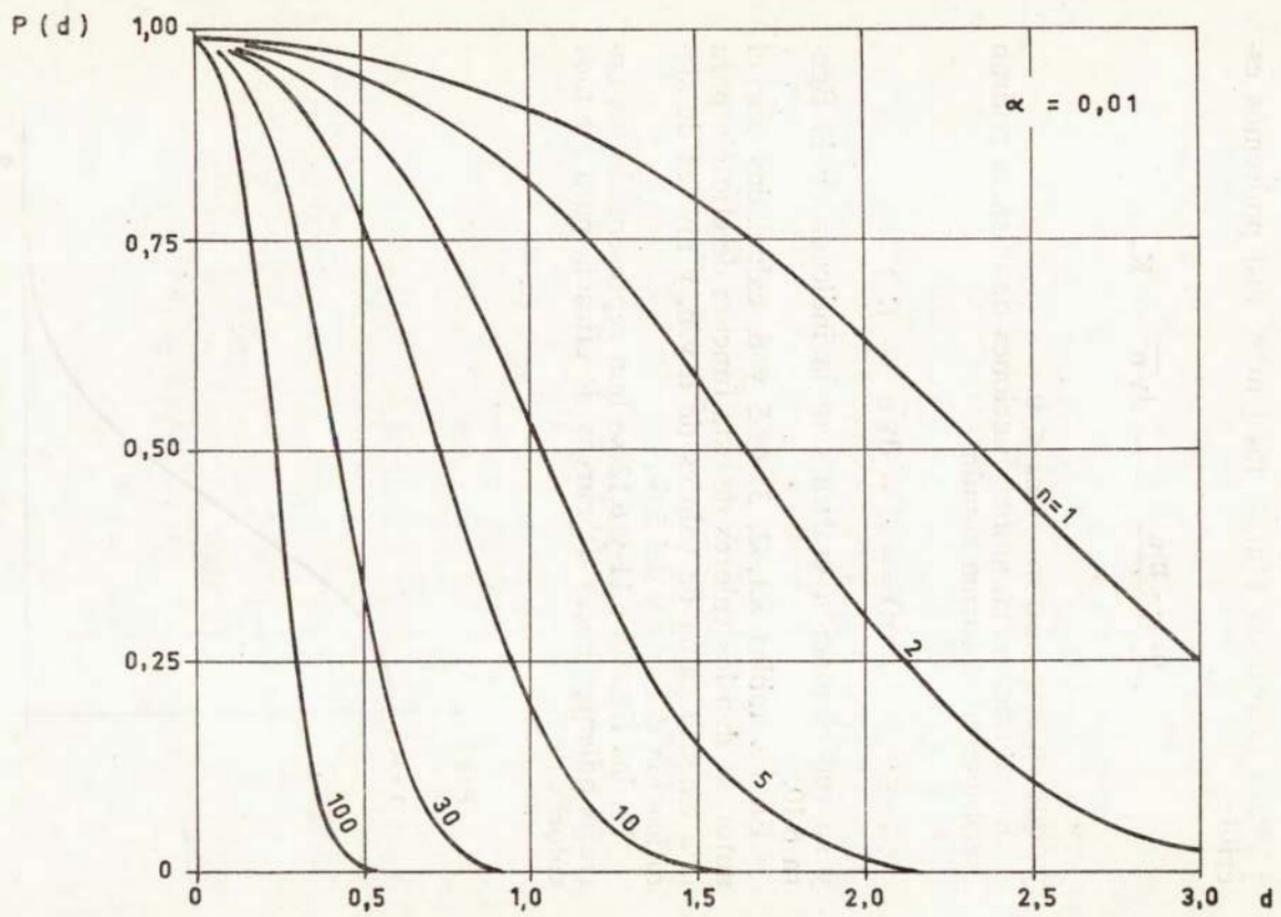


Fig. 6.10

Fig. 6.11



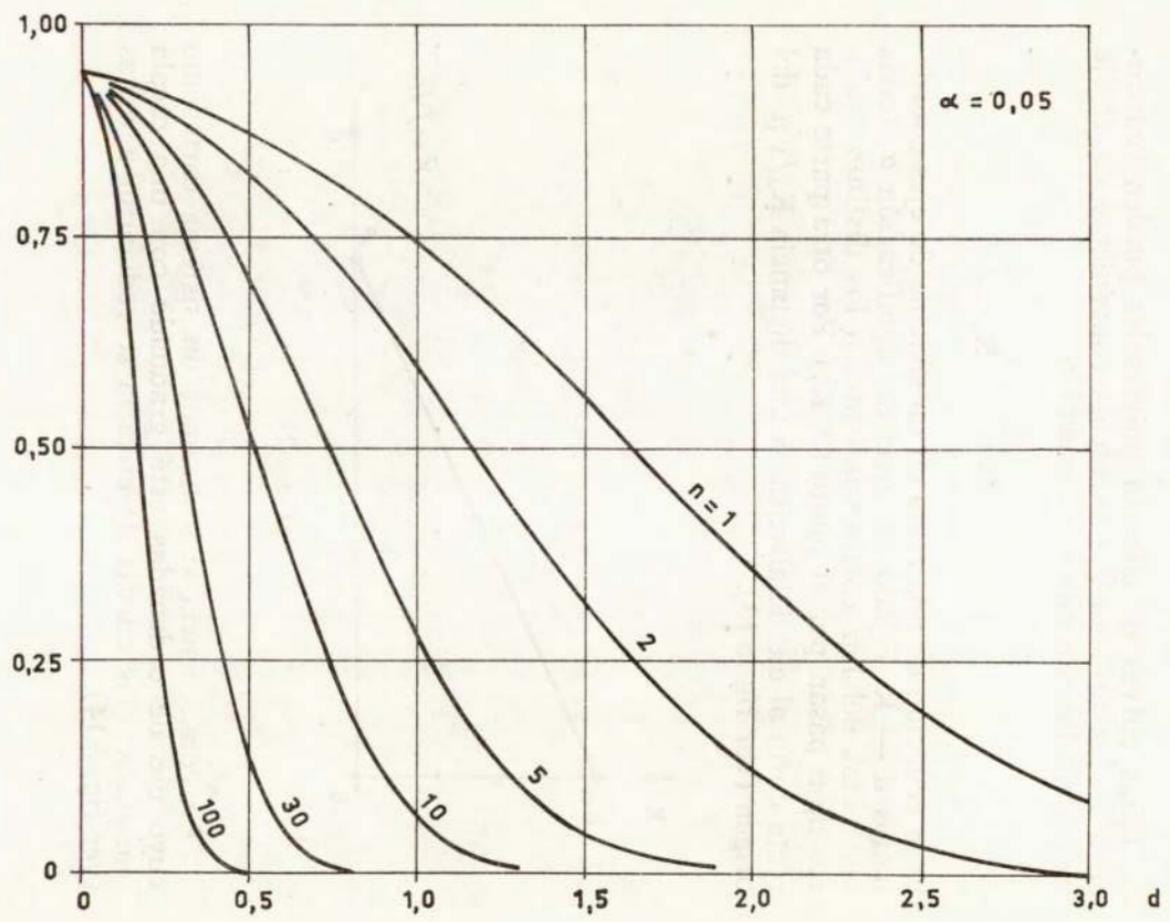


Fig. 6.12

Estas curvas de eficacia universales pueden reducirse a rectas utilizando una escala conveniente en el eje de ordenadas. En efecto, la ecuación

$$K = -d\sqrt{n} + K_{\alpha}$$

es la ecuación de una recta en un sistema de ejes coordenados  $d - K$ . Fijado un nivel de significación  $\alpha$ , todas las rectas del haz correspondientes a los distintos valores de  $n$  pasan por el punto  $(0, K_{\alpha})$ . Por otra parte cada recta corta al eje de abscisas a una distancia  $K_{\alpha}/\sqrt{n}$  del origen (ver fig. 6.13).

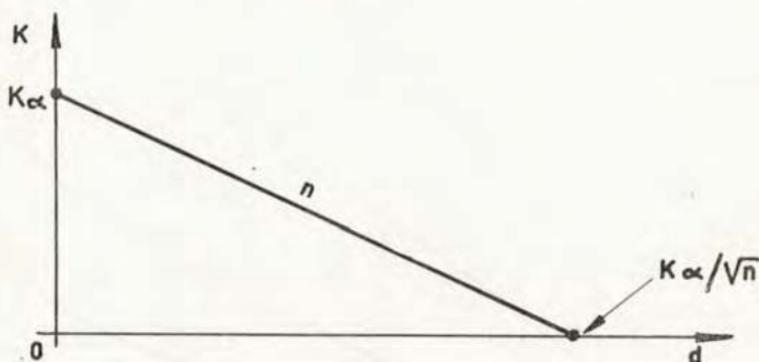


Fig. 6.13

En consecuencia si utilizamos un sistema cartesiano cuyo eje de ordenadas esté graduado con una escala gaussiana<sup>1</sup>, las curvas de eficacia se reducirán a rectas (ver fig. 6.14).

<sup>1</sup> Para construir una escala gaussiana basta graduar el eje según valores uniformes  $K$  y sustituir más tarde cada valor  $K$  por su correspondiente valor  $\phi(K)$ .

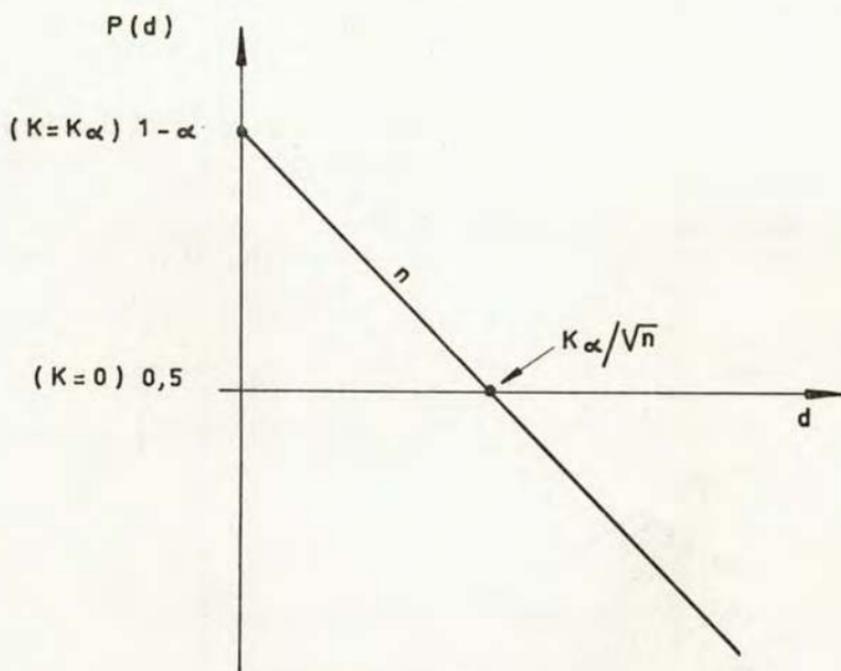


Fig. 6.14

En las figuras 6.15 y 6.16 se han representado los haces de curvas de las figuras 6.11 y 6.12 utilizando una escala gaussiana en el eje de ordenadas.

Si en vez de considerar la variable  $d$ , adoptamos como variable independiente

$$\Delta = d\sqrt{n}$$

resultan unas curvas de eficacia aún más generales, dependientes únicamente del nivel de significación. La ecuación

$$K = -d\sqrt{n} + K_\alpha$$

se convierte en la ecuación

$$K = -\Delta + K_\alpha$$

y el haz de rectas correspondiente a cada nivel de significación  $\alpha$  se reduce a una recta única que pasa por los puntos  $(0, K_\alpha)$  y  $(K_\alpha, 0)$  en un sistema de ejes  $\Delta - K$ . Si se utiliza escala gaussiana en el eje de ordenadas, la recta pasa por los puntos  $(0, 1 - \alpha)$  y  $(K_\alpha, 0.5)$ , tal como

$P(d)$

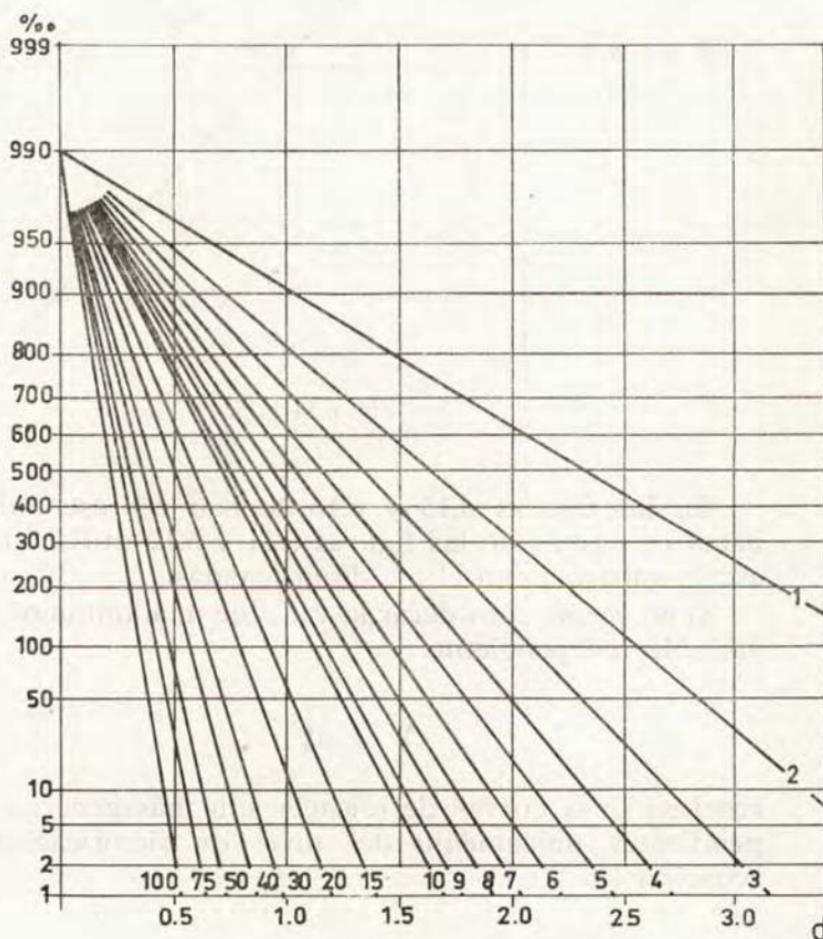


Fig. 6.15

puede observarse en la figura 6.17, en la que se han representado las rectas correspondientes a  $\alpha = 0.05$  y  $\alpha = 0.01$ . En la tabla 9 se dan los valores de la variable  $\Delta$  para distintos valores de  $P(\Delta)$ . La utilización de esta tabla permite determinar rápidamente el tamaño de muestra a utilizar en una prueba que debe cumplir con unas condiciones de eficacia preestablecidas.

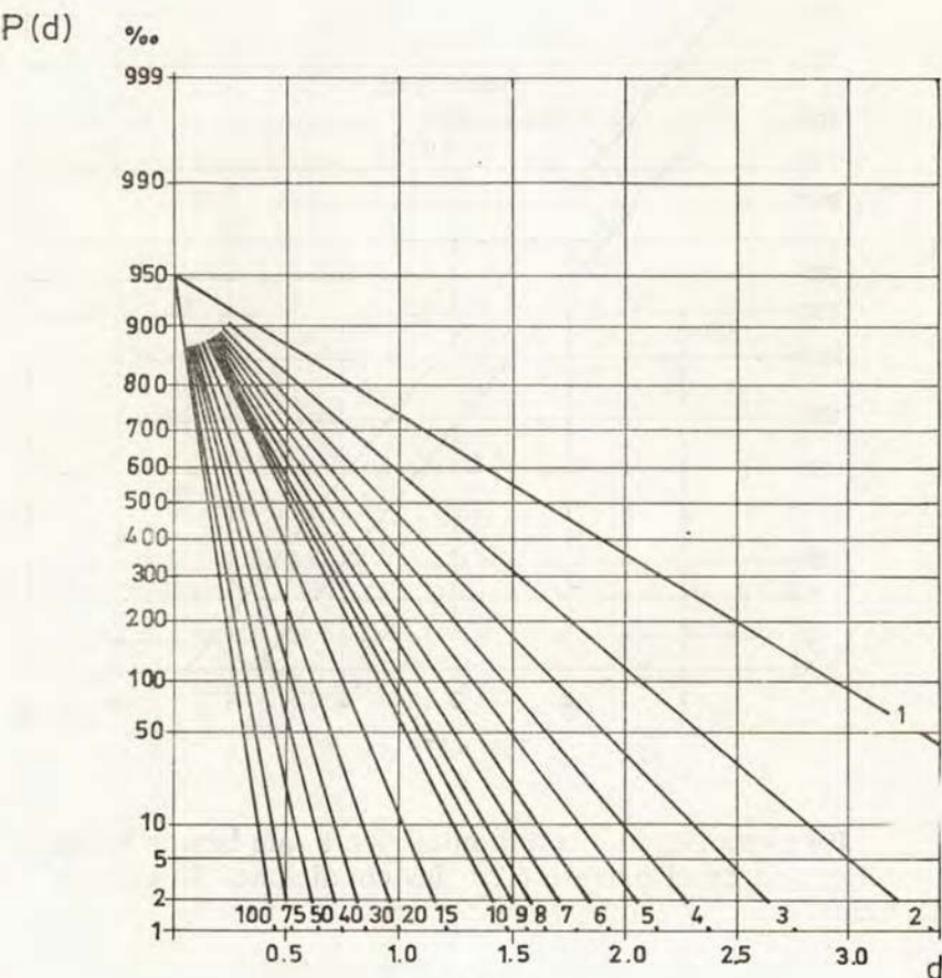


Fig. 6.16

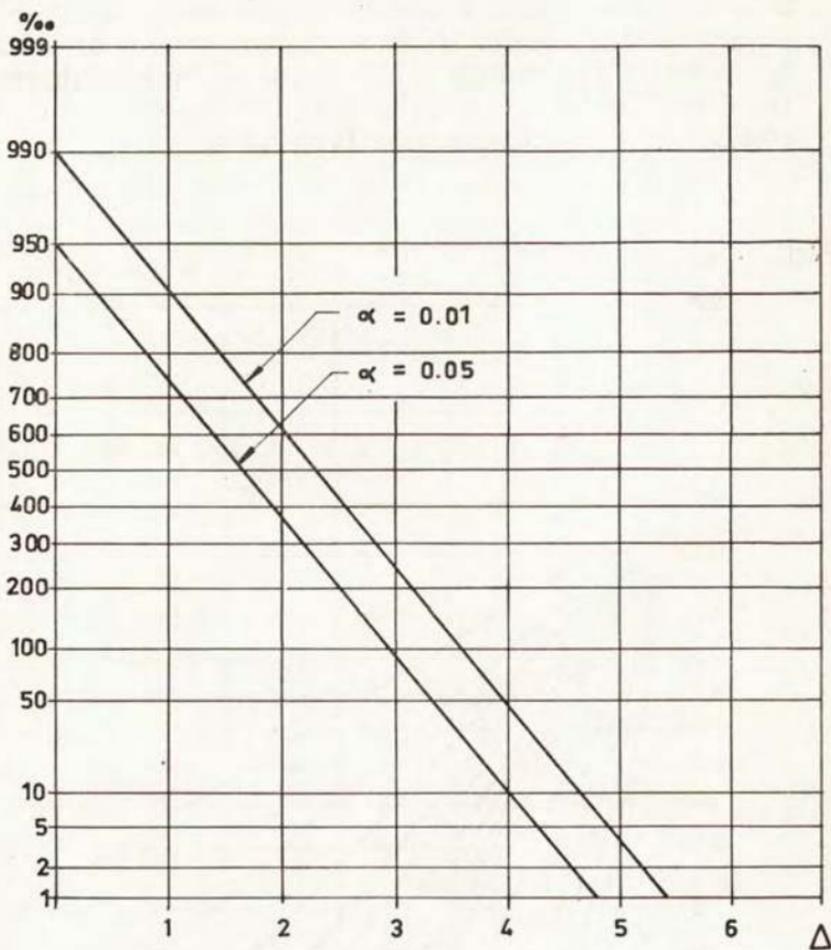
P( $\Delta$ )

Fig. 6.17

En efecto, en el ejemplo numérico a que hemos hecho referencia en el párrafo 6.2.1, las condiciones de eficacia eran:

$$m_0 = 20$$

$$m_1 = 22$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\beta = 0.10$$

Entrando en la tabla 9 con  $P(\Delta) = \beta = 0.10$  y  $\alpha = 0.05$  se encuentra  $\Delta_\beta = 2.926$ .

Ahora bien

$$\Delta_\beta = d_\beta \sqrt{n} = |m_1 - m_0| \sqrt{n} / \sigma = (22 - 20) \sqrt{n} / 2 = \sqrt{n}$$

de donde

$$n = \Delta_\beta^2 = 2.926^2 \approx 9$$

resultado idéntico al obtenido por aplicación directa de las fórmulas generales.

#### 6.2.4 Determinación gráfica del tamaño de la muestra

De todo lo anterior puede deducirse un método gráfico de determinación de  $n$  que permite reducir al mínimo los cálculos necesarios para establecer una prueba con especificación unilateral. En efecto, dado que para

$$P(\Delta) = \beta = \phi(K_{1-\beta})$$

la cuantila de orden  $\beta$  de la ley normal  $N(0, 1)$  tiene por expresión

$$K_{1-\beta} = -K_\beta = -\Delta_\beta + K_\alpha$$

resulta que

$$\Delta_\beta = K_\alpha + K_\beta$$

Por otra parte

$$\Delta_\beta = d_\beta \sqrt{n}$$

o lo que es lo mismo

$$\log \Delta_\beta = \log d_\beta + 0.5 \log n$$

Ahora bien, como para un nivel de significación  $\alpha$  determinado,  $\Delta_\beta$  tiene también un valor perfectamente determinado ( $K_\alpha + K_\beta$ ), la ecuación anterior no es sino la ecuación de un haz de rectas en un sistema de ejes coordenados  $d - n$  con escala logarítmica en ambos ejes. Para un  $\alpha$  determinado, a cada valor de  $\beta$  le corresponde una recta (ver fig. 6.18).

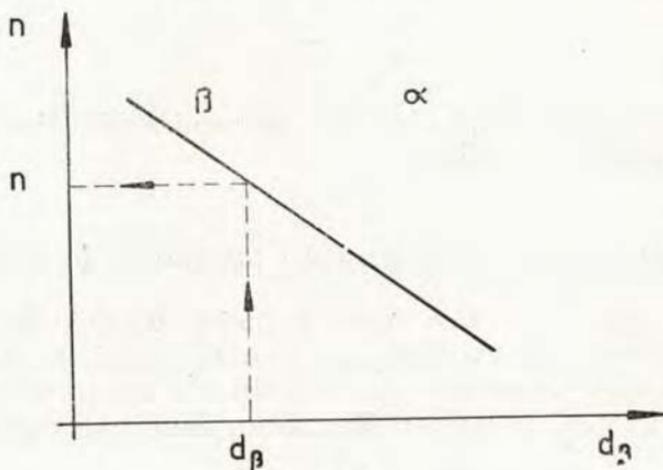


Fig. 6.18

En las figuras 6.19 y 6.20 se han representado las rectas correspondientes a  $\beta = 0.05$  y  $\beta = 0.10$  y valores de  $\alpha$  del 5 % y del 1 %. Para ello se han determinado únicamente los valores de  $d_\beta$  correspondientes a  $n = 10$  y  $n = 100$ , según puede verse en el cuadro adjunto

n	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 1\%$
	$\beta = 5\%$	$\beta = 10\%$	$\beta = 5\%$	$\beta = 10\%$
10	1.040	0.926	1.256	1.141
100	0.329	0.293	0.397	0.361

La utilización de estos gráficos permite establecer la prueba con gran rapidez. En efecto, si las condiciones de

eficacia son  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_1, \beta)$ , el camino a seguir será:

— calcular el valor de  $d_\beta$

$$d_\beta = \frac{|m_1 - m_0|}{\sigma}$$

— entrar en los gráficos  $d_\beta - n$  correspondientes al nivel de significación  $\alpha$ , con el valor  $d_\beta$  obtenido;

— utilizando la recta correspondiente al valor de  $\beta$  dado, determinar gráficamente el valor de  $n$  (ver figura 6.18);

— calcular el límite del intervalo de aceptación para la hipótesis  $H_0$  a partir de la expresión

$$m_L = m_0 + K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

si se trata de la prueba  $T\{m \leq m_0 \mid m > m_0\}$ , o a partir de la expresión

$$m_L = m_0 - K_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

si se trata de la prueba  $T\{m \geq m_0 \mid m < m_0\}$ .

### 6.3 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL

#### 6.3.1 Construcción de la prueba

Se trata de probar si la media de una distribución normal  $N(m, \sigma)$ , de desviación tipo conocida, es igual a un valor especificado  $m_0$ ; es decir, se trata de probar la

hipótesis  $H_0: m = m_0$  contra la hipótesis  $H_1: m \neq m_0$ . Se desea que cuando la media de la distribución sea realmente igual a  $m_0$  exista una casi seguridad  $1 - \alpha$  de llegar a esta conclusión, mientras que cuando la media de la distribución sea igual a  $m_0 \pm \varepsilon$  exista tan sólo una probabilidad  $\beta$  de creer, erróneamente, que la media es igual a  $m_0$ . La curva de eficacia de la prueba debe pasar, pues, por los puntos  $(m_0, 1 - \alpha)$ ,  $(m_0 - \varepsilon, \beta)$  y  $(m_0 + \varepsilon, \beta)$  (ver fig. 6.21).

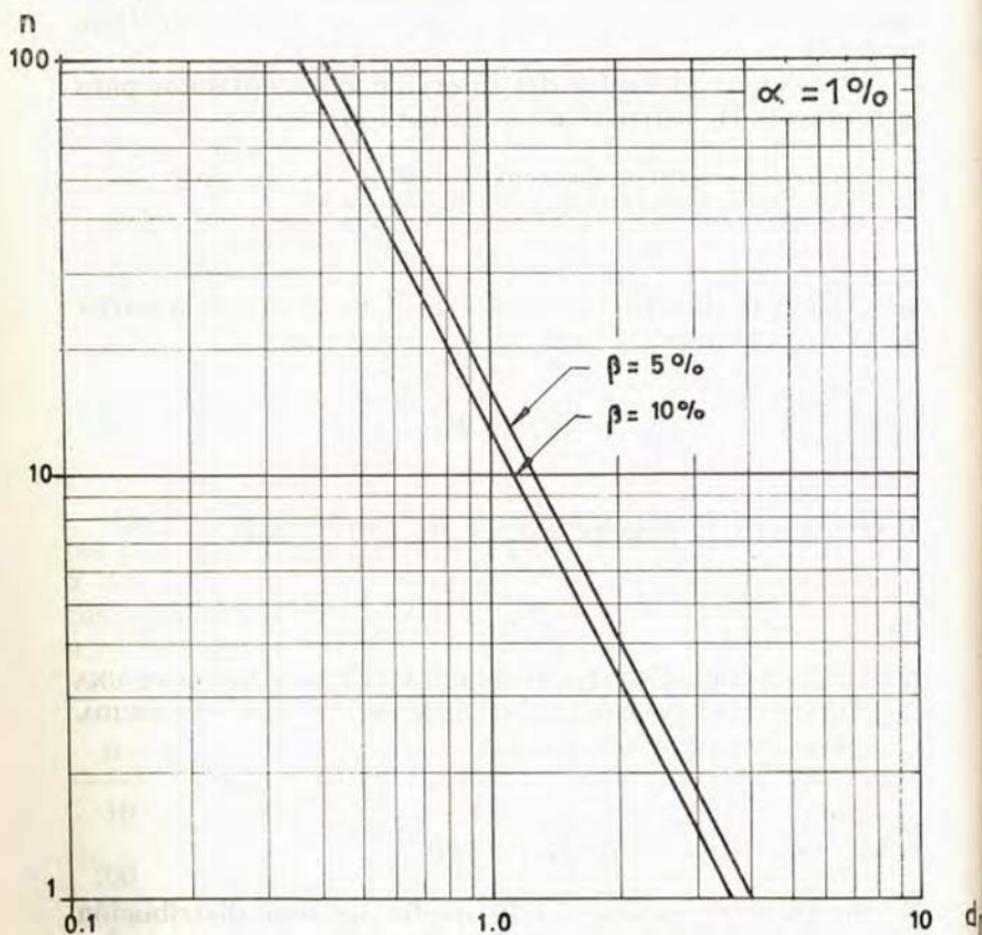


Fig. 6.19

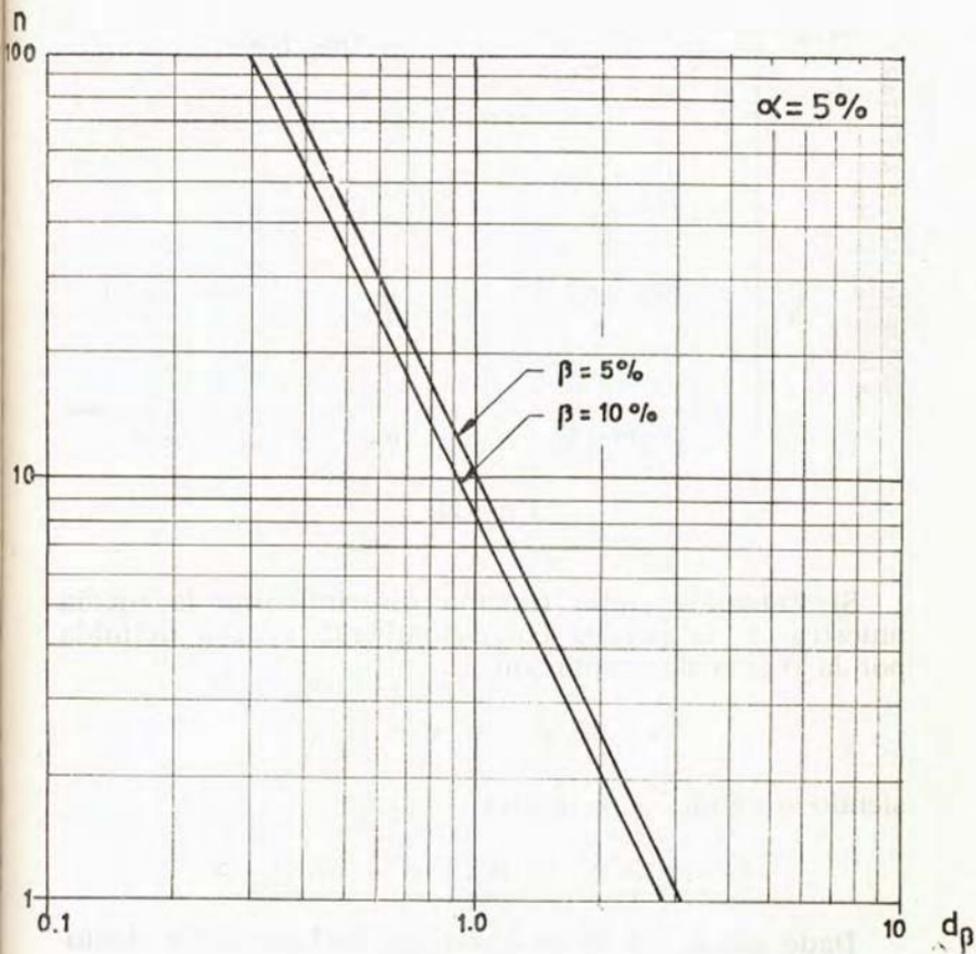


Fig. 6.20

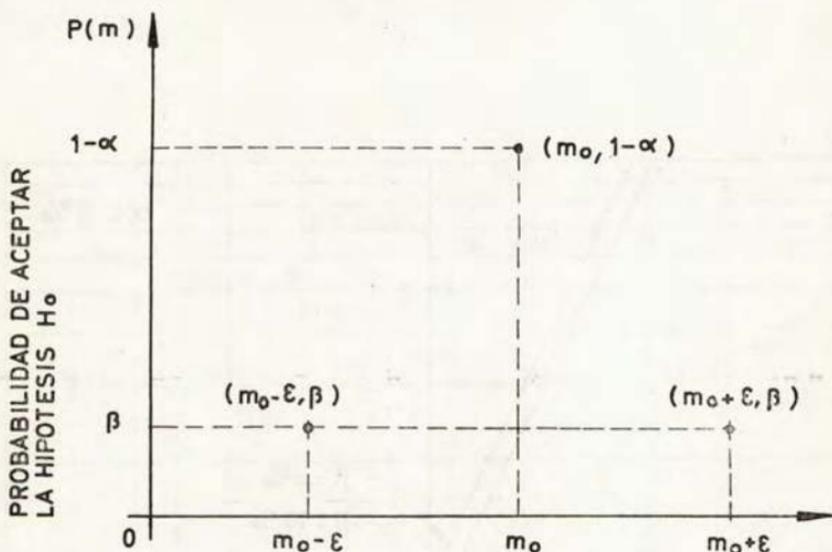


Fig. 6.21

Si tomamos como función discriminante la media muestral  $\bar{x}$ , la prueba correspondiente vendrá definida por la región de aceptación

$$A_\alpha = \{m_{LI} \leq \bar{x} \leq m_{LS}\}$$

siendo  $m_{LI}$  y  $m_{LS}$  unos límites tales que

$$P_r\{m_{LI} > \bar{x} > m_{LS} \mid m = m_0\} = \alpha$$

Dado que la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $\bar{x}$  es normal  $N(m, \sigma/\sqrt{n})$ , siendo  $m$  y  $\sigma$  la media y la desviación tipo poblacionales, los límites  $m_{LI}$  y  $m_{LS}$  podrán calcularse a partir de las expresiones (ver fig. 6.22)

$$m_{LI} = m_0 - K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$m_{LS} = m_0 + K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

siendo  $K_{\alpha/2}$  la cuantila de orden  $1 - \alpha$  de la ley normal  $N(0, 1)$ .

En estas condiciones si la media de la distribución es realmente igual a  $m$ , existirá una probabilidad

$$P(m) = P_r\{m_{LI} \leq \bar{x} \leq m_{LS} \mid m = m\}$$

de aceptar indebidamente la hipótesis  $H_0$  (ver fig. 6.23), y la función de eficacia de la prueba vendrá definida por la expresión

$$P(m) = \phi\left(\frac{m_{LS} - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{m_{LI} - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

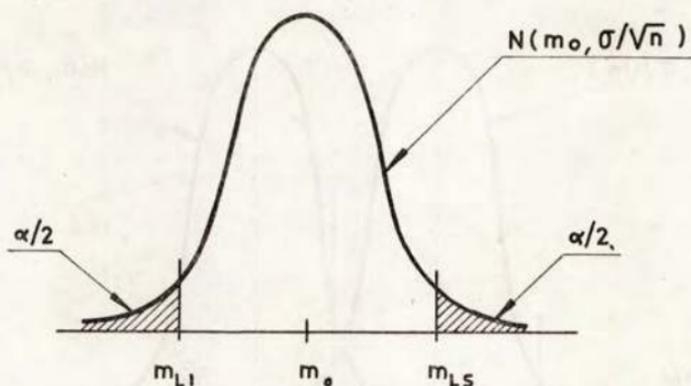


Fig. 6.22

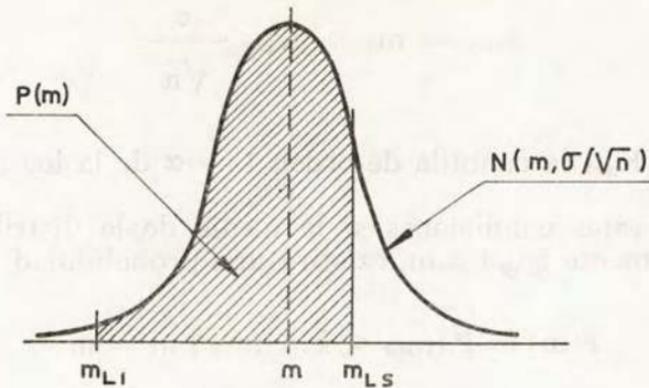


Fig. 6.23

Dado que la curva de eficacia de la prueba debe pasar por los puntos  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_0 + \epsilon, \beta)$ , podemos escribir que

$$P(m_0) = 1 - \alpha = \phi\left(\frac{m_{LS} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{m_{LI} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

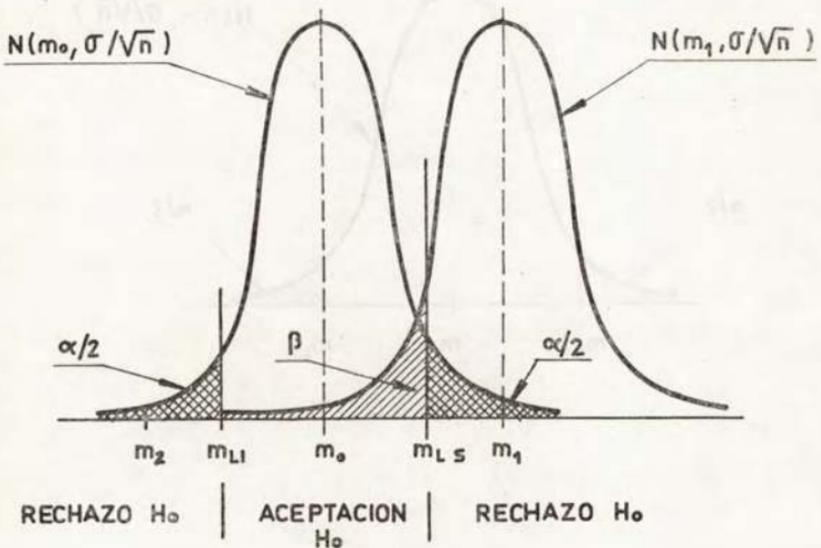


Fig. 6.24

$$P(m_1) = \beta = \phi\left(\frac{m_{LS} - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{m_{LI} - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

siendo  $m_1 = m_0 + \epsilon$  (ver fig. 6.24).

Dado que

$$m_{LS} = m_0 + K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$m_{LI} = m_0 - K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

resulta

$$\frac{m_{LS} - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{m_0 - m_1}{\sigma} \sqrt{n} + K_{\alpha/2} =$$

$$= -d_\beta \sqrt{n} + K_{\alpha/2}$$

$$\frac{m_{LI} - m_1}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{m_0 - m_1}{\sigma} \sqrt{n} - K_{\alpha/2} =$$

$$= -d_\beta \sqrt{n} - K_{\alpha/2}$$

siendo  $d_\beta = |m_1 - m_0|/\sigma$ . En consecuencia, la condición

$$\beta = \phi\left(\frac{m_{LS} - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{m_{LI} - m_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

puede escribirse en la forma

$$\beta = \phi(-d_\beta \sqrt{n} + K_{\alpha/2}) - \phi(-d_\beta \sqrt{n} - K_{\alpha/2}) =$$

$$= 1 - \phi(d_\beta \sqrt{n} - K_{\alpha/2}) - [1 - \phi(d_\beta \sqrt{n} + K_{\alpha/2})] =$$

$$= \phi(d_\beta \sqrt{n} + K_{\alpha/2}) - \phi(d_\beta \sqrt{n} - K_{\alpha/2})$$

Esta ecuación permite la determinación exacta del tamaño de muestra  $n$ . En efecto, dados  $\alpha$  y  $d_\beta$ , es posible determinar el valor de la función  $\beta(n)$  para los distintos valores de  $n$ . Representando por puntos dicha función en un sistema de ejes coordenados  $\beta - n$  (ver fig. 6.25) es posible determinar el valor de  $n$  correspondiente a un riesgo de error de segunda especie  $\beta$  dado.

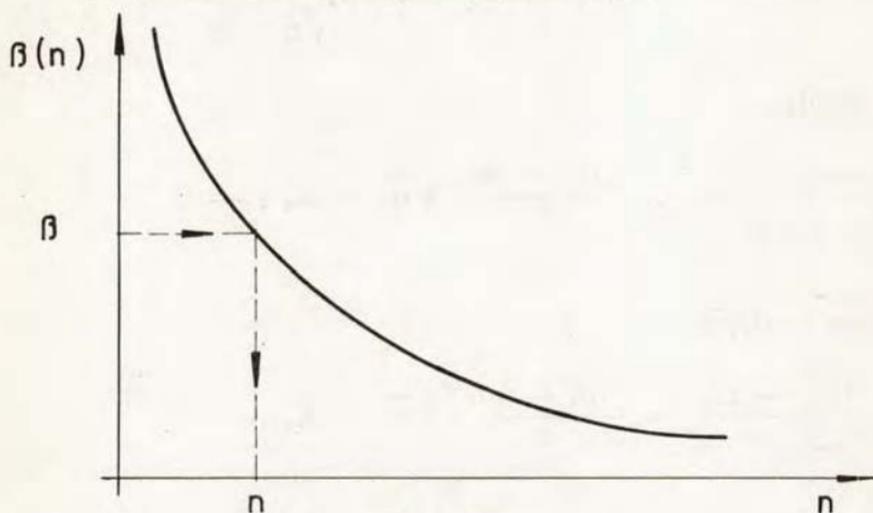


Fig. 6.25

Calculado  $n$ , la determinación de los límites  $m_{LI}$  y  $m_{LS}$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$  es inmediata.

Este método de determinación de  $n$  es, ciertamente, muy laborioso, pero en muchos casos puede recurrirse a un método simplificado. En efecto, si se cumple que la probabilidad

$$P_r\{\bar{x} < m_{LI} \mid m = m_1\} = \phi(-d_\beta \sqrt{n} - K_{\alpha/2}) =$$

$$= 1 - \phi(-d_\beta\sqrt{n} + K_{\alpha/2})$$

es muy pequeña, la condición

$$\beta = \phi(d_\beta\sqrt{n} + K_{\alpha/2}) - \phi(d_\beta\sqrt{n} - K_{\alpha/2})$$

puede escribirse en la forma aproximada

$$\beta \approx 1 - \phi(d_\beta\sqrt{n} - K_{\alpha/2}) = \phi(-d_\beta\sqrt{n} + K_{\alpha/2})$$

y, en consecuencia

$$K_{1-\beta} = -K_\beta = -d_\beta\sqrt{n} + K_{\alpha/2}$$

de donde

$$K_{\alpha/2} + K_\beta = d_\beta\sqrt{n} = \frac{m_1 - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

El tamaño de la muestra podrá, pues, calcularse a partir de la expresión

$$n \approx \left[ \frac{(K_{\alpha/2} + K_\beta)\sigma}{m_1 - m_0} \right]^2$$

y los límites  $m_{LS}$  y  $m_{LI}$  de la región de aceptación de la hipótesis  $H_0$  podrán escribirse en la forma

$$m_{LS} \approx \frac{m_1 K_{\alpha/2} + m_0 K_\beta}{K_{\alpha/2} + K_\beta}$$

$$m_{LI} \approx \frac{m_2 K_{\alpha/2} + m_0 K_\beta}{K_{\alpha/2} + K_\beta}$$

Para el planteamiento de la prueba pueden utilizarse en todos los casos las expresiones aproximadas anterior-

res, pero *a posteriori* debe comprobarse el cumplimiento de las condiciones que validan el método aproximado. La comprobación consistirá en determinar el valor de la probabilidad

$$P_r\{\bar{x} < m_{LI} \mid m = m_1\} = \phi(-d_\beta\sqrt{n} - K_{\alpha/2}) =$$

es decir, el valor de  $-d_\beta\sqrt{n} - K_{\alpha/2}$ . En general, si  $-d_\beta\sqrt{n} - K_{\alpha/2}$  es inferior a  $-3.09$ , es decir, si la probabilidad es inferior a 0.001, puede considerarse suficientemente buena la aproximación efectuada.

Si  $-d_\beta\sqrt{n} - K_{\alpha/2}$  es superior a  $-3.09$ , habrá que recurrir al método numérico-gráfico anteriormente expuesto para determinar el tamaño de la muestra.

### 6.3.2 Construcción de las curvas de eficacia

Una vez determinado el tamaño de la muestra y los límites de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ , es fácil determinar la curva de eficacia de la prueba. En efecto, hemos visto anteriormente que la función de eficacia de la prueba es

$$\begin{aligned} P(m) &= P_r\{m_{LI} \leq \bar{x} \leq m_{LS} \mid m = m\} = \\ &= \phi\left(\frac{m_{LS} - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{m_{LI} - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

y para obtener la curva de eficacia bastará representar la función  $P(m)$  para los distintos valores de  $m$ . Dicha curva tendrá la forma indicada en la figura 6.26.

Para obtener una curva de eficacia independiente de los valores adoptados por  $\sigma$  y  $m_0$  bastará tener en cuenta que por ser

$$\frac{m_{L.S} - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{m_0 - m}{\sigma} \sqrt{n} + K_{\alpha/2} =$$

$$= -d\sqrt{n} + K_{\alpha/2}$$

y

$$\frac{m_{L.I} - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{m_0 - m}{\sigma} \sqrt{n} - K_{\alpha/2} =$$

$$= -d\sqrt{n} - K_{\alpha/2}$$

siendo  $d$  el valor absoluto reducido de la desviación respecto a  $m_0$  de la media real  $m$  de la distribución, es decir

$$d = \frac{|m - m_0|}{\sigma}$$

la función de eficacia puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} P(d) &= \phi(-d\sqrt{n} + K_{\alpha/2}) - \phi(-d\sqrt{n} - K_{\alpha/2}) = \\ &= \phi(d\sqrt{n} + K_{\alpha/2}) - \phi(d\sqrt{n} - K_{\alpha/2}) \end{aligned}$$

y su representación gráfica será la indicada en la figura 6.27.

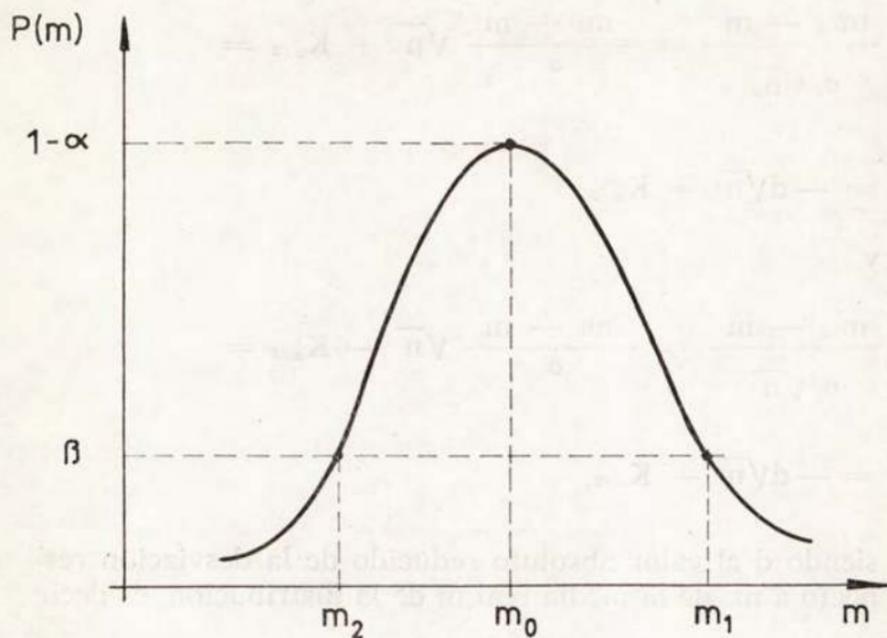


Fig. 6.26

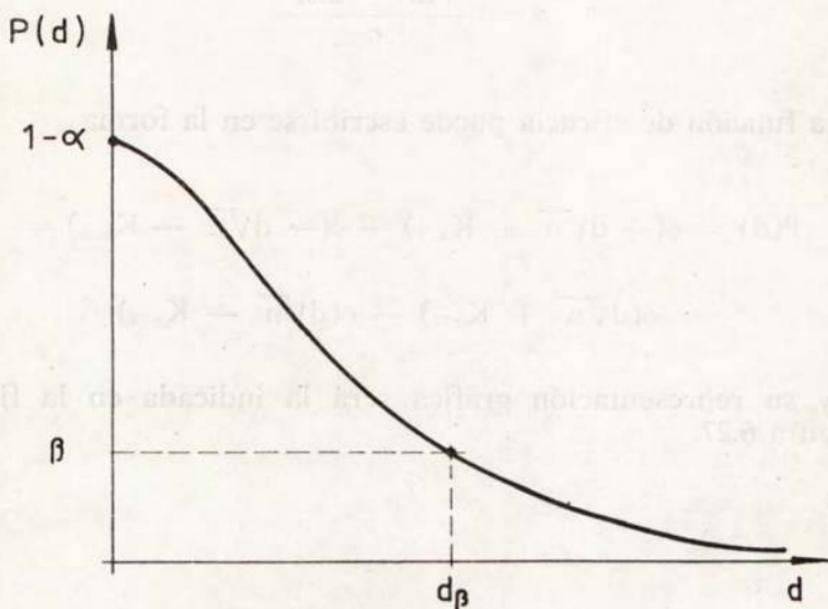


Fig. 6.27

En las tablas 10.1, 2, 3, 4, 5 y 6, calculadas por el autor, se dan los valores de esta función de eficacia para una extensa gama de valores de  $d$  y  $n$  y niveles de significación del 1 % y del 5 %.

En las figuras 6.28 y 6.29 se han representado los correspondientes haces de curvas de eficacia para algunos valores concretos de  $n$ .

Es de observar que, en cuanto  $d\sqrt{n} + K_{\alpha/2}$  alcanza valores elevados (superiores a 3.09), el valor de  $\phi(d\sqrt{n} + K_{\alpha/2})$  es prácticamente igual a la unidad, y la función de eficacia puede escribirse aproximadamente en la forma

$$P(d) \approx 1 - \phi(d\sqrt{n} - K_{\alpha/2}) = \phi(-d\sqrt{n} + K_{\alpha/2})$$

que coincide con la obtenida en el caso de especificación unilateral con un nivel de significación igual a  $\alpha/2$ .

Al adoptar en este caso un sistema cartesiano con escala gaussiana en el eje de ordenadas, la representación de la función de eficacia, al contrario de lo que ocurría en las pruebas con especificación unilateral, no es una recta.

Ahora bien, dado que a partir de un valor de  $d$  tal que

$$d\sqrt{n} + K_{\alpha/2} \geq 3.09$$

es decir

$$d \geq (3.09 - K_{\alpha/2})/\sqrt{n}$$

la ecuación de la función de eficacia coincide con la correspondiente a una prueba con especificación unilateral para un nivel de significación mitad ( $\alpha/2$ ), la curva de

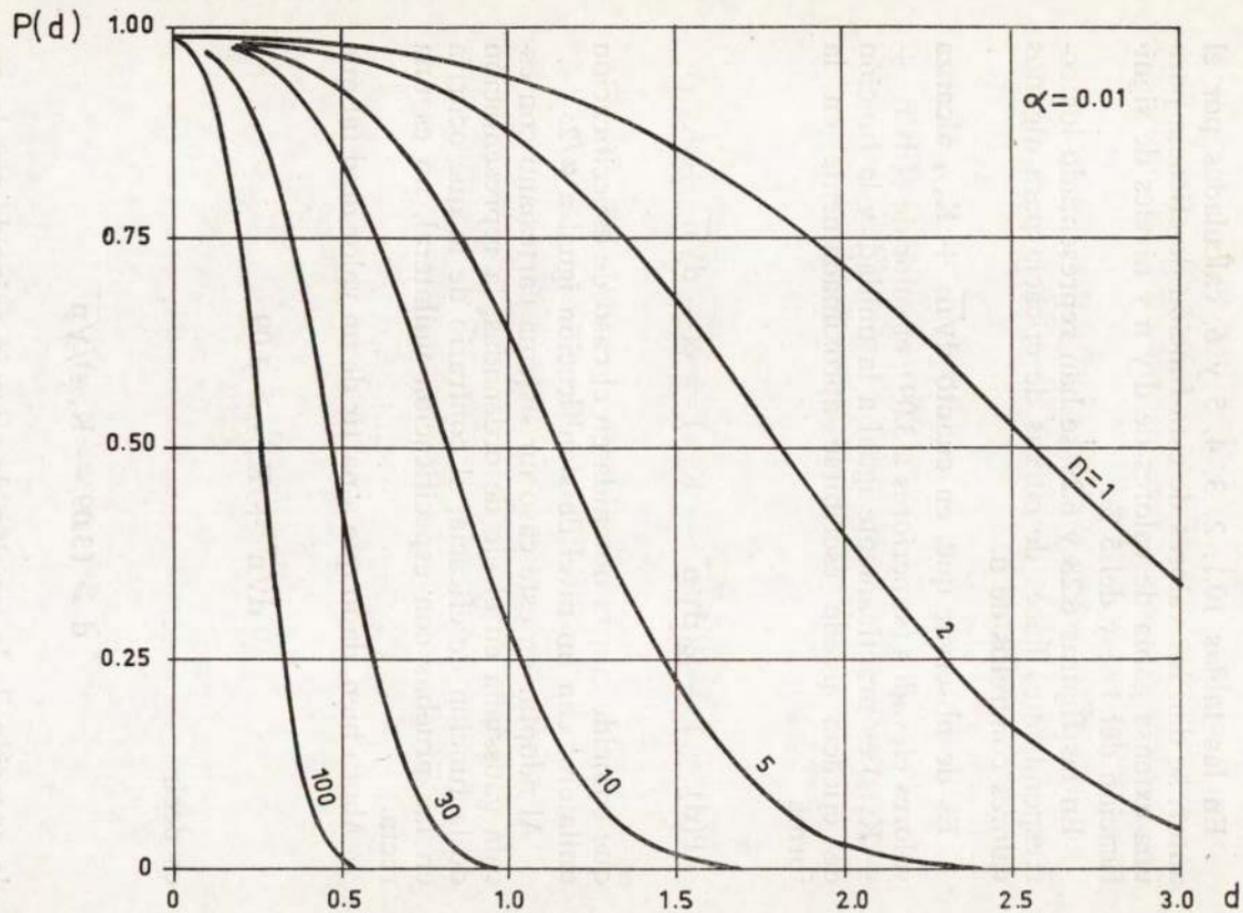
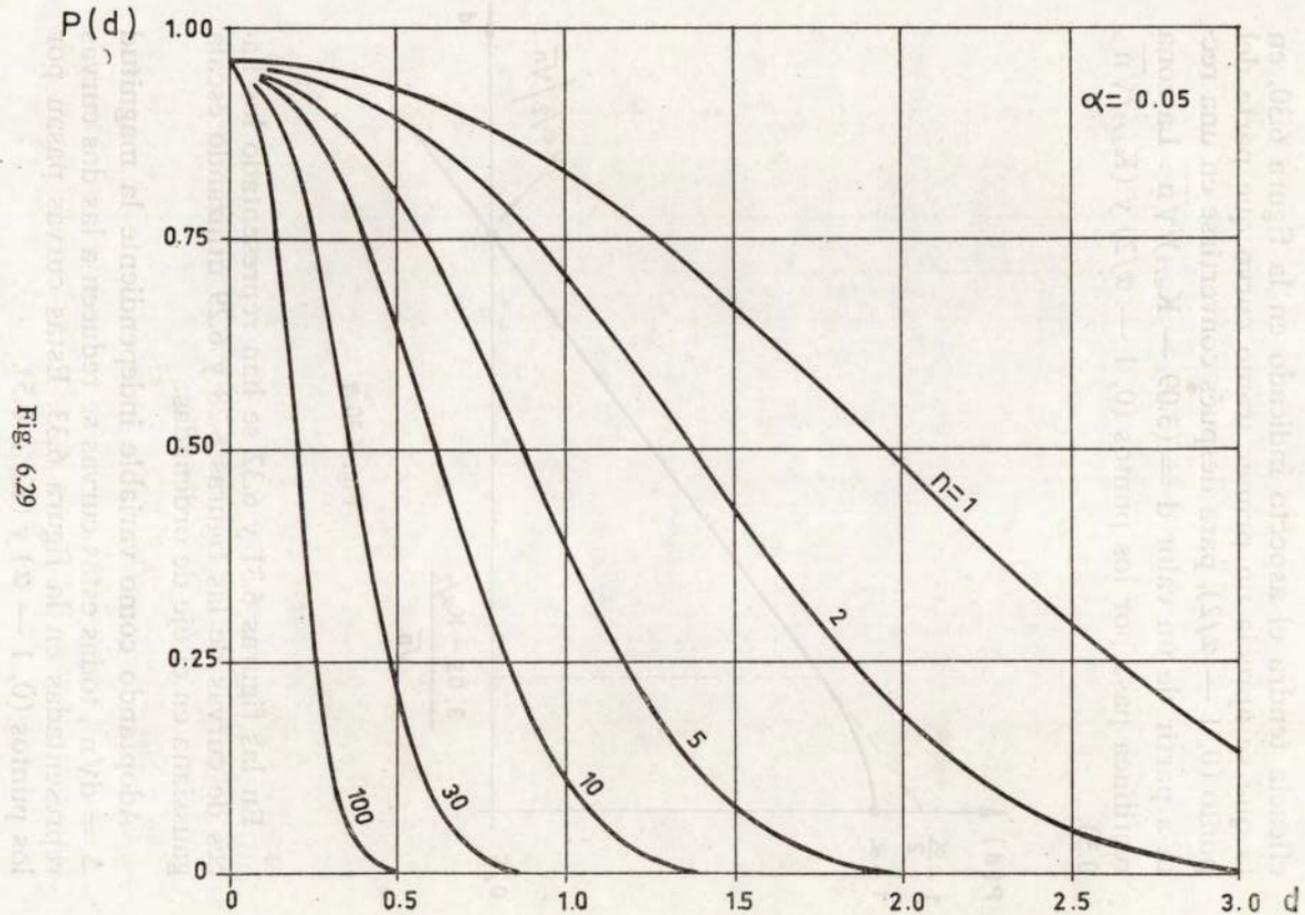


Fig. 6.28



eficacia tendrá el aspecto indicado en la figura 6.30, en la que se aprecia un primer tramo curvo que parte del punto  $(0, 1 - \alpha/2)$ , para después convertirse en una recta a partir de un valor  $d = (3.09 - K_{\alpha/2})/\sqrt{n}$ . La zona rectilínea pasa por los puntos  $(0, 1 - \alpha/2)$  y  $(K_{\alpha/2}/\sqrt{n}, 0.5)$ .

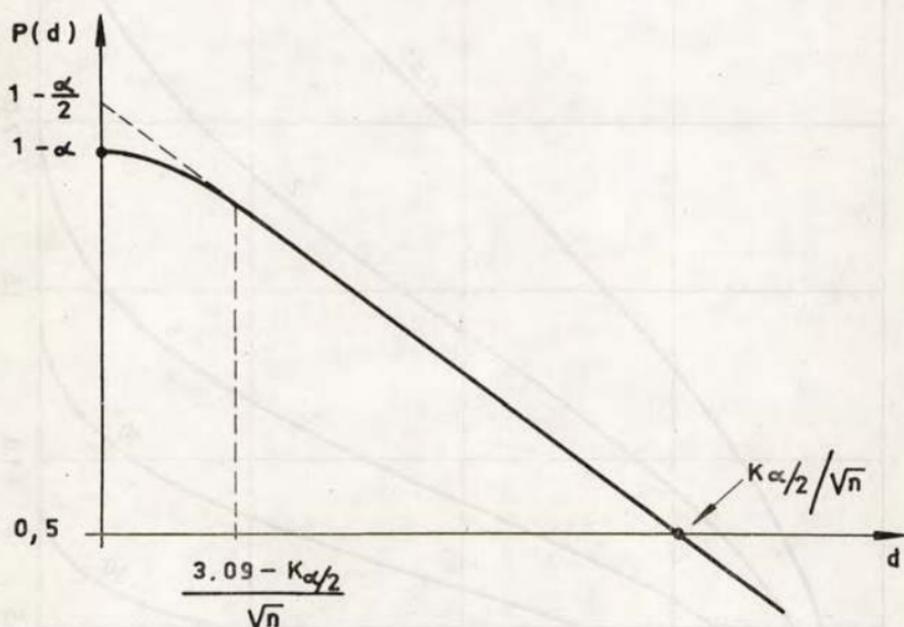


Fig. 6.30

En las figuras 6.31 y 6.32 se han representado los haces de curvas de las figuras 6.28 y 6.29 utilizando escala gaussiana en el eje de ordenadas.

Adoptando como variable independiente la magnitud  $\Delta = d\sqrt{n}$ , todas estas curvas se reducen a las dos curvas representadas en la figura 6.33. Estas curvas pasan por los puntos  $(0, 1 - \alpha)$  y  $(K_{\alpha/2}, 0.5)$ .

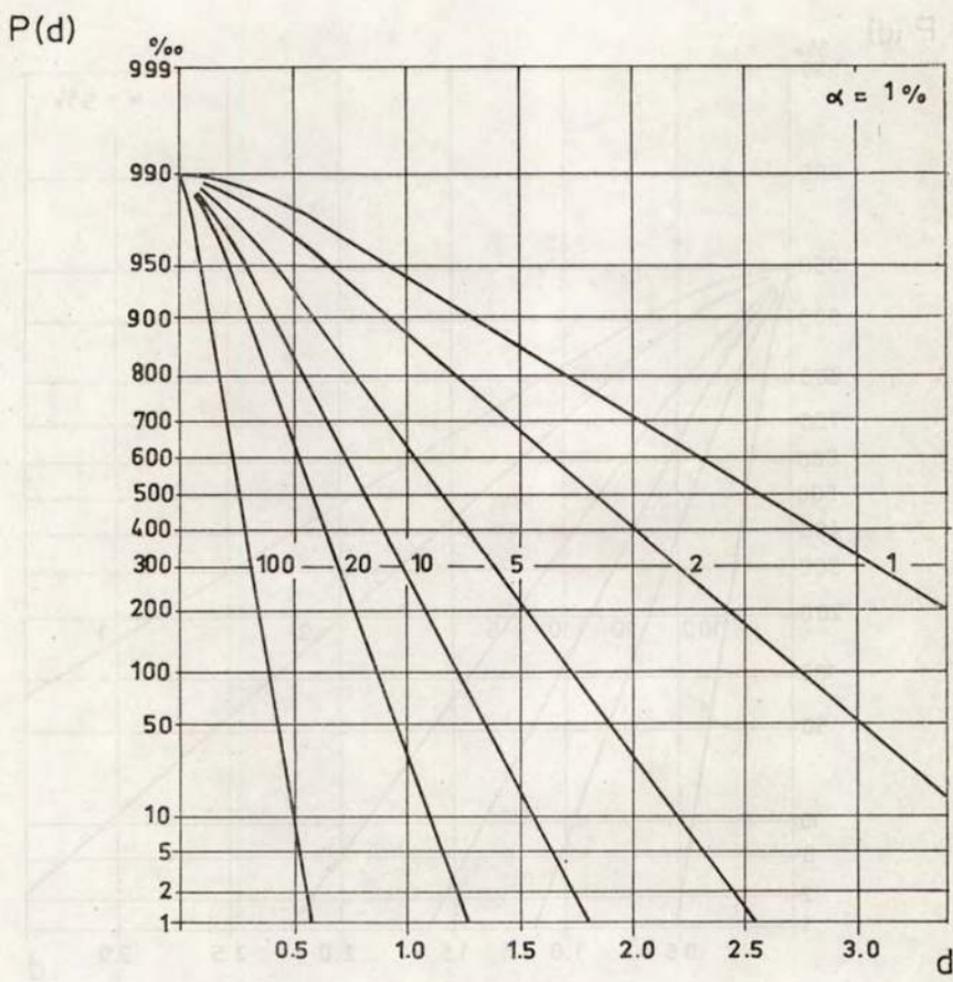


Fig. 6.31

P (d)

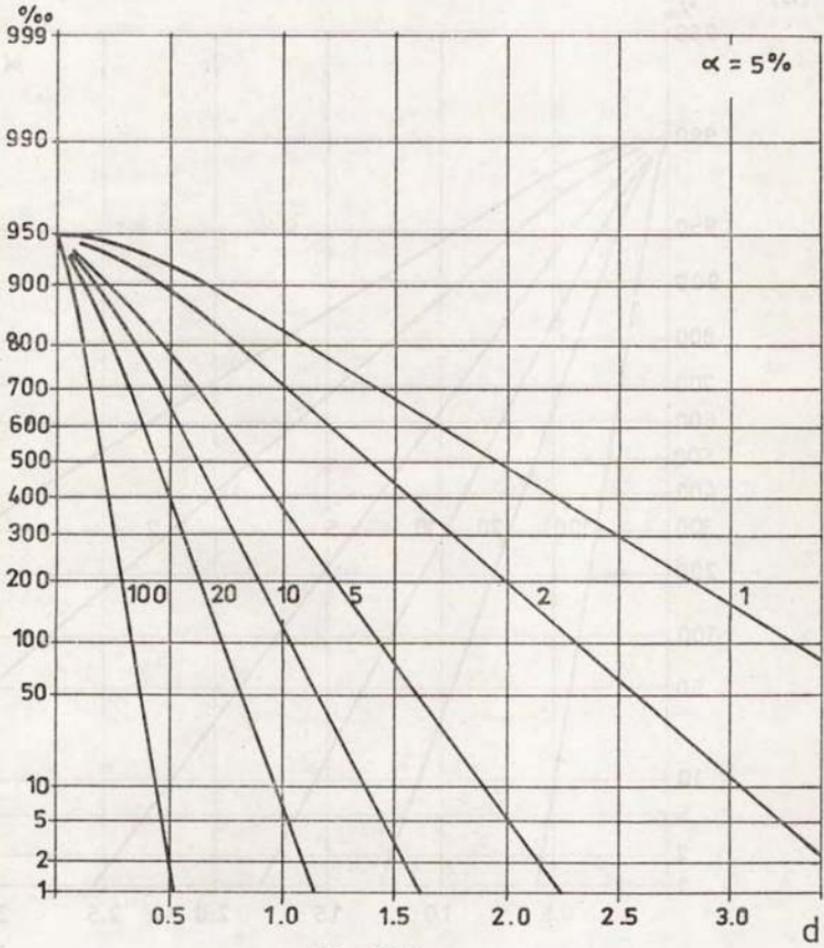


Fig. 6.32

### 6.3.3 Determinación gráfica del tamaño de la muestra

Al igual que en el caso de las pruebas con especificación unilateral, también es posible en este caso determinar el tamaño de muestra siguiendo un método gráfico, con lo que se reducen al mínimo los cálculos necesarios para establecer la prueba. En efecto, dado que para los valores normales de  $\beta$  siempre se cae en la zona rectilínea de la curva de eficacia (ver fig. 6.34), es posible escribir que

$$P(\Delta) = \beta \approx \phi(-\Delta_\beta + K_{\alpha/2})$$

de donde

$$K_{1-\beta} = -K_\beta = -\Delta_\beta + K_{\alpha/2}$$

o lo que es lo mismo

$$\Delta_\beta = K_{\alpha/2} + K_\beta$$

Por otra parte

$$\Delta_\beta = d_\beta \sqrt{n}$$

o sea

$$\log \Delta_\beta = \log d_\beta + 0.5 \log n$$

y como  $\log(\Delta_\beta) = \log(K_{\alpha/2} + K_\beta)$  es una constante para unos riesgos  $\alpha$  y  $\beta$  dados, la ecuación anterior es la ecuación de una recta en un sistema de ejes coordenados  $d_\beta - n$  con escala logarítmica en ambos ejes.

En las figuras 6.35 y 6.36 se han representado las rectas correspondientes a  $\beta = 0.05$  y  $\beta = 0.10$  y valores de  $\alpha$  del 5 % y del 1 %. Para ello se han determinado úni-

camente los valores de  $d_\beta$  correspondientes a  $n = 10$  y  $n = 100$  según puede verse en el cuadro adjunto

n	$\alpha = 5\%$ $\beta = 5\%$	$\alpha = 5\%$ $\beta = 10\%$	$\alpha = 1\%$ $\beta = 5\%$	$\alpha = 1\%$ $\beta = 10\%$
10	1.140	1.025	1.335	1.220
100	0.361	0.324	0.422	0.386

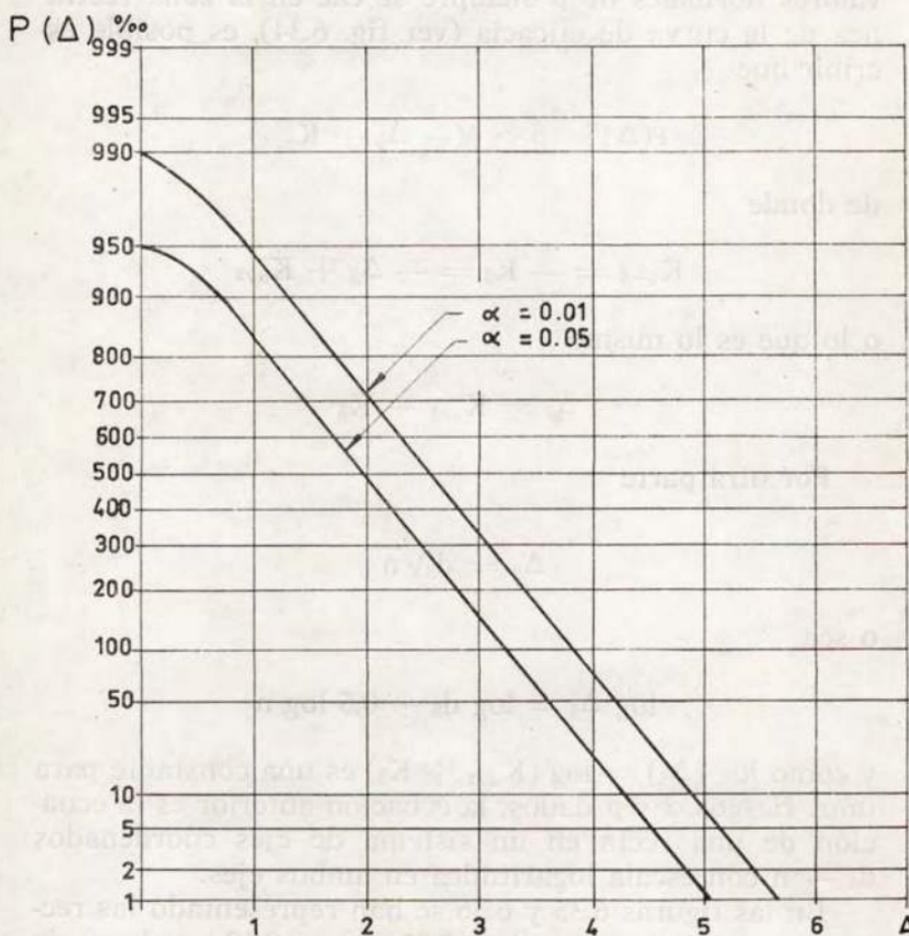


Fig. 6.33

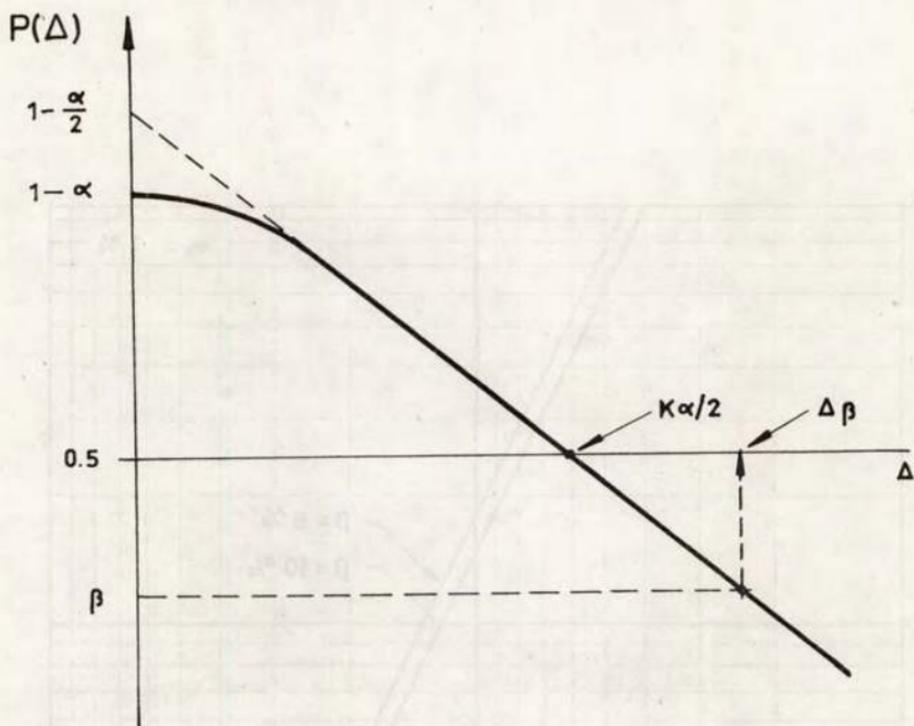


Fig. 6.34

La utilización de estos gráficos permite establecer la prueba con gran rapidez. Si las condiciones de eficacia son  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_1, \beta)$ , el camino a seguir será:

— calcular el valor de  $d_\beta$

$$d_\beta = \frac{m_1 - m_0}{\sigma}$$

— entrar en los gráficos de  $d_\beta - n$  correspondientes al nivel de significación  $\alpha$ , con el valor  $d_\beta$  obtenido;

— utilizando la recta correspondiente al valor  $\beta$  dado, determinar gráficamente el valor de  $n$ ;

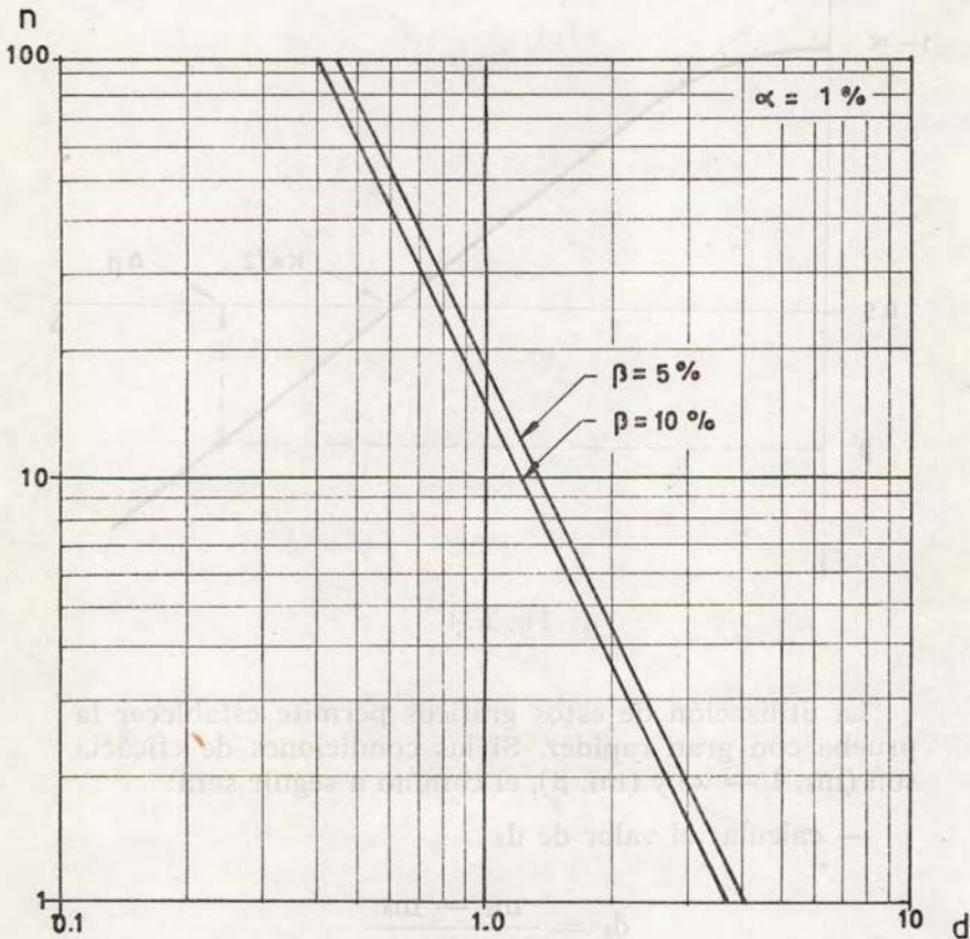


Fig. 6.35

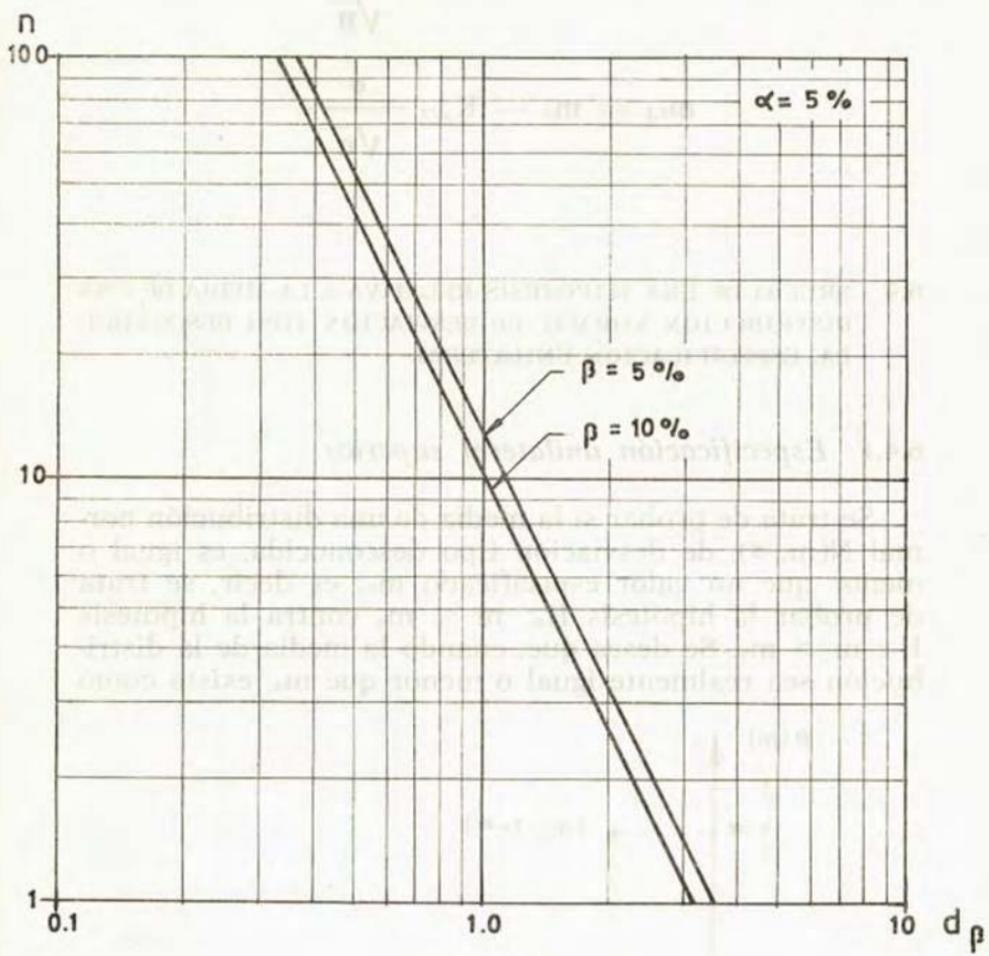


Fig. 6.36

— calcular los límites del intervalo de aceptación para la hipótesis  $H_0$  mediante las expresiones

$$m_{LS} = m_0 + K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$m_{LI} = m_0 - K_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

#### 6.4 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO DESCONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL

##### 6.4.1 Especificación unilateral superior

Se trata de probar si la media de una distribución normal  $N(m, \sigma)$ , de desviación tipo desconocida, es igual o menor que un valor especificado  $m_0$ ; es decir, se trata de probar la hipótesis  $H_0: m \leq m_0$  contra la hipótesis  $H_1: m > m_0$ . Se desea que, cuando la media de la distribución sea realmente igual o menor que  $m_0$ , exista como

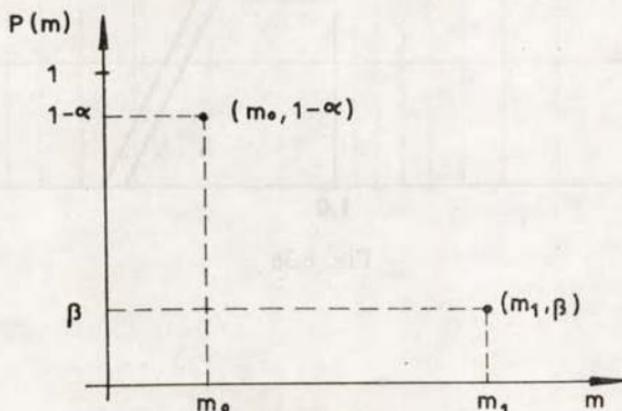


Fig. 6.37

mínimo una casi seguridad  $1 - \alpha$  de llegar a esta conclusión mientras que, cuando la media de la distribución sea igual a  $m_1$ , exista tan sólo una probabilidad  $\beta$  de creer, erróneamente, que la media es igual o menor que  $m_0$ . La curva de eficacia de la prueba debe pasar, pues, por los puntos  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_1, \beta)$  (ver fig. 6.37).

En este caso adoptaremos como función discriminante la variable aleatoria

$$\xi = \frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}}$$

en la que  $\bar{x}$  es la media muestral y  $S$  la raíz cuadrada de la cuasi-variancia muestral. Esta variable aleatoria se distribuye, según sabemos, de acuerdo con una ley  $t$  de Student de  $n - 1$  grados de libertad.

En estas condiciones la prueba  $T\{m \leq m_0 \mid m > m_0\}$  vendrá definida por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha, n-1} \right\}$$

en la que  $t_{\alpha, n-1}$  es la cuantila de orden  $1 - \alpha$  de la ley  $t$  de Student de  $n - 1$  grados de libertad.

Definida esta región de aceptación para  $H_0$ , si la media de la distribución es realmente igual a  $m$ , existirá una probabilidad

$$P(m) = P_r \left\{ \frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha, n-1} \mid m = m \right\}$$

de aceptar indebidamente la hipótesis  $H_0$ . Esta probabilidad nos define la función de eficacia de la prueba. Evidentemente cuando  $m = m_0$ ,  $P(m_0) = 1 - \alpha$ . Por otra parte, debe cumplirse que, para  $m = m_1$

$$P(m_1) = P_r \left\{ \frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha, n-1} \mid m = m_1 \right\} = \beta$$

A partir de esta condición puede determinarse el tamaño de la muestra que debe adoptarse en el plan de experimentación, y el límite  $t_{\alpha, n-1}$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ . En efecto, esta condición puede escribirse en la forma siguiente

$$P_r \left\{ \frac{\frac{\bar{x} - m_1}{\sigma} \sqrt{n} + \frac{m_1 - m_0}{\sigma} \sqrt{n}}{S/\sigma} \leq t_{\alpha, n-1} \mid m = m_1 \right\} = \beta$$

Ahora bien,  $(\bar{x} - m_1)\sqrt{n}/\sigma$  es una variable aleatoria normal  $N(0, 1)$ ,  $S/\sigma$  es la raíz cuadrada de una variable aleatoria  $\chi_{n-1}^2$  dividida por su número de grados de libertad, y  $(m_1 - m_0)\sqrt{n}/\sigma$  es un parámetro. En consecuencia, la variable aleatoria

$$\frac{\frac{\bar{x} - m_1}{\sigma} \sqrt{n} + \frac{m_1 - m_0}{\sigma} \sqrt{n}}{S/\sigma}$$

es una variable  $t$  no centrada con  $n - 1$  grados de libertad y parámetro de descentramiento

$$\delta = \frac{m_1 - m_0}{\sigma} \sqrt{n} = d_\beta \sqrt{n}$$

por lo que la condición anterior puede escribirse en la forma

$$P_r \{ t^* \leq t_{\alpha, n-1} \mid \delta = d_\beta \sqrt{n}, f = n - 1 \} = \beta$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la ley de t no centrada puede escribirse, finalmente

$$Pr\{t^* \leq -t_{\alpha, n-1} \mid \delta = -d_{\beta}\sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \beta$$

A partir de esta relación, y haciendo uso de las tablas de Johnson y Welch relativas a la función de distribución de la variable aleatoria t no centrada, es posible establecer un método numérico-gráfico de determinación del tamaño de la muestra. En efecto, si tomamos como datos  $\alpha$ ,  $\beta$  y n, es posible determinar el correspondiente valor del parámetro de descentramiento  $\delta$  y, en consecuencia, el valor del parámetro  $d_{\beta}$ . Realizando este cálculo para distintos valores de n es posible obtener, para cada par de valores  $\alpha$ ,  $\beta$  unas curvas  $d_{\beta} - n$  tales como la indicada en la figura 6.38. Establecidas estas curvas para los valores más frecuentes de los riesgos de primera y segunda especie, es posible determinar de forma gráfica el tamaño n de la muestra. Bastará para ello calcular

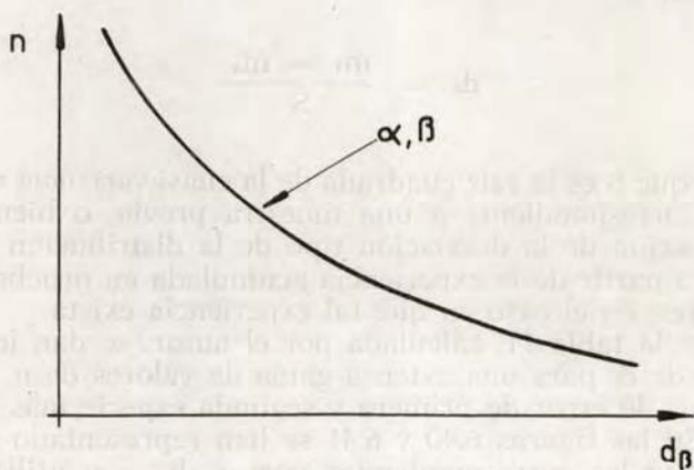


Fig. 6.38

de forma aproximada el valor del parámetro  $d_{\beta}$  y entrar con él en los gráficos  $d_{\beta} - n$  (ver fig. 6.39).

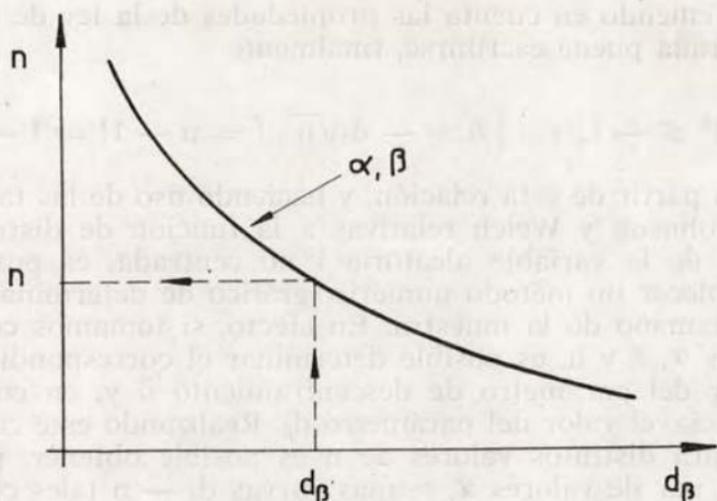


Fig. 6.39

El parámetro  $d_\beta$  puede calcularse a partir de la expresión

$$d_\beta = \frac{m_1 - m_0}{S}$$

en la que  $S$  es la raíz cuadrada de la cuasi-variancia muestral correspondiente a una muestra previa, o bien una estimación de la desviación tipo de la distribución obtenida a partir de la experiencia acumulada en pruebas anteriores, en el caso en que tal experiencia exista.

En la tabla 11, calculada por el autor, se dan los valores de  $d_\beta$  para una extensa gama de valores de  $n$ , y los riesgos de error de primera y segunda especie más usuales. En las figuras 6.40 y 6.41 se han representado gráficamente las correspondientes curvas  $d_\beta - n$  utilizando un sistema cartesiano con escala logarítmica en el eje de ordenadas.

Para la mejor comprensión del método expuesto vamos a determinar, a manera de ejemplo, un punto de una curva  $d_\beta - n$ . Supongamos el siguiente caso:

$$\alpha = 0.05$$

$$\beta = 0.05$$

$$n = 20$$

En las tablas de la  $t$  de Student, encontraremos

$$t_{\alpha, n-1} = t_{0.05; 19} = 1.7291$$

En consecuencia, deberemos escribir

$$Pr\{t^* \leq -1.7291 \mid \delta = -d_p \sqrt{20}, f = 19\} = 0.95$$

Para resolver esta ecuación basta determinar el valor de los parámetros  $y$  e  $y'$  de la  $t$  no centrada. En nuestro caso

$$y = \sqrt{\frac{2f}{2f + t_0^2}} = 0.9628$$

$$y' = \frac{t_0}{\sqrt{2f + t_0^2}} = -0.2701$$

toda vez que  $t_0 = -1.7291$ .

Entrando con estos valores en las tablas de Johnson y Welch encontramos

$$y'_0 = -0.25 \qquad \lambda_0 = 1.62475$$

$$y'_1 = -0.30 \qquad \lambda_1 = 1.62095$$

y por interpolación lineal, resulta

$$\lambda = 1.62322$$

Conocido  $\lambda$  puede calcularse inmediatamente el valor del parámetro de descentramiento  $\delta$

$$\delta = t_0 - \lambda \sqrt{\frac{2f + t_0^2}{2f}} = -3.41497$$

y, en consecuencia

$$d_\beta = 3.41497/\sqrt{20} = 0.7636$$

Así pues, el punto buscado de la curva  $d_\beta - n$  correspondiente a los valores  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.05$  es (0.7636, 20).

En resumen, para proceder a la realización de una prueba con especificación unilateral superior relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo desconocida y que responda a las condiciones de eficacia  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_1, \beta)$ , deberá seguirse el siguiente camino:

— calcular el valor del parámetro  $d_\beta$ , haciendo uso de la información procedente de una muestra previa o de una estimación de la desviación tipo de la distribución hallada en experiencias anteriores;

— con el valor  $d_\beta$  así obtenido, entrar en el gráfico  $d_\beta - n$  correspondiente a los riesgos  $\alpha$  y  $\beta$  especificados y leer el valor de  $n$ ;

— determinar el límite  $t_{\alpha, n-1}$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ , haciendo uso de las tablas de la  $t$  de Student;

— efectuar la extracción de una muestra aleatoria de  $n$  elementos;

— determinar los valores de la media y de la cuasi-variancia muestrales y formar el estadístico

$$\xi = \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n}$$

— si el valor  $\xi$  así obtenido es igual o menor que  $t_{\alpha, n-1}$ , aceptar la hipótesis  $H_0$ , rechazándola en caso contrario.

Evidentemente la determinación gráfica del tamaño de la muestra sólo es viable cuando se dispone de la curva  $d_\beta - n$  correspondiente a los valores deseados de  $\alpha$  y  $\beta$ . En general esto no ocurre, por lo que debe recurrirse, o bien al trazado por puntos de la curva  $d_\beta - n$  correspondiente a los parámetros del problema, o bien al uso de las curvas de eficacia que serán descritas en el párrafo 6.4.3.

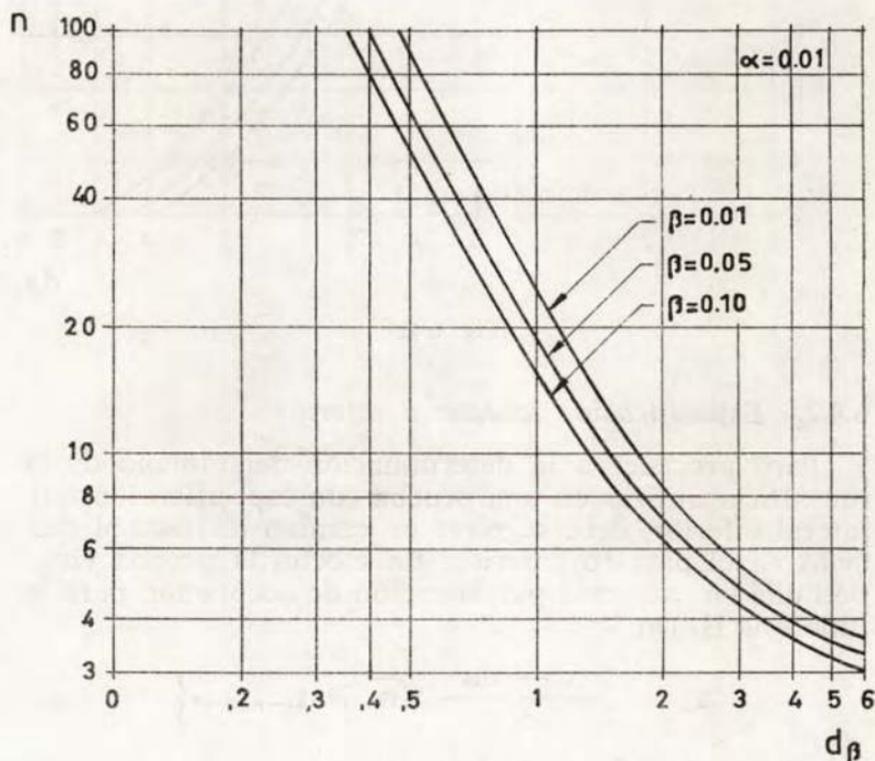


Fig. 6.40

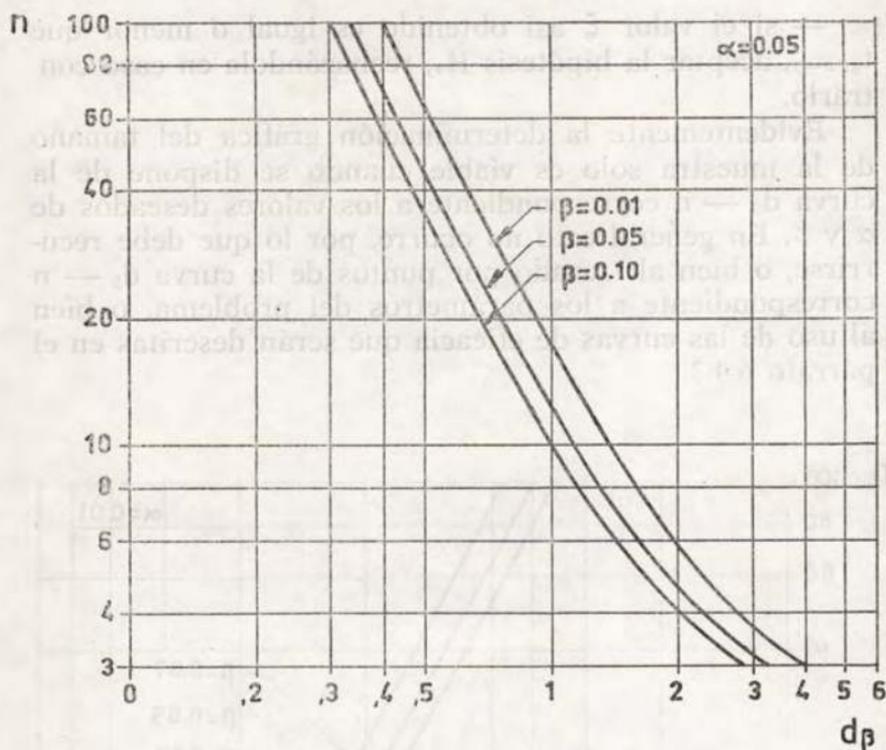


Fig. 6.41

#### 6.4.2. Especificación unilateral inferior

Para proceder a la determinación del tamaño de la muestra a utilizar en una prueba con especificación unilateral inferior, debe seguirse un camino idéntico al descrito en el párrafo anterior. En efecto, la prueba viene definida en este caso por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$  ( $m \geq m_0$ )

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n} \geq t_{1-\alpha, n-1} \right\}$$

o lo que es lo mismo

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n} \geq -t_{\alpha, n-1} \right\}$$

Cuando  $m = m_1$ , debe verificarse que

$$Pr\left\{\frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n} \geq -t_{\alpha, n-1} \mid m = m_1\right\} = \beta$$

expresión que puede ser escrita en cualquiera de las formas siguientes:

$$Pr\left\{\frac{\frac{\bar{x} - m_1}{\sigma} \sqrt{n} - \frac{m_0 - m_1}{\sigma} \sqrt{n}}{S/\sigma} \geq -t_{\alpha, n-1} \mid m = m_1\right\} = \beta$$

$$Pr\{t^* \geq -t_{\alpha, n-1} \mid \delta = -d_\beta \sqrt{n}, f = n - 1\} = \beta$$

$$Pr\{t^* \leq -t_{\alpha, n-1} \mid \delta = -d_\beta \sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \beta$$

expresión idéntica a la obtenida en el caso de especificación unilateral superior, toda vez que en ambos casos  $d_\beta$  representa en último término el valor absoluto reducido de la diferencia entre  $m_0$  y  $m_1$ .

Así pues, todo lo dicho en el párrafo anterior es extensivo al caso de una prueba con especificación unilateral inferior, con la única diferencia de que la región de aceptación para  $H_0$  es formalmente distinta.

### 6.4.3 Construcción de las curvas de eficacia

El trazado de la curva de eficacia correspondiente a una prueba relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo desconocida es bastante complicado. En efecto, la función de eficacia en el caso de especificación unilateral superior es, según sabemos

$$P(m) = P_r \left\{ \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n} \leq t_{\alpha, n-1} \mid m = m \right\}$$

expresión que también puede ser escrita en la forma

$$P(d) = P_r \{ t^* \leq t_{\alpha, n-1} \mid \delta = d\sqrt{n}, f = n - 1 \}$$

A idéntica expresión se llega en el caso de especificación unilateral inferior.

La resolución de esta ecuación para un tamaño de muestra y nivel de significación dados reviste especial dificultad, toda vez que se requiere el manejo de la función de distribución de la variable aleatoria  $t$  no centrada.

Afortunadamente, diversos autores<sup>2</sup> han determinado familias de curvas de eficacia para los valores más fre-

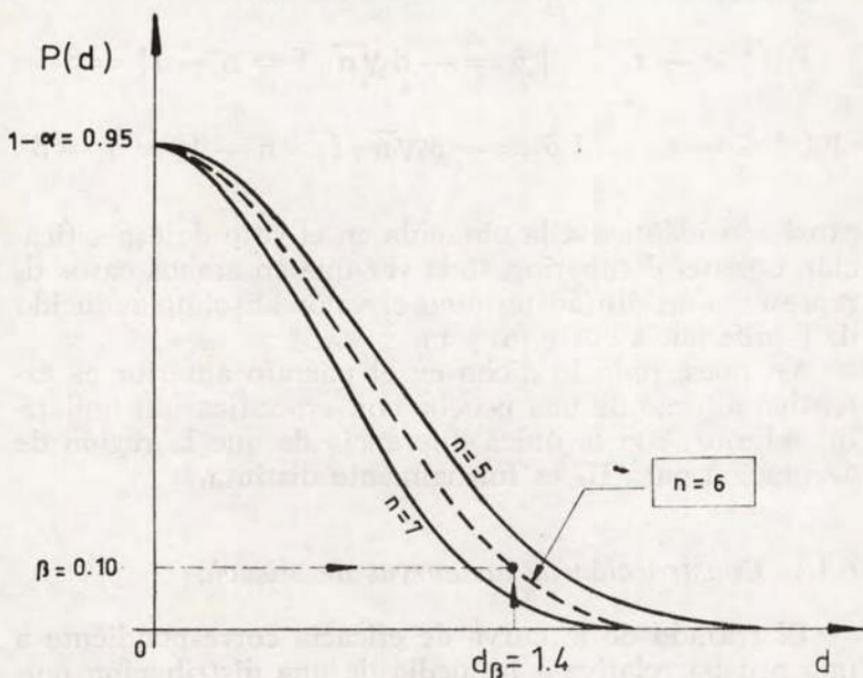


Fig. 6.42

<sup>2</sup> Bowker, Lieberman, Owen, etc.

cuentas de  $\alpha$  y  $n$ , lo cual facilita considerablemente los cálculos. En la figura 6.42 se muestra un ejemplo de utilización de dichas curvas. Para el caso concreto en que  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $d = 1.4$ , se deduce por interpolación que  $n = 6$ .

## 6.5 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO DESCONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL

### 6.5.1 Construcción de la prueba

Se trata de probar si la media de una distribución normal  $N(m, \sigma)$ , de desviación tipo desconocida, es igual a un valor especificado  $m_0$ ; es decir, se trata de probar la hipótesis  $H_0: m = m_0$  contra la hipótesis  $H_1: m \neq m_0$ . Se desea que, cuando la media de la distribución sea realmente igual a  $m_0$ , exista una casi seguridad  $1 - \alpha$  de llegar a esta conclusión, mientras que, cuando la media de la distribución sea igual a  $m_0 \pm \epsilon$ , exista tan sólo una probabilidad  $\beta$  de creer, erróneamente, que la media es igual a  $m_0$ . La curva de eficacia debe pasar, pues, por los puntos  $(m_0, 1 - \alpha)$ ,  $(m_0 - \epsilon, \beta)$  y  $(m_0 + \epsilon, \beta)$ .

De acuerdo con lo expuesto en el párrafo 5.4.5, si tomamos como función discriminante

$$\xi = \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n}$$

es posible obtener una prueba uniformemente de máxima potencia definida por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_\alpha = \left\{ -t_{\alpha/2, n-1} \leq \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n} \leq t_{\alpha/2, n-1} \right\}$$

siendo  $t_{\alpha/2, n-1}$  la cuantila de orden  $1 - \alpha/2$  de la ley  $t$  de Student con  $n - 1$  grados de libertad.

En estas condiciones si la media de la distribución es realmente  $m$ , existirá una probabilidad

$$P(m) = \Pr\left\{-t_{\alpha/2, n-1} \leq \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n} \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid m = m\right\}$$

de aceptar indebidamente la hipótesis  $H_0$ . Esta probabilidad nos define la función de eficacia de la prueba.

Para  $m = m_1 = m_0 + \epsilon$  debe cumplirse que

$$P(m_1) = \Pr\left\{-t_{\alpha/2, n-1} \leq \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n} \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid m = m_1\right\} = \beta$$

condición que puede escribirse en la forma

$$\Pr\left\{-t_{\alpha/2, n-1} \leq \frac{\frac{\bar{x} - m_1}{\sigma} \sqrt{n} + \frac{m_1 - m_0}{c} \sqrt{n}}{S/\sigma} \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid m = m_1\right\} = \beta$$

o lo que es lo mismo

$$\Pr\left\{-t_{\alpha/2, n-1} \leq t^* \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid \delta = d_\beta \sqrt{n}, f = n - 1\right\} = \beta$$

Esta ecuación permite la determinación de  $n$ . Su resolución, sin embargo, reviste grandes dificultades.

Al igual que hicimos en el caso en que la desviación tipo de la distribución es conocida, es posible encontrar una solución aproximada del problema suponiendo que

la cola de la distribución por debajo de  $-t_{\alpha/2, n-1}$  es prácticamente despreciable, es decir, suponiendo que se cumple la condición

$$\Pr\{t^* \leq -t_{\alpha/2, n-1} \mid \delta = d_\beta\sqrt{n}, f = n - 1\} \approx 0$$

En estas condiciones es posible escribir

$$\Pr\{t^* \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid \delta = d_\beta\sqrt{n}, f = n - 1\} = \beta$$

o lo que es lo mismo

$$\Pr\{t^* \leq -t_{\alpha/2, n-1} \mid \delta = -d_\beta\sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \beta$$

El problema se reduce, pues, como en el caso de especificación unilateral, a la resolución de la ecuación anterior para distintos valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$ . Los valores del parámetro  $d_\beta$ , de esta forma obtenidos, permiten dibujar las correspondientes curvas  $d_\beta - n$ .

En la tabla 12, calculada por el autor, se dan los valores de  $d_\beta$  para una amplia gama de valores de  $n$ , y los riesgos de error de primera y segunda especie más usuales. En las figuras 6.43 y 6.44 se han representado gráficamente las correspondientes curvas  $d_\beta - n$ , utilizando un sistema cartesiano con escala logarítmica en el eje de ordenadas.

Así pues, para proceder a la realización de una prueba con especificación bilateral relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo desconocida y que responda a las condiciones de eficacia  $(m_0, 1 - \alpha)$ ,  $(m_1, \beta)$  y  $(m_2, \beta)$ , deberá seguirse el siguiente camino:

— calcular el valor del parámetro  $d_\beta$  haciendo uso de la información procedente de una muestra previa o de una estimación de la desviación tipo de la distribución hallada en experiencias anteriores;

— con el valor  $d_\beta$  así obtenido, entrar en el gráfico  $d_\beta - n$  correspondiente a los riesgos  $\alpha$  y  $\beta$  especificados y leer el valor de  $n$ ;

— determinar los límites  $\pm t_{\alpha/2, n-1}$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ , haciendo uso de las tablas de la  $t$  de Student;

— efectuar la extracción de una muestra aleatoria de  $n$  elementos;

— determinar los valores de la media y de la cuasi-variancia muestrales, y formar el estadístico

$$\xi = \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n}$$

— si el valor  $\xi$  así obtenido está comprendido dentro del intervalo  $\pm t_{\alpha/2, n-1}$  aceptar la hipótesis  $H_0$ , rechazándola en caso contrario.

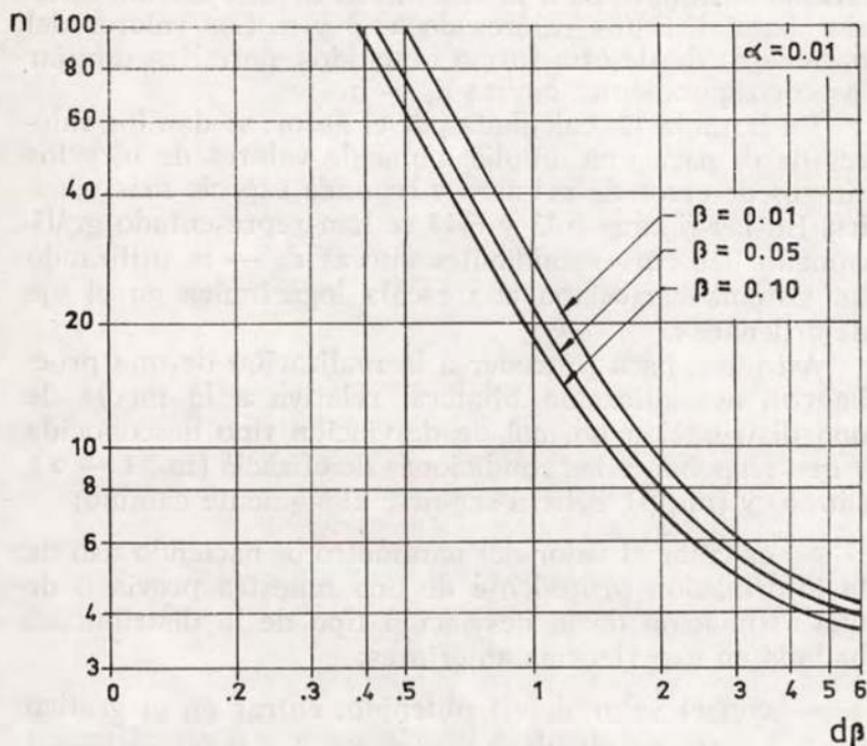


Fig. 6.43

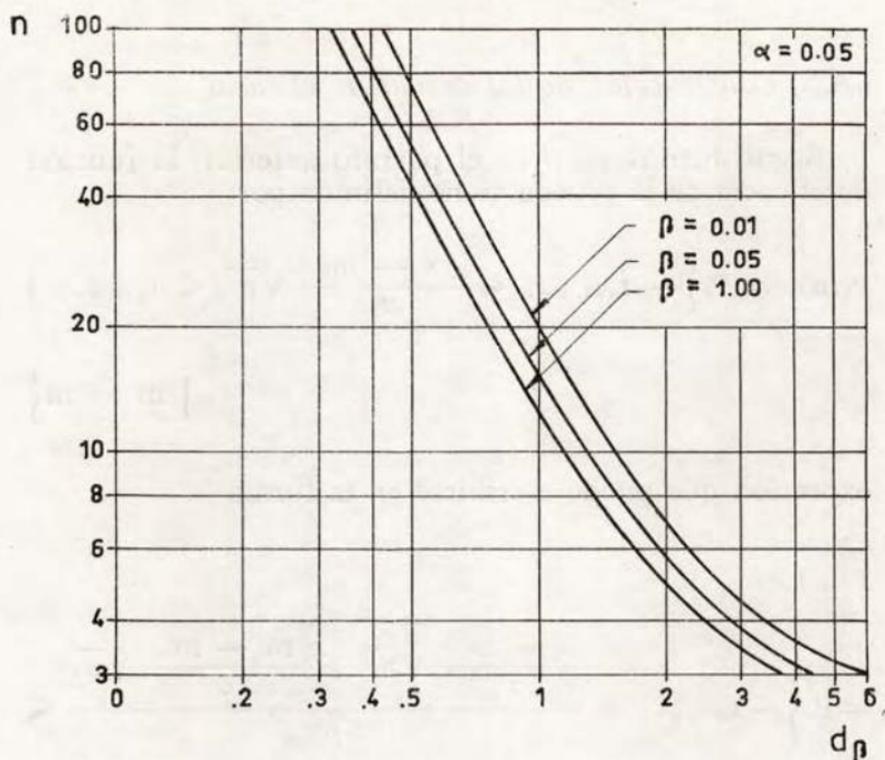


Fig. 6.44

Es de observar que, debido a la forma en que han sido calculados, los gráficos  $d_\beta - n$  correspondientes a las pruebas con especificación bilateral y un nivel de significación  $\alpha$ , pueden ser utilizados para construir pruebas con especificación unilateral y un nivel de significación  $\alpha/2$ .

De igual forma los gráficos  $d_\beta - n$  correspondientes a pruebas con especificación unilateral y nivel de significación  $\alpha$ , pueden ser utilizados para resolver, de forma aproximada, pruebas con especificación bilateral y un nivel de significación  $2\alpha$ .

### 6.5.2 Construcción de las curvas de eficacia

Según hemos visto en el párrafo anterior, la función de eficacia de la prueba viene definida por

$$P(m) = \Pr \left\{ -t_{\alpha/2, n-1} \leq \frac{\bar{x} - m_0}{S} \sqrt{n} \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid m = m \right\}$$

expresión que puede escribirse en la forma

$$P(m) = \Pr \left\{ -t_{\alpha/2, n-1} \leq \frac{\frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} + \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n}}{S/\sigma} \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid m = m \right\}$$

o lo que es lo mismo

$$P(d) = \Pr \left\{ -t_{\alpha/2, n-1} \leq t^* \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid \delta = d\sqrt{n}, f = n - 1 \right\}$$

A partir de esta ecuación pueden obtenerse las curvas de eficacia.

Diversos autores han determinado familias de curvas de eficacia que permiten el cálculo aproximado del tamaño de la muestra siguiendo un método idéntico al descrito en el párrafo 6.4.3.

## 6.6 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA DESVIACION TIPO DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA CONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL

### 6.6.1 Especificación unilateral superior

Se trata de probar si la desviación tipo de una distribución normal  $N(m, \sigma)$  de media conocida es igual o menor que un valor especificado  $\sigma_1$ ; es decir, se trata de probar la hipótesis  $H_0: \sigma \leq \sigma_0$  contra la hipótesis  $H_1: \sigma > \sigma_0$ . Se desea que, cuando la desviación tipo de la distribución sea realmente igual o menor que  $\sigma_0$ , exista como mínimo una casi-seguridad  $1 - \alpha$  de llegar a esta conclusión, mientras que, cuando la desviación tipo de la distribución sea igual a  $\sigma_1$ , exista tan sólo una probabilidad  $\beta$  de creer, erróneamente, que la desviación tipo de la distribución es igual o menor que  $\sigma_0$ .

Si en lugar de referirnos al valor absoluto,  $\sigma$ , de la desviación tipo nos referimos al valor relativo

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

lo cual resulta mucho más cómodo, las condiciones de eficacia deseadas se traducen en el hecho de que la curva de eficacia de la prueba debe pasar por los puntos  $(1, 1 - \alpha)$  y  $(\sigma_1/\sigma_0, \beta)$  (ver fig. 6.45).

En este caso adoptaremos como función discriminante la variable aleatoria

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2}$$

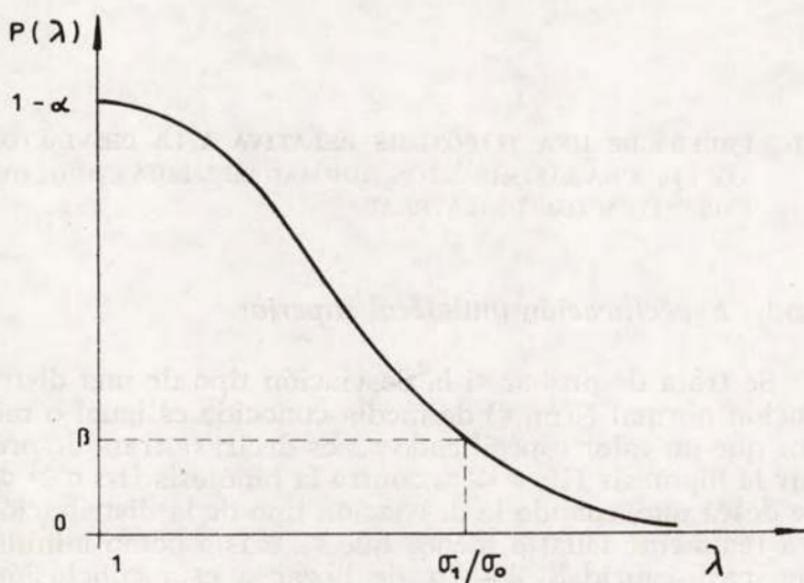


Fig. 6.45

que, dentro del marco de la hipótesis  $\sigma = \sigma_0$ , se distribuye de acuerdo con una ley de  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad.

La prueba  $T\{\sigma \leq \sigma_0 \mid \sigma > \sigma_0\}$  uniformemente de máxima potencia vendrá definida, en estas condiciones, por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha, n}^2 \right\}$$

siendo  $\chi_{\alpha, n}^2$  la cuantila de orden  $1 - \alpha$  de la distribución de  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad, es decir, un valor que cumple con la condición

$$Pr\{\chi_n^2 > \chi_{\alpha, n}^2\} = \alpha$$

Definida la región de aceptación para  $H_0$ , si la desviación tipo de la distribución es realmente igual a  $\sigma$ , existirá una probabilidad

$$P(\sigma) = P_r \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha, n}^2 \mid \sigma = \sigma \right\}$$

de aceptar indebidamente la hipótesis  $H_0$ . Esta probabilidad define la función de eficacia de la prueba. Evidentemente cuando  $\sigma = \sigma_0$ ,  $P(\sigma_0) = 1 - \alpha$ . Por otra parte, cuando  $\sigma = \sigma_1$ , debe cumplirse que

$$P_r \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha, n}^2 \mid \sigma = \sigma_1 \right\} = \beta$$

condición que puede escribirse en la forma

$$P_r \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_1^2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2 \leq \chi_{\alpha, n}^2 \mid \sigma = \sigma_1 \right\} = \beta$$

o lo que es lo mismo

$$P_r \left\{ \chi_n^2 \leq \frac{\chi_{\alpha, n}^2}{\lambda_\beta} \right\} = \beta$$

siendo  $\lambda_\beta = \sigma_1/\sigma_0$ . A partir de esta expresión puede determinarse el tamaño de la muestra que debe adoptarse en el plan de experimentación y el límite de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ . En efecto, la igualdad anterior exige que

$$\frac{\chi_{\alpha, n}^2}{\lambda_\beta} = \chi_{1-\beta, n}^2$$

En consecuencia, para determinar  $n$  bastará resolver la ecuación

$$\lambda_\beta^2 = \frac{\chi_{\alpha, n}^2}{\chi_{1-\beta, n}^2}$$

La resolución de esta ecuación es muy sencilla haciendo uso de las tablas de la función de distribución de la variable aleatoria  $\chi^2$ . Todo se reducirá a buscar aquel tamaño de muestra para el cual el cociente  $\chi_{\alpha, n}^2 / \chi_{1-\beta, n}^2$  sea lo más parecido posible a  $\lambda_{\beta}^2 = (\sigma_1 / \sigma_0)^2$ .

La determinación de  $n$  puede facilitarse considerablemente si se dispone de representaciones gráficas de la función de  $\nu$

$$\lambda^2 = \frac{\chi_{\alpha, \nu}^2}{\chi_{1-\beta, \nu}^2}$$

para los valores más usuales de los riesgos de error de primera y segunda especie. Entrando en estas curvas con el valor  $\lambda_{\beta}^2 = (\sigma_1 / \sigma_0)^2$  podrá leerse directamente el valor de  $n$  toda vez que, en este caso,  $\nu = n$  (ver fig. 6.46).

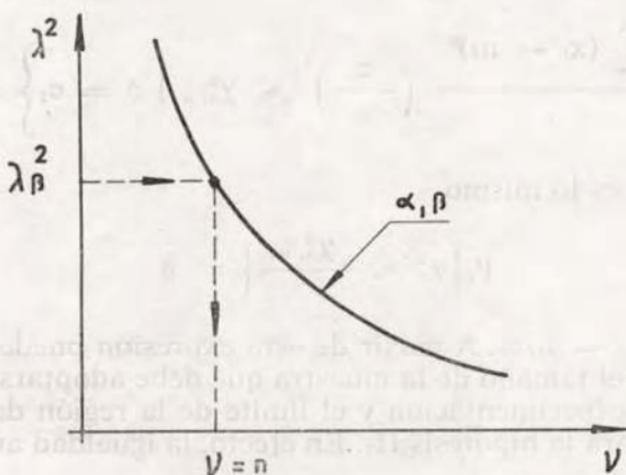


Fig. 6.46

En la tabla 13, calculada por el autor, se dan los valores de  $\lambda^2$  para una extensa gama de valores de  $\nu$ , y los riesgos de error de primera y segunda especie más usuales. En la figura 6.47 se han representado gráficamente las correspondientes curvas  $\nu - \lambda^2$ , utilizando un sistema cartesiano con escala logarítmica en ambos ejes.

Cuando se presume que el valor que debe adoptarse para  $n$  es bastante elevado, puede utilizarse un método aproximado para su determinación, basado en las propiedades asintóticas de la variable aleatoria

$$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

que, según sabemos, tiende hacia una variable normal  $N(0, 1)$  cuando  $\nu$  tiende a infinito.

Para  $\nu = n > 30$  es posible escribir

$$\sqrt{2\chi_{\alpha, n}^2} - \sqrt{2n - 1} = K_{\alpha}$$

$$\sqrt{2\chi_{1-\beta, n}^2} - \sqrt{2n - 1} = K_{1-\beta} = -K_{\beta}$$

y en consecuencia

$$\lambda_{\beta}^2 = \frac{\chi_{\alpha, n}^2}{\chi_{1-\beta, n}^2} = \left[ \frac{K_{\alpha} + \sqrt{2n - 1}}{K_{1-\beta} + \sqrt{2n - 1}} \right]$$

de donde

$$n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ \frac{K_{\alpha} + \lambda_{\beta} K_{\beta}}{\lambda_{\beta} - 1} \right]^2 \right\}$$

Conviene insistir sobre el hecho de que este método sólo será válido si el valor de  $n$  obtenido a partir de la fórmula anterior resulta ser superior a 30. En caso contrario, debe recurrirse al método gráfico.

Así pues, para proceder a la realización de una prueba con especificación unilateral superior relativa a la desviación tipo de una distribución normal de media conocida y que responde a las condiciones de eficacia  $(1, 1 - \alpha)$  y  $(\sigma_1/\sigma_0, \beta)$ , deberá seguirse el siguiente camino:

— calcular el valor del parámetro  $\lambda_{\beta}^2$  a partir de la expresión

$$\lambda_{\beta}^2 = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2$$

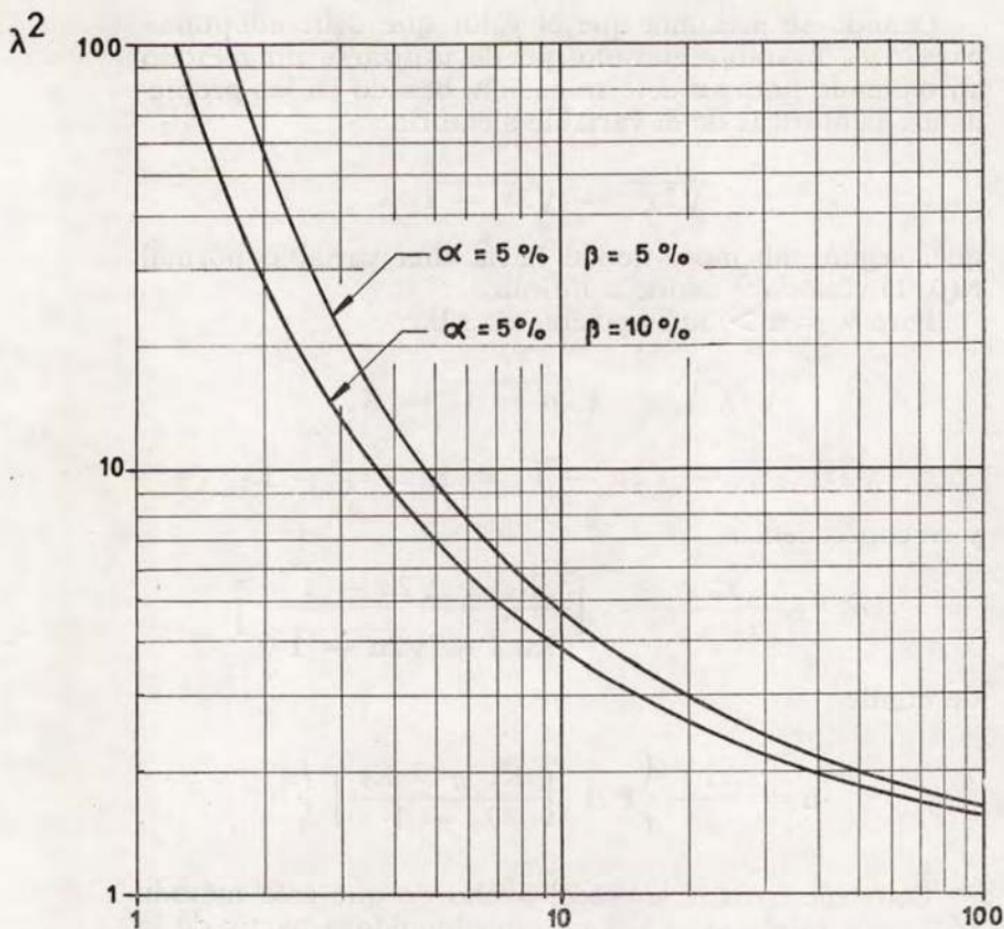


Fig. 6.47

— con el valor  $\lambda_{\beta}^2$  así obtenido entrar en el gráfico y —  $\lambda^2$  correspondiente a los riesgos de error  $\alpha$  y  $\beta$  especificados y leer el valor de  $n$ ;

— determinar el límite  $\chi_{\alpha, n}^2$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ , haciendo uso de las tablas de la función de distribución de la variable aleatoria  $\chi^2$ ;

— efectuar la extracción de una muestra aleatoria de  $n$  elementos;

— formar el estadístico

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2}$$

— si el valor  $\xi$  así obtenido es igual o menor que  $\chi_{\alpha, n}^2$ , aceptar la hipótesis  $H_0$ , rechazándola en caso contrario.

### 6.6.2 Especificación unilateral inferior

En este caso se trata de construir una prueba  $T\{\sigma \geq \sigma_0 \mid \sigma < \sigma_0\}$  cuya curva de eficacia pase por los puntos  $(1, 1 - \alpha)$  y  $(\sigma_1/\sigma_0, \beta)$  (ver fig. 6.48).

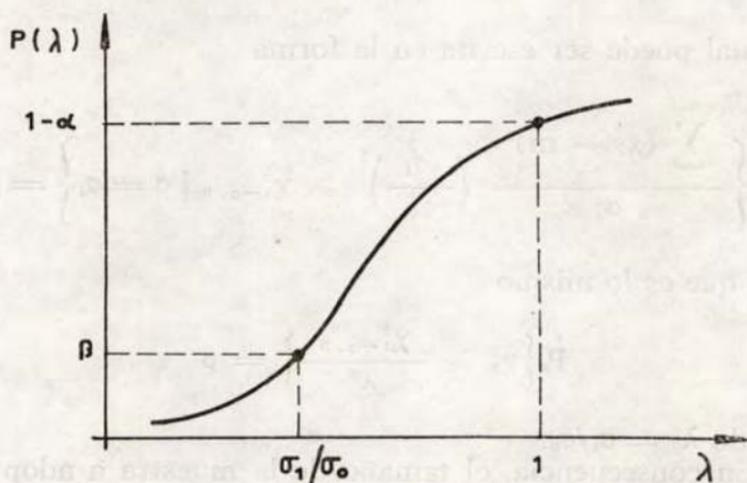


Fig. 6.48

Dicha prueba vendrá definida por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{1-\alpha, n}^2 \right\}$$

donde  $\chi_{1-\alpha, n}^2$  es la cuantila de orden  $\alpha$  de la distribución de  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad.

La función de eficacia de la prueba vendrá definida por la expresión

$$P(\sigma) = \text{Pr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{1-\alpha, n}^2 \mid \sigma = \sigma \right\}$$

Para  $\sigma = \sigma_1$  deberá cumplirse la condición

$$\text{Pr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{1-\alpha, n}^2 \mid \sigma = \sigma_1 \right\} = \beta$$

la cual puede ser escrita en la forma

$$\text{Pr} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_1^2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2 \geq \chi_{1-\alpha, n}^2 \mid \sigma = \sigma_1 \right\} = \beta$$

o lo que es lo mismo

$$\text{Pr} \left\{ \chi_n^2 \geq \frac{\chi_{1-\alpha, n}^2}{\lambda_\beta^2} \right\} = \beta$$

siendo  $\lambda_\beta = \sigma_1/\sigma_0$ .

En consecuencia, el tamaño de la muestra a adoptar en el plan de experimentación podrá determinarse a partir de la ecuación

$$\chi_{\beta, n}^2 = \frac{\chi_{1-\alpha, n}^2}{\lambda_\beta^2}$$

o lo que es lo mismo, a partir de la ecuación

$$\lambda_\beta^2 = \frac{\chi_{1-\alpha, n}^2}{\chi_{\beta, n}^2}$$

Para resolver dicha ecuación bastará buscar aquel valor de  $n$  para el cual el cociente  $\chi_{1-\alpha, n}^2 / \chi_{\beta, n}^2$  sea lo más parecido posible a  $\lambda_{\beta}^2$ .

La determinación de  $n$  puede facilitarse considerablemente mediante uso de las curvas  $\nu - \lambda^2$ .

En la tabla 14, calculada por el autor, se dan los valores de  $\lambda^2$  para una extensa gama de valores de  $\nu$  y los riesgos de error de primera y segunda especie más usuales. En la figura 6.49 se han representado gráficamente las correspondientes curvas  $\nu - \lambda^2$  utilizando un sistema cartesiano con escala logarítmica en ambos ejes.

También en este caso es posible utilizar el método aproximado de determinación de  $n$ , basado en las propiedades asintóticas de la variable aleatoria

$$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

En este caso debe escribirse

$$\sqrt{2\chi_{1-\alpha, n}^2} - \sqrt{2n - 1} = K_{1-\alpha} = -K_{\alpha}$$

$$\sqrt{2\chi_{\beta, n}^2} - \sqrt{2n - 1} = K_{\beta}$$

de donde

$$\lambda_{\beta}^2 = \frac{\chi_{1-\alpha, n}^2}{\chi_{\beta, n}^2} = \left[ \frac{K_{1-\alpha} + \sqrt{2n - 1}}{K_{\beta} + \sqrt{2n - 1}} \right]^2$$

y en consecuencia

$$n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ \frac{K_{\alpha} + \lambda_{\beta} K_{\beta}}{\lambda_{\beta} - 1} \right]^2 \right\}$$

expresión idéntica a la obtenida en el caso de especificación unilateral superior.

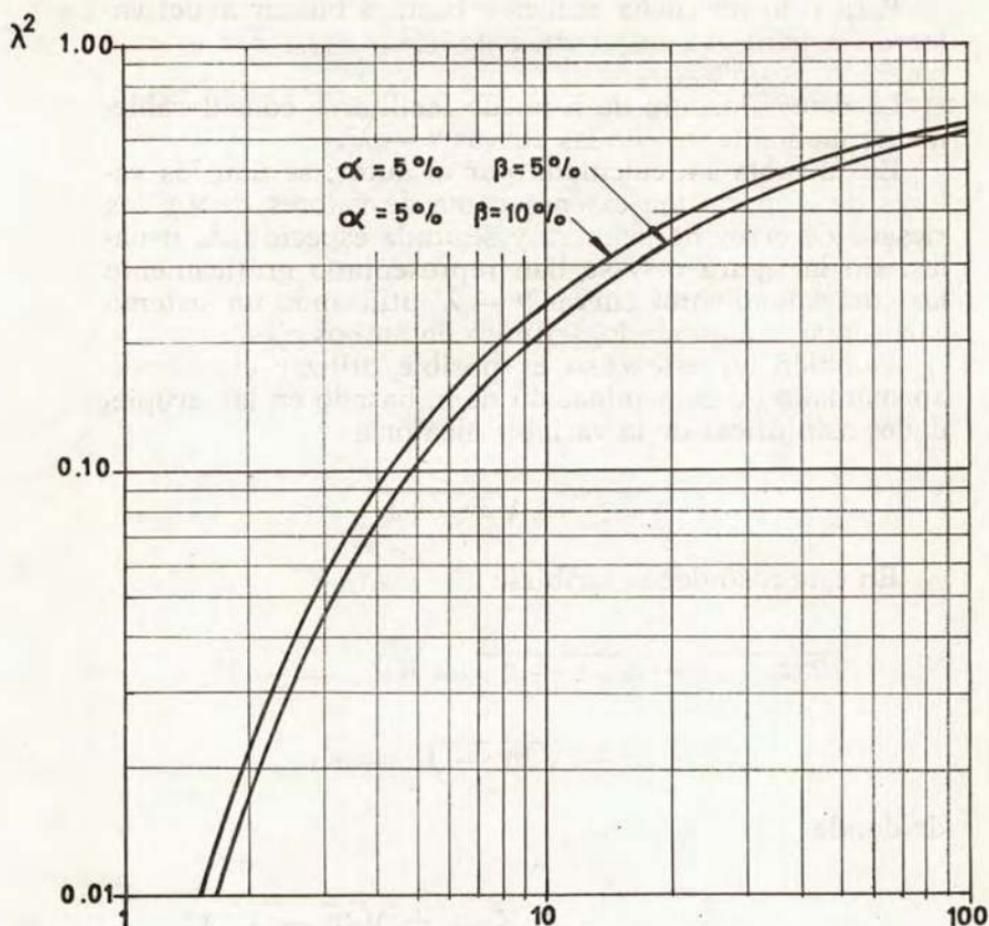


Fig. 6.49

### 6.6.3 Construcción de las curvas de eficacia

En el caso de una prueba con especificación unilateral superior, la función de eficacia viene definida por la expresión

$$P(\sigma) = \Pr\left\{\frac{\sum(x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha, n}^2 \mid \sigma = \sigma\right\}$$

que también puede escribirse en la forma

$$P(\lambda) = P_r \left\{ \chi_n^2 \leq \frac{\chi_{\alpha, n}^2}{\lambda^2} \right\}$$

Esta expresión permite la construcción de las curvas de eficacia  $\lambda - P(\lambda)$ .

De igual forma, en el caso de una prueba con especificación unilateral inferior, el trazado de las curvas de eficacia puede hacerse a partir de la expresión

$$P(\lambda) = P_r \left\{ \chi_n^2 \geq \frac{\chi_{1-\alpha, n}^2}{\lambda^2} \right\}$$

## 6.7 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA DESVIACION TIPO DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA CONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL

### 6.7.1 Construcción de la prueba

Se trata de probar si la desviación tipo de una distribución normal  $N(m, \sigma)$  de media conocida es igual a un valor especificado  $\sigma_0$ ; es decir, se trata de probar la hipótesis  $H_0: \sigma = \sigma_0$  contra la hipótesis  $H_1: \sigma \neq \sigma_0$ . Se desea que, cuando la desviación tipo de la distribución sea realmente igual a  $\sigma_0$ , exista una casi-seguridad  $1 - \alpha$  de llegar a esta conclusión, mientras que, cuando la desviación tipo de la distribución sea igual a  $\sigma_1$ , exista tan sólo una probabilidad  $\beta$  de creer, erróneamente, que la desviación tipo es igual a  $\sigma_0$ .

Si en lugar de referirnos al valor absoluto,  $\sigma$ , de la desviación tipo, nos referimos al valor relativo

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

las condiciones de eficacia deseadas se traducen en el hecho de que la curva de eficacia de la prueba debe pasar por los puntos  $(1, 1 - \alpha)$  y  $(\sigma_1/\sigma_0, \beta)$  (ver fig. 6.50 a y b).

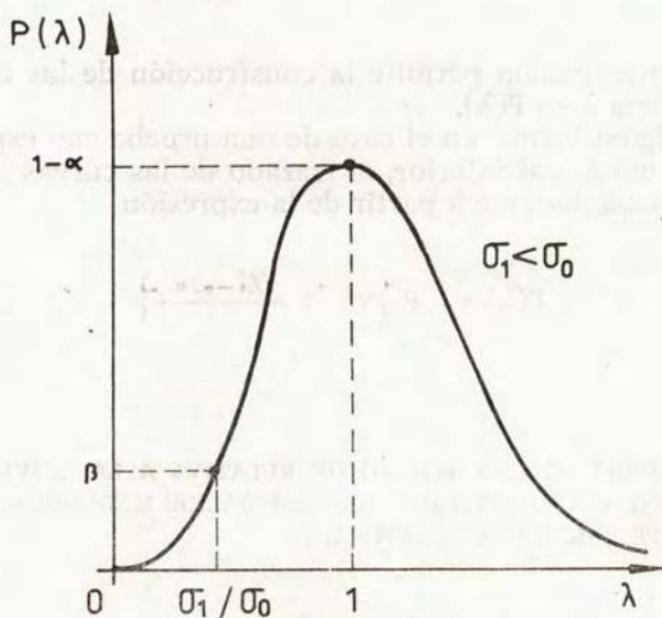


Fig. 6.50a

En este caso la adopción de la función discriminante

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2}$$

conduce a una prueba uniformemente de potencia máxima, definida por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_\alpha = \left\{ \chi_{1-\alpha/2, n}^2 \leq \frac{\sum (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha/2, n}^2 \right\}$$

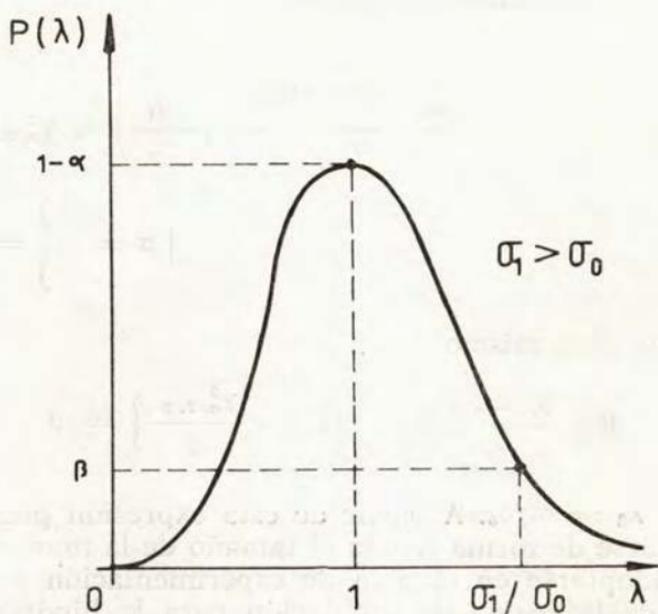


Fig. 6.50b

siendo  $\chi^2_{1-\alpha/2, n}$  y  $\chi^2_{\alpha/2, n}$  las cuantilas de orden  $\alpha/2$  y  $1 - \alpha/2$  de la distribución de  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad, respectivamente.

La función de eficacia de la prueba viene definida por la ecuación

$$P(\sigma) = \Pr \left\{ \chi^2_{1-\alpha/2, n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha/2, n} \mid \sigma = \sigma \right\}$$

Para  $\sigma = \sigma_1$  debe cumplirse la condición

$$\Pr \left\{ \chi^2_{1-\alpha/2, n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha/2, n} \mid \sigma = \sigma_1 \right\} = \beta$$

que puede escribirse en la forma

$$\Pr \left\{ \chi^2_{1 - \alpha/2, n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{\sigma_1^2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2 \leq \chi^2_{\alpha/2, n} \mid \sigma = \sigma_1 \right\} = \beta$$

o lo que es lo mismo

$$\Pr \left\{ \frac{\chi^2_{1 - \alpha/2, n}}{\lambda_\beta^2} \leq \chi_n^2 \leq \frac{\chi^2_{\alpha/2, n}}{\lambda_\beta^2} \right\} = \beta$$

siendo  $\lambda_\beta = \sigma_1/\sigma_0$ . A partir de esta expresión puede determinarse de forma exacta el tamaño de la muestra que debe adoptarse en el plan de experimentación y los límites de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ . En efecto, dicha expresión puede escribirse en la forma

$$F \left[ \frac{\chi^2_{\alpha/2, n}}{\lambda_\beta^2} \right] - F \left[ \frac{\chi^2_{1 - \alpha/2, n}}{\lambda_\beta^2} \right] = \beta$$

Por consiguiente, bastará determinar el valor de las funciones de distribución correspondientes a  $\chi^2_{1 - \alpha/2, n}/\lambda_\beta^2$  y  $\chi^2_{\alpha/2, n}/\lambda_\beta^2$  para distintos valores de  $n$ , y retener como tamaño de la muestra aquel para el cual la diferencia entre dichas funciones de distribución sea lo más parecida posible a  $\beta$  (ver fig. 6.51).

Este proceso de determinación de  $n$  es, ciertamente, bastante laborioso. Sin embargo, a veces es posible adoptar simplificaciones que permiten obtener con facilidad un valor de  $n$  suficientemente aproximado. En efecto, cuando por la naturaleza de las condiciones de eficacia preestablecidas se cumple que

$$\Pr \left\{ \chi_n^2 \leq \frac{\chi^2_{1 - \alpha/2, n}}{\lambda_\beta^2} \right\}$$

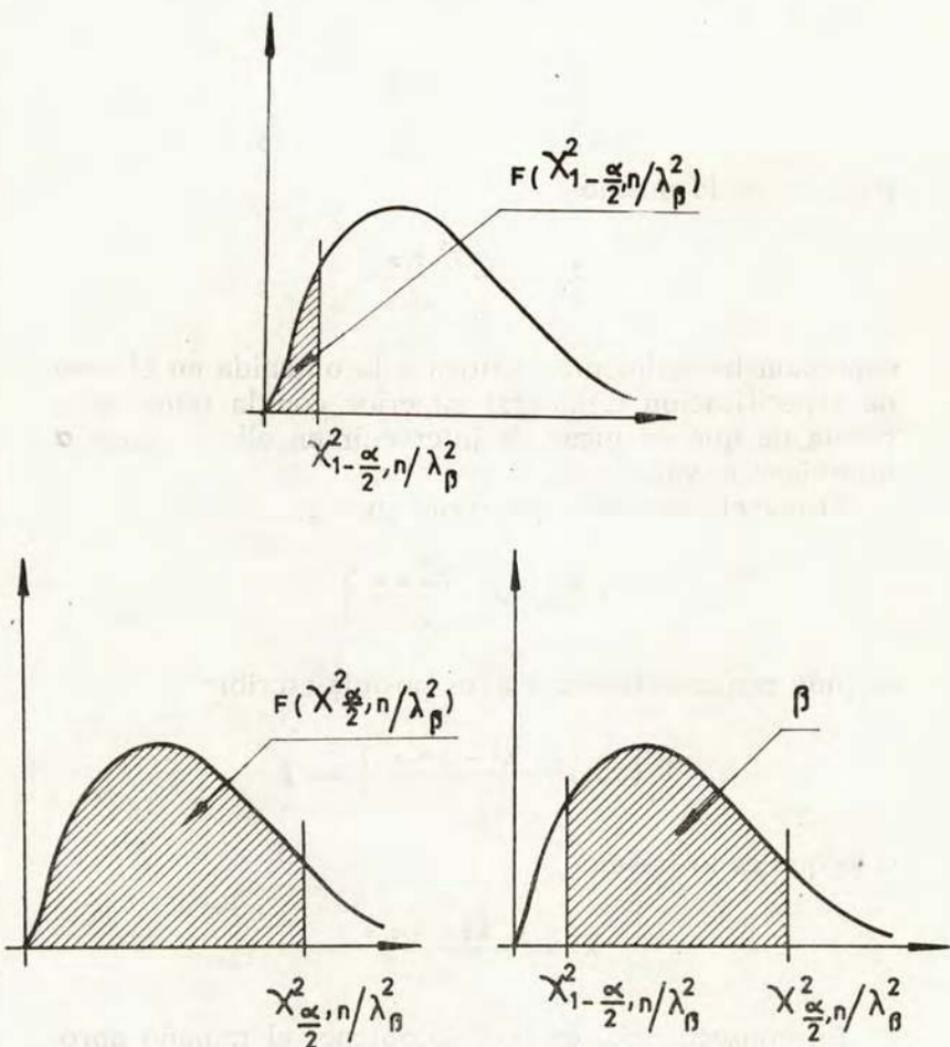


Fig. 6.51

es muy pequeño frente a  $\beta$ , es posible escribir

$$\Pr\left\{\chi_n^2 \leq \frac{\chi_{\alpha/2, n}^2}{\lambda_\beta^2}\right\} = \beta$$

es decir

$$\chi_{1-\beta, n}^2 = \frac{\chi_{\alpha/2, n}^2}{\lambda_{\beta}^2}$$

o lo que es lo mismo

$$\lambda_{\beta}^2 = \frac{\chi_{\alpha/2, n}^2}{\chi_{1-\beta, n}^2}$$

expresión formalmente idéntica a la obtenida en el caso de especificación unilateral superior con la única diferencia de que en lugar de intervenir en ella el valor  $\alpha$  interviene el valor  $\alpha/2$ .

Si por el contrario se cumple que

$$P_r \left\{ \chi_n^2 \geq \frac{\chi_{\alpha/2, n}^2}{\lambda_{\beta}^2} \right\}$$

es muy pequeño frente a  $\beta$ , es posible escribir

$$P_r \left\{ \chi_n^2 \geq \frac{\chi_{1-\alpha/2, n}^2}{\lambda_{\beta}^2} \right\} = \beta$$

o lo que es lo mismo

$$\lambda_{\beta}^2 = \frac{\chi_{1-\alpha/2, n}^2}{\chi_{\beta, n}^2}$$

En consecuencia, es posible obtener el tamaño aproximado de la muestra mediante el método basado en el trazado de las curvas  $\nu - \lambda^2$ .

En las tablas 15 y 16, calculadas por el autor, se dan los valores de  $\lambda^2$  correspondientes a cada una de las aproximaciones supuestas, para una extensa gama de valores de  $\nu$ , y los riesgos de error de primera y segunda especie más usuales. En las figuras 6.52 y 6.53 se han representado gráficamente las correspondientes curvas

$\nu - \lambda^2$  utilizando un sistema cartesiano con escala logarítmica en ambos ejes.

Evidentemente estos gráficos pueden utilizarse para

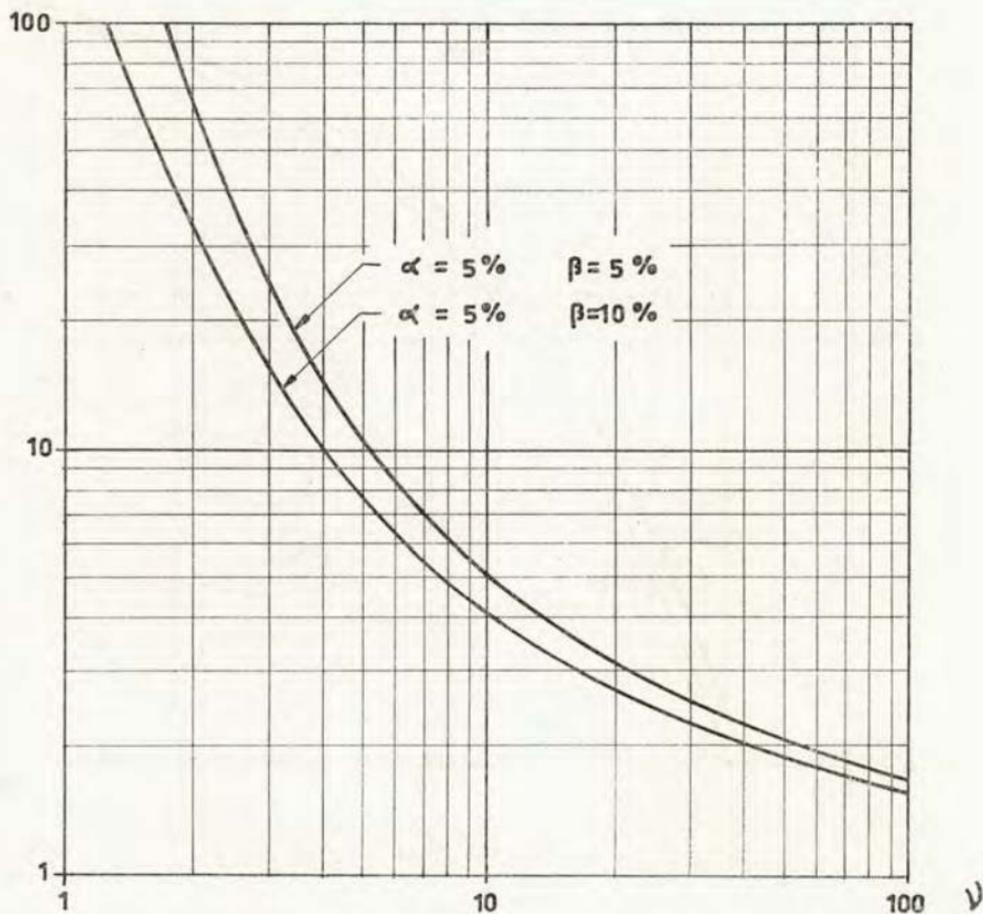


Fig. 6.52

la construcción de pruebas con especificación unilateral y un nivel de significación  $\alpha/2$ . De igual forma, los gráficos  $\nu - \lambda^2$  correspondientes a pruebas con especificación unilateral y nivel de significación  $\alpha$  pueden ser utilizados para construir, de forma aproximada, pruebas

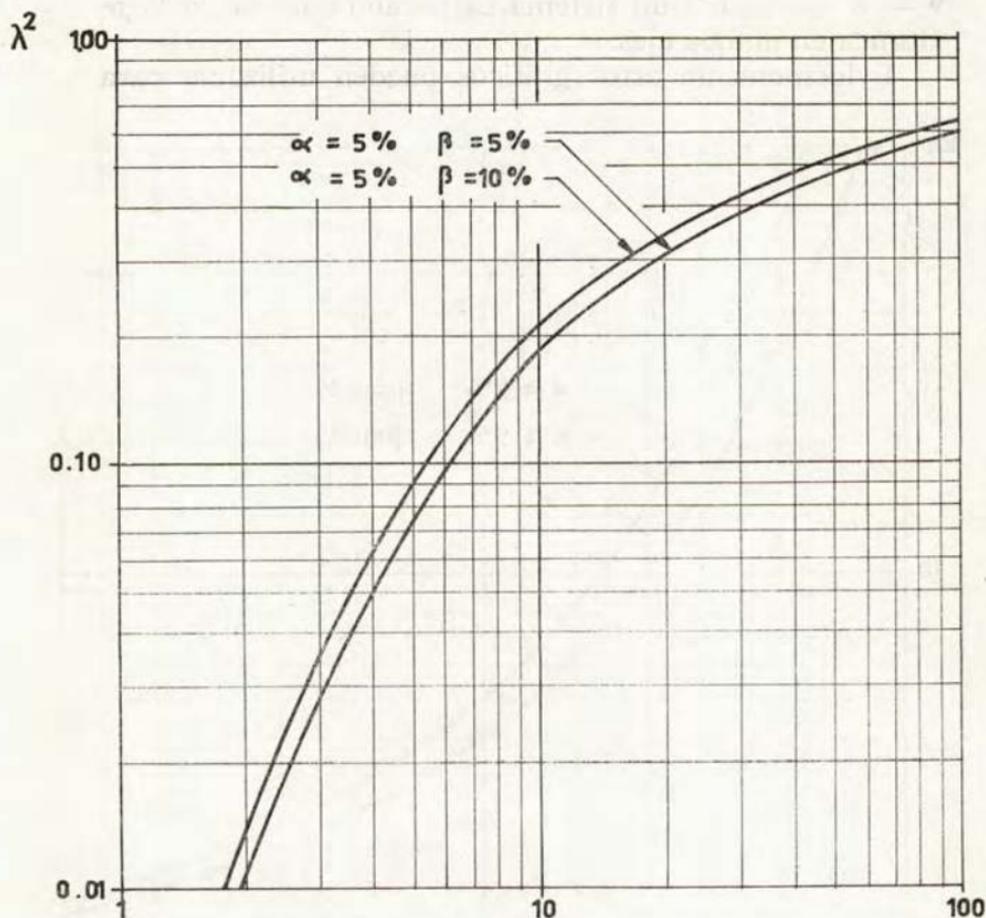


Fig. 6.53

con especificación bilateral y un nivel de significación  $2\alpha$ .

Una vez obtenido el tamaño de la muestra mediante el método aproximado, hay que comprobar la validez de la hipótesis de partida relativa a la pequeñez de una de las dos colas determinadas sobre la distribución de  $\chi_n^2$  por los valores  $\chi_{1-\alpha/2, n}^2/\lambda_\beta^2$  y  $\chi_{\alpha/2, n}^2/\lambda_\beta^2$ . Si tal hipótesis resulta no ser cierta, debe recurrirse al método exacto para la determinación de  $n$ .

Así pues, para proceder a la realización de una prueba con especificación bilateral relativa a la desviación tipo de una distribución normal de media conocida y que responda a las condiciones de eficacia  $(1, 1 - \alpha)$  y  $(\sigma_1/\sigma_0, \beta)$ , deberá seguirse el siguiente camino:

- calcular el valor del parámetro  $\lambda_\beta^2 = (\sigma_1/\sigma_0)^2$ ;
- entrar con dicho valor en el gráfico  $\nu - \lambda^2$ , correspondiente a los riesgos  $\alpha$  y  $\beta$  especificados, y leer el valor de  $n$ ;
- determinar los límites  $\chi_{1-\alpha/2, n}^2$  y  $\chi_{\alpha/2, n}^2$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ , haciendo uso de las tablas de la función de distribución de la variable aleatoria  $\chi^2$ ;
- efectuar la extracción de una muestra aleatoria de  $n$  elementos;
- formar el estadístico

$$\xi = \frac{\sum(x_i - m)^2}{\sigma_0^2}$$

— si el valor  $\xi$  así obtenido está comprendido dentro del intervalo  $(\chi_{1-\alpha/2, n}^2, \chi_{\alpha/2, n}^2)$ , aceptar la hipótesis  $H_0$ , rechazándola en caso contrario.

### 6.7.2 Construcción de las curvas de eficacia

Según hemos visto en el párrafo anterior, la función de eficacia de la prueba viene definida por la expresión

$$P(\sigma) = P_r \left\{ \chi_{1-\alpha/2, n}^2 \leq \frac{\sum(x_i - m)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha/2, n}^2 \mid \sigma = \sigma \right\}$$

que puede ser escrita en la forma

$$P(\lambda) = P_r \left\{ \frac{\chi_{1-\alpha/2, n}^2}{\lambda^2} \leq \chi_n^2 \leq \frac{\chi_{\alpha/2, n}^2}{\lambda^2} \right\}$$

siendo  $\lambda = \sigma/\sigma_0$ . A partir de esta ecuación pueden obtenerse las curvas de eficacia de la prueba.

## 6.8 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA DESVIACION TIPO DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA DESCONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL

### 6.8.1 Especificación unilateral superior

Dado que la media poblacional es desconocida, con- vendrá adoptar como función discriminante

$$\xi = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma_0^2}$$

que dentro del marco de la hipótesis  $\sigma = \sigma_0$  se distribuye de acuerdo con una ley de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad.

La adopción de esta función discriminante conduce a una prueba uniformemente de potencia máxima, definida por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha, n-1}^2 \right\}$$

siendo  $\chi_{\alpha, n-1}^2$  la cuantila de orden  $1 - \alpha$  de la distribución de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad.

La función de eficacia de la prueba vendrá definida en este caso por

$$P(\sigma) = P_r \left\{ \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha, n-1}^2 \mid \sigma = \sigma \right\}$$

y para  $\sigma = \sigma_1$  se podrá escribir

$$Pr \left\{ \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_i} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2 \leq \chi_{\alpha, n-1}^2 \right\} = \beta$$

o lo que es lo mismo

$$Pr \left\{ \chi_{n-1}^2 \leq \frac{\chi_{\alpha, n-1}^2}{\lambda_{\beta}^2} \right\}$$

De esta expresión se deduce inmediatamente que

$$\lambda_{\beta}^2 = \frac{\chi_{\alpha, n-1}^2}{\chi_{1-\beta, n-1}^2}$$

ecuación que permite determinar el tamaño de la muestra a adoptar en el plan de experimentación.

El empleo de la tabla 13 o de las curvas de la figura 6.47, facilita considerablemente la deducción de  $n$ . En efecto, basta entrar en las curvas  $\nu - \lambda^2$  con el valor  $\lambda_{\beta}^2 = (\sigma_1/\sigma_0)^2$  y leer el correspondiente valor de  $\nu$  (ver fig. 6.54). El valor de  $n$  será evidentemente igual a  $\nu + 1$ .

Si se presume que el valor que debe adoptarse para  $n$  es bastante elevado, es posible utilizar el método aproximado basado en las propiedades asintóticas de la variable aleatoria

$$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

En este caso

$$\begin{aligned} \sqrt{2\chi_{\alpha, n-1}^2} - \sqrt{2(n-1) - 1} &= K_{\alpha} \\ \sqrt{2\chi_{1-\beta, n-1}^2} - \sqrt{2(n-1) - 1} &= K_{1-\beta} = -K_{\beta} \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$n = \frac{1}{2} \left\{ 3 + \left[ \frac{K_\alpha + \lambda_\beta K_\beta}{\lambda_\beta - 1} \right]^2 \right\}$$

expresión válida siempre y cuando resulte ser  $n > 30$ .

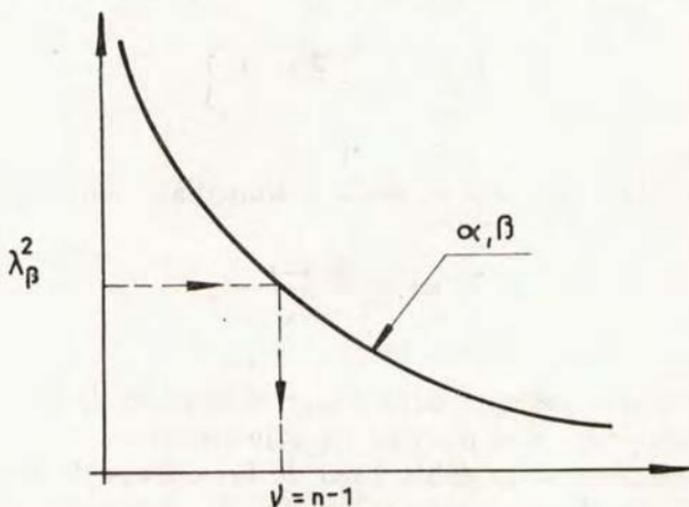


Fig. 6.54

Así pues, para proceder a la realización de una prueba con especificación unilateral superior relativa a la desviación tipo de una distribución normal de media desconocida, y que responda a las condiciones de eficacia  $(1, 1 - \alpha)$  y  $(\sigma_1/\sigma_0, \beta)$ , deberá seguirse el siguiente camino:

— calcular el valor del parámetro  $\lambda_\beta^2$  a partir de la expresión

$$\lambda_\beta^2 = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2$$

— con el valor  $\lambda_\beta^2$  así obtenido entrar en el gráfico  $\nu - \lambda^2$  correspondiente a los riesgos de error  $\alpha$  y  $\beta$  es-

pecificados, y leer el correspondiente valor de  $\nu$ . El tamaño de la muestra será  $n = \nu + 1$ ;

— determinar el límite  $\chi_{\alpha, n-1}^2$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ , haciendo uso de las tablas de la función de distribución de la variable aleatoria  $\chi^2$ ;

— efectuar la extracción de una muestra aleatoria de  $n$  elementos;

— determinar los valores de la media y de la cuasi-variancia muestrales, y formar el estadístico

$$\xi = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma_0^2}$$

— si el valor  $\xi$  así obtenido es igual o menor que  $\chi_{\alpha, n-1}^2$ , aceptar la hipótesis  $H_0$ , rechazándola en caso contrario.

### 6.8.2 Especificación unilateral inferior

En este caso la prueba vendrá definida por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_\alpha = \left\{ \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{1-\alpha, n-1}^2 \right\}$$

donde  $\chi_{1-\alpha, n-1}^2$  es la cuantila de orden  $\alpha$  de la distribución de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad.

La función de eficacia de la prueba vendrá definida por la expresión

$$P(\sigma) = P_r \left\{ \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{1-\alpha, n-1}^2 \mid \sigma = \sigma \right\}$$

y para  $\sigma = \sigma_1$  deberá cumplirse la condición

$$P_r \left\{ \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_1^2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2 \geq \chi_{1-\alpha, n-1}^2 \right\} = \beta$$

la cual puede ser escrita en la forma

$$P_r \left\{ \chi_{n-1}^2 \geq \frac{\chi_{1-\alpha, n-1}^2}{\lambda_\beta^2} \right\} = \beta$$

de donde se deduce inmediatamente que

$$\lambda_\beta^2 = \frac{\chi_{1-\alpha, n-1}^2}{\chi_{\beta, n-1}^2}$$

ecuación que permite determinar el tamaño de la muestra a adoptar en el plan de experimentación.

El empleo de la tabla 14 o de las curvas de la figura 6.49 facilita considerablemente la deducción de  $n$ .

Si se presume que el valor que debe adoptarse para  $n$  es bastante elevado, puede utilizarse para su deducción la expresión aproximada

$$n = \frac{1}{2} \left\{ 3 + \left[ \frac{K_\alpha + \lambda_\beta K_\beta}{\lambda_\beta - 1} \right]^2 \right\}$$

### 6.8.3 Construcción de las curvas de eficacia

En el caso de una prueba con especificación unilateral superior, la función de eficacia de la prueba viene definida por la expresión

$$P(\lambda) = P_r \left\{ \chi_{n-1}^2 \leq \frac{\chi_{\alpha, n-1}^2}{\lambda^2} \right\}$$

a partir de la cual es posible construir las curvas de eficacia  $\lambda - P(\lambda)$ .

De igual forma, en el caso de una prueba con especificación unilateral inferior, el trazado de las curvas de eficacia puede hacerse a partir de la expresión

$$P(\lambda) = P_r \left\{ \chi_{n-1}^2 \geq \frac{\chi_{1-\alpha, n-1}^2}{\lambda^2} \right\}$$

6.9 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA DESVIACION TIPO DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA DESCONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL

6.9.1 Construcción de la prueba

En este caso la adopción de la función discriminante

$$\xi = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}$$

conduce a una prueba uniformemente de máxima potencia definida por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_\alpha = \left\{ \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 \leq \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha/2, n-1}^2 \right\}$$

siendo  $\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$  y  $\chi_{\alpha/2, n-1}^2$  las cuantiles de orden  $\alpha/2$  y  $1 - \alpha/2$  de la distribución de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad respectivamente.

La función de eficacia de la prueba viene definida por la ecuación

$$P(\sigma) = \Pr \left\{ \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 \leq \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha/2, n-1}^2 \mid \sigma = \sigma \right\}$$

y para  $\sigma = \sigma_1$ , deberá cumplirse la condición

$$\Pr \left\{ \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 \leq \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_1^2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2 \leq \chi_{\alpha/2, n-1}^2 \mid \sigma = \sigma_1 \right\} = \beta$$

la cual puede ser escrita en la forma

$$P_r \left\{ \frac{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}{\lambda_\beta^2} \leq \chi_{n-1}^2 \leq \frac{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}{\lambda_\beta^2} \right\} = \beta$$

o lo que es lo mismo

$$F \left[ \frac{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}{\lambda_\beta^2} \right] - F \left[ \frac{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}{\lambda_\beta^2} \right] = \beta$$

expresión que permite la determinación exacta del tamaño de la muestra que debe adoptarse en el plan de experimentación.

Si se cumple que

$$P_r \left\{ \chi_{n-1}^2 \leq \frac{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}{\lambda_\beta^2} \right\}$$

es muy pequeño frente a  $\beta$ , el tamaño de la muestra puede ser determinado, aproximadamente, a partir de la expresión

$$\lambda_\beta^2 = \frac{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}{\chi_{1-\beta, n-1}^2}$$

Si por el contrario se cumple que

$$P_r \left\{ \chi_{n-1}^2 \geq \frac{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}{\lambda_\beta^2} \right\}$$

es muy pequeño frente a  $\beta$ , el tamaño de la muestra podrá ser determinado, aproximadamente a partir de la expresión

$$\lambda_\beta^2 = \frac{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}{\chi_{\beta, n-1}^2}$$

El empleo de las tablas 15 y 16 o de las curvas de las figuras 6.52 y 6.53 facilita considerablemente la deducción de  $n$ .

Así pues, para proceder a la realización de una prueba con especificación bilateral relativa a la desviación tipo de una distribución normal de media desconocida y que responda a las condiciones de eficacia  $(1, 1 - \alpha)$  y  $(\sigma_1/\sigma_0, \beta)$ , deberá seguirse el siguiente camino:

— calcular el valor del parámetro  $\lambda_\beta^2 = (\sigma_1/\sigma_0)^2$

— entrar con dicho valor en el gráfico  $\nu - \lambda^2$  correspondiente a los riesgos  $\alpha$  y  $\beta$  especificados y leer el correspondiente valor de  $\nu$ . El valor de  $n$ , aproximadamente, será igual a  $\nu + 1$ ;

— determinar los límites  $\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$  y  $\chi_{\alpha/2, n-1}^2$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$  haciendo uso de las tablas de la función de distribución de la variable aleatoria  $\chi^2$ ;

— efectuar la extracción de una muestra aleatoria de  $n$  elementos;

— determinar los valores de la media y de la cuasi-variancia muestrales, y formar el estadístico

$$\xi = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma_0^2}$$

— si el valor de  $\xi$  así obtenido está comprendido dentro del intervalo  $(\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2, \chi_{\alpha/2, n-1}^2)$ , aceptar la hipótesis  $H_0$ , rechazándola en caso contrario.

### 6.9.2 Construcción de las curvas de eficacia

La función de eficacia de la prueba viene definida por la expresión

$$P(\sigma) = \Pr \left\{ \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 \leq \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha/2, n-1}^2 \mid \sigma = \sigma \right\}$$

que puede ser escrita en la forma

$$P(\lambda) = \Pr \left\{ \frac{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}{\lambda^2} \leq \chi_{n-1}^2 \leq \frac{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}{\lambda^2} \right\}$$

A partir de esta expresión pueden obtenerse las curvas de eficacia de la prueba.

## CAPITULO 7

### *PRUEBAS DE HIPOTESIS RELATIVAS AL PORCENTAJE DE ELEMENTOS FUERA DE ESPECIFICACION EXISTENTE EN UNA DISTRIBUCION NORMAL*

#### 7.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior hemos desarrollado una serie de métodos que permiten someter a prueba hipótesis relativas a un parámetro (media o desviación tipo) de una distribución normal.

En este capítulo nos ocuparemos de aquellos casos en que, más que llegar a saber si el valor del parámetro desconocido es compatible o no con una cierta hipótesis, lo que realmente interesa es comprobar si el porcentaje de elementos de la población que se hallan fuera de especificación rebasa o no cierto límite superior  $\omega_0$ .

El problema que trataremos de resolver puede, pues, plantearse en los siguientes términos:

«Dada una población normalmente distribuida, probar la hipótesis  $H_0: \omega \leq \omega_0$  contra la hipótesis  $H_1: \omega > \omega_0$ .»

Antes de entrar en la resolución de este problema, conviene precisar el concepto de «elemento fuera de especificación».

Ya hicimos notar en el capítulo 1 que los elementos de toda fabricación deben cumplir con unas ciertas especificaciones para que sean útiles al fin que se destinan. Todo elemento que no cumpla con estas especi-

ficaciones es inutilizable y constituye lo que llamaremos un desecho.

Una especificación puede venir dada, según los casos, en forma de un solo límite (superior o inferior) o en forma de dos límites.

A veces sólo tiene sentido definir la especificación en forma de un cierto límite superior  $T_s$ . Por ejemplo, en el caso de un lignito destinado a ser quemado en una central térmica, será lógico imponer un límite superior de tolerancia para el contenido en azufre, con vistas a evitar corrosiones en la estructura metálica de la caldera, pero carecerá por completo de sentido fijar también un límite inferior, toda vez que en este caso el azufre es un elemento indeseable sea cual fuere la proporción en que se encuentre.

En otros casos, por el contrario, la especificación debe venir definida en forma de un único límite inferior  $T_i$ . Por ejemplo, será lógico exigir una duración mínima a un cierto tipo de lámparas de vapor de sodio destinadas a prestar servicio en el sistema de iluminación de una autopista, mientras que carecerá de sentido imponer un tope máximo a dicha duración.

Finalmente, hay casos en los que la especificación debe venir definida en forma de dos límites  $T_s$  y  $T_i$ . Por ejemplo, la dureza de un acero destinado a la fabricación de ciertos elementos de una máquina no deberá ser, en general, ni demasiado grande ni demasiado pequeña, toda vez que un defecto de dureza puede provocar desgastes prematuros, mientras que un exceso de dureza puede ocasionar dificultades en el proceso de mecanización.

Fijada una especificación, es posible determinar la proporción de elementos defectuosos (desechos) contenidos en una población determinada. Refirámonos al caso concreto de una población de elementos físicos caracterizados por una magnitud medible  $x$  (contenido en azufre de un lignito, duración de vida de una lámpara, dureza de un acero, etc.) cuya ley de distribución es normal  $N(m, \sigma)$ . Supongamos en primer lugar que exista para  $x$  una especificación unilateral inferior definida

por un límite  $T_i$ . En estas condiciones la proporción,  $\omega$ , de elementos fuera de especificación valdrá (ver fig. 7.1).

$$\omega = \phi\left(\frac{T_i - m}{\sigma}\right)$$

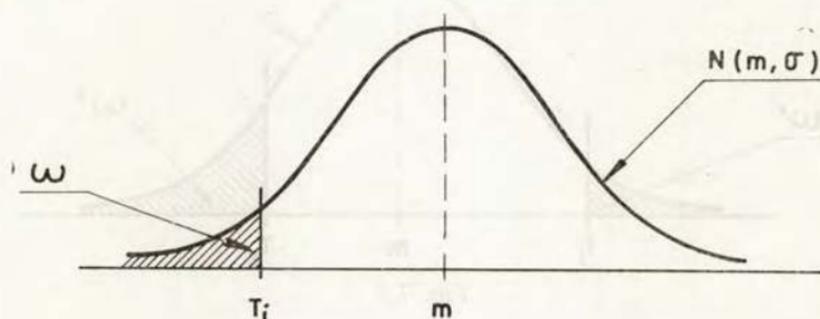


Fig. 7.1

Si, por el contrario, existe para  $x$  una especificación unilateral superior definida por un límite  $T_s$ , la proporción de desechos será (ver fig. 7.2)

$$\omega = 1 - \phi\left(\frac{T_s - m}{\sigma}\right)$$

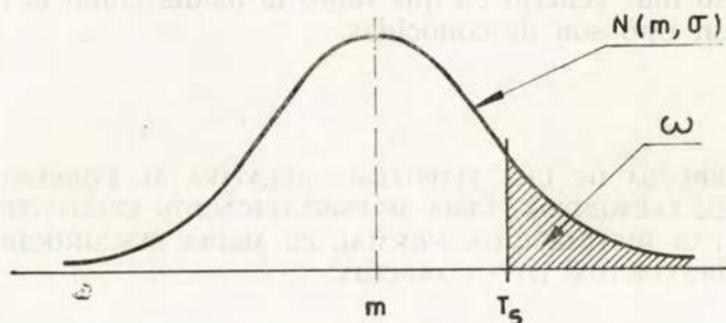


Fig. 7.2

Finalmente, si existe para  $x$  una especificación bilateral definida por los límites  $T_i$  y  $T_s$ , la proporción de desechos será (ver fig. 7.3)

$$\omega = \omega' + \omega'' = \phi\left(\frac{T_i - m}{\sigma}\right) + \left[1 - \phi\left(\frac{T_s - m}{\sigma}\right)\right]$$

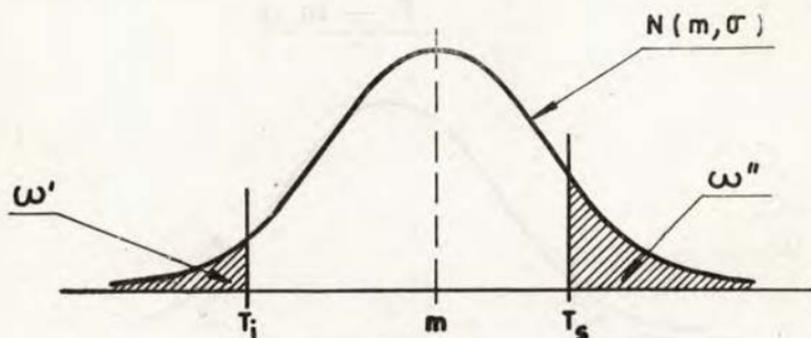


Fig. 7.3.

Precisados los conceptos de especificación, elemento defectuoso o desecho, y proporción de desechos contenida en una población, podemos pasar al planteamiento de la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$ .

En lo que sigue, nos referiremos exclusivamente a distribuciones normales. Empezaremos por considerar el caso en que uno de los dos parámetros de la distribución es desconocido, para pasar después a examinar el caso más general en que tanto la media como la desviación tipo son desconocidas.

## 7.2 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA AL PORCENTAJE DE ELEMENTOS FUERA DE ESPECIFICACION EXISTENTE EN UNA DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA DESCONOCIDA Y DESVIACION TIPO CONOCIDA

### 7.2.1 Enunciado del problema

Se trata de comprobar si la proporción de elementos fuera de especificación existente en una población normalmente distribuida, de media desconocida y desvia-

ción tipo conocida, es igual o menor que un valor especificado  $\omega_0$ ; es decir, se trata de probar la hipótesis  $H_0: \omega \leq \omega_0$  contra la hipótesis  $H_1: \omega > \omega_0$ . Se desea que, cuando la proporción de desechos sea realmente igual o menor que  $\omega_0$ , exista una casi seguridad  $1 - \alpha$  de llegar a dicha conclusión, mientras que, cuando la proporción de desechos sea igual a  $\omega_1$ , exista tan sólo una probabilidad  $\beta$  de creer, erróneamente, que  $\omega$  es igual o menor que  $\omega_0$ . La curva de eficacia de la prueba debe pasar, pues, por los puntos  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  (ver fig. 7.4.).

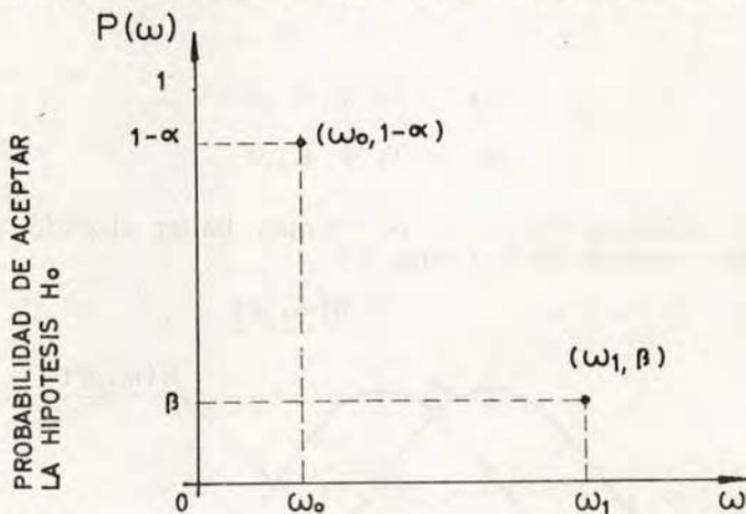


Fig. 7.4

### 7.2.2 Un solo límite de especificación

Si sólo existe un límite de especificación, el planteamiento de la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  es inmediato. Supongamos en primer lugar una especificación definida por un límite inferior  $T_1$ . Dado que entre la proporción de desechos,  $\omega$ , y los parámetros  $m$  y  $\sigma$  de la distribución normal existe, en este caso, la relación funcional

$$\omega = \phi \left( \frac{T_1 - m}{\sigma} \right)$$

se verificará que, para una desviación tipo determinada, a las proporciones de desechos  $\omega_0$  y  $\omega_1$  deberán corresponder unos valores de la media  $m_0$  y  $m_1$ , calculables a partir de las expresiones:

$$K_{1-\omega_0} = \frac{T_i - m_0}{\sigma}$$

$$K_{1-\omega_1} = \frac{T_i - m_1}{\sigma}$$

es decir

$$m_0 = T_i + K_{\omega_0} \sigma$$

$$m_1 = T_i + K_{\omega_1} \sigma$$

A idéntico resultado podríamos haber llegado por simple examen de la figura 7.5.

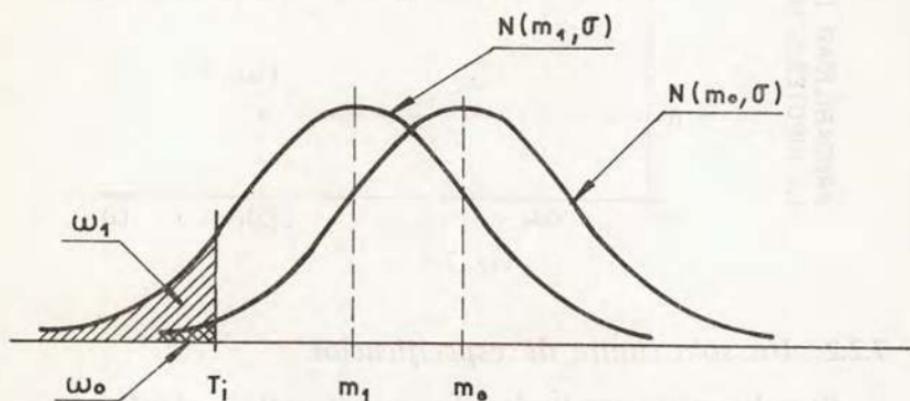


Fig. 7.5

Dado que a todo valor de  $\omega$  es posible hacer corresponder un valor de  $m$ , la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  y una especificación definida por un límite inferior  $T_i$  es en todo equivalente a la prueba  $T\{m \geq m_0 \mid m < m_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_1, \beta)$  (ver

fig. 7.6). En consecuencia, para realizar la prueba bastará extraer una muestra aleatoria de

$$n = \left[ \frac{(K_\alpha + K_\beta)\sigma}{m_0 - m_1} \right]^2 = \left[ \frac{K_\alpha + K_\beta}{K_{\omega_0} - K_{\omega_1}} \right]^2$$

elementos y aceptar la hipótesis  $H_0: \omega \leq \omega_0$  si la correspondiente media muestral  $\bar{x}$  es igual o mayor que el valor límite

$$m_L = \frac{m_1 K_\alpha + m_0 K_\beta}{K_\alpha + K_\beta} = T_i + \sigma \frac{K_{\omega_1} K_\alpha + K_{\omega_0} K_\beta}{K_\alpha + K_\beta}$$

rechazándola en caso contrario

Si la especificación viene definida por un límite superior  $T_s$ , los valores de la media correspondientes a las proporciones de desechos  $\omega_0$  y  $\omega_1$  serán

$$m_0 = T_s - K_{\omega_0} \sigma$$

$$m_1 = T_s - K_{\omega_1} \sigma$$

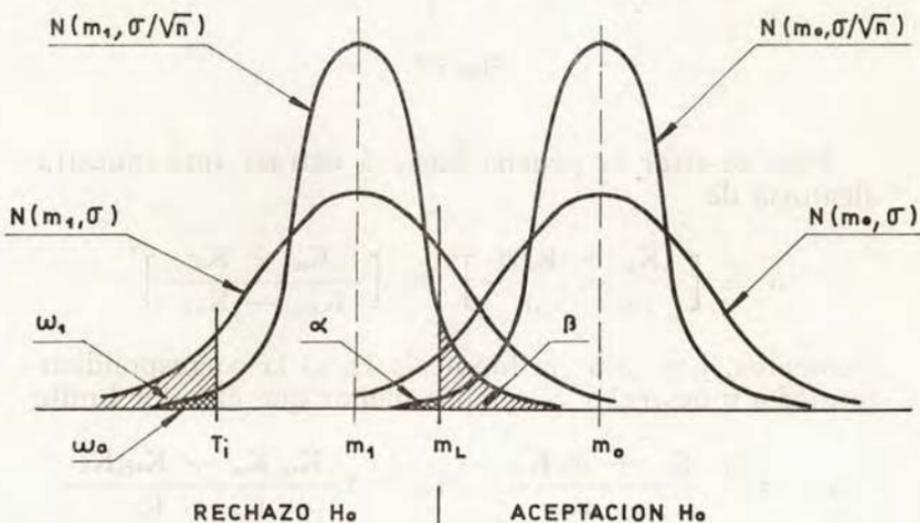


Fig. 7.6

y la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  y una especificación definida por un límite superior  $T_s$ , será en todo equivalente a la prueba  $T\{m \leq m_0 \mid m > m_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(m_0, 1 - \alpha)$  y  $(m_1, \beta)$  (ver fig. 7.7).

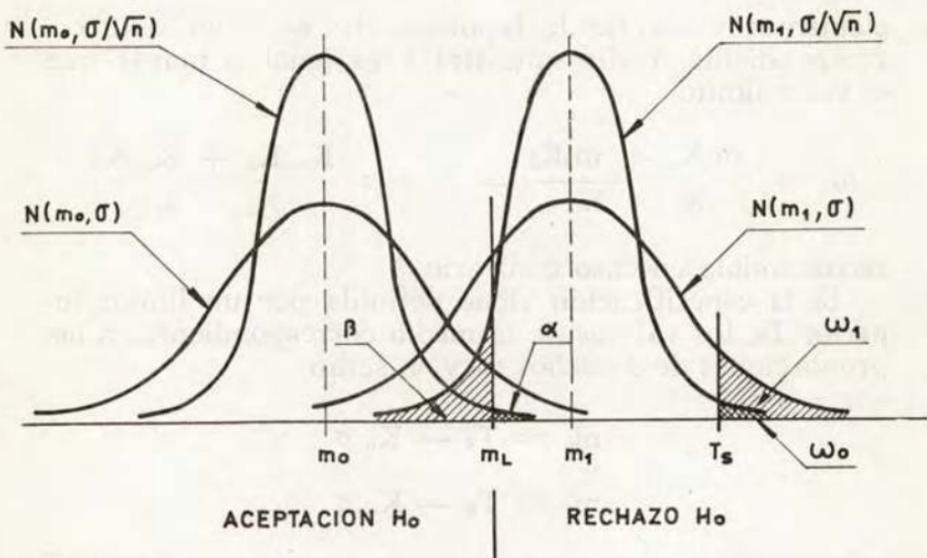


Fig. 7.7

Para realizar la prueba bastará extraer una muestra aleatoria de

$$n = \left[ \frac{(K_\alpha + K_\beta)\sigma}{m_1 - m_0} \right]^2 = \left[ \frac{K_\alpha + K_\beta}{K_{\omega_0} - K_{\omega_1}} \right]^2$$

elementos, y aceptar la hipótesis  $H_0$  si la correspondiente media muestral  $\bar{x}$  es igual o menor que el valor límite

$$m_L = \frac{m_1 K_\alpha + m_0 K_\beta}{K_\alpha + K_\beta} = T_s - \sigma \frac{K_{\omega_1} K_\alpha + K_{\omega_0} K_\beta}{K_\alpha + K_\beta}$$

rechazándola en caso contrario.

### 7.2.3 Dos límites de especificación

Cuando la especificación viene definida en forma de dos límites, el planteamiento de la prueba con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$ , reviste mayores dificultades.

En primer lugar, el paso de la variable proporción de desechos,  $\omega$ , a la variable media poblacional,  $m$ , ya no es inmediato, como ocurría en el caso de una especificación definida por un solo límite. En efecto, la proporción de desechos  $\omega$  correspondiente a una media  $m$  es la suma de las colas  $\omega'$  y  $\omega''$  que quedan respectivamente debajo de  $T_i$  y por encima de  $T_s$  bajo la curva representativa de la función densidad de probabilidad de la distribución (ver fig. 7.8), es decir,

$$\omega = \omega' + \omega''$$

En consecuencia, dada una proporción de desechos  $\omega$ , siempre existirán dos valores  $m_i$  y  $m_s$ , simétricos respecto del punto medio del intervalo de especificación  $(T_i, T_s)$ , tales que la suma de las colas  $\omega'$  y  $\omega''$  es precisamente igual a  $\omega$  (ver fig. 7.9).

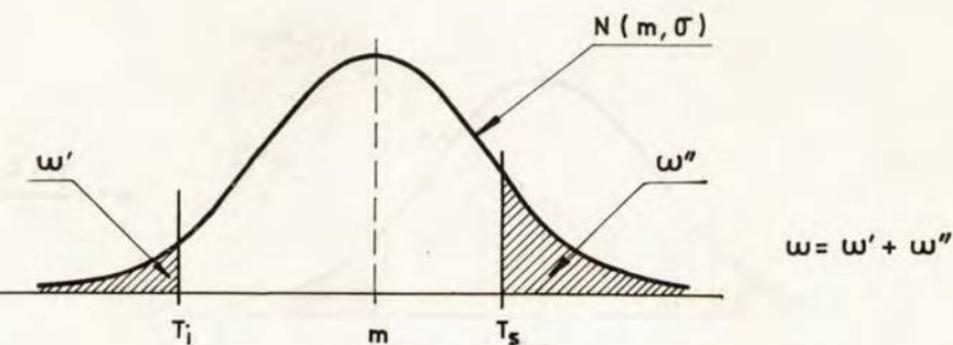
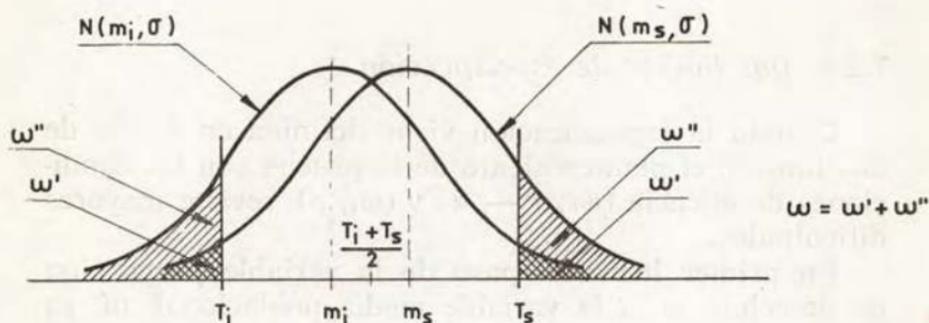


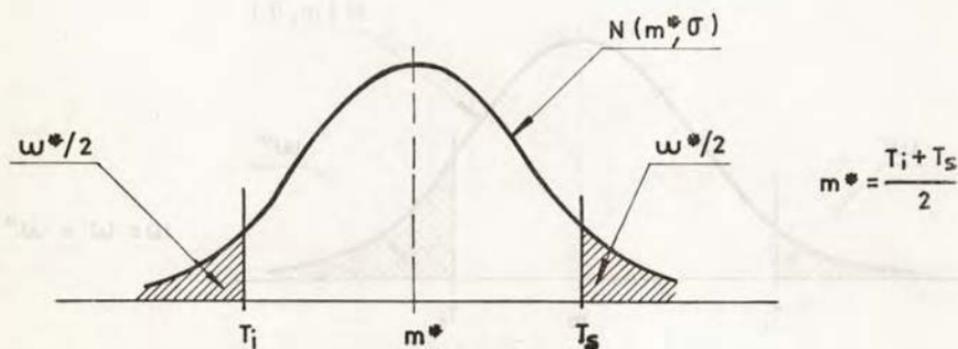
Fig. 7.8



Así, para  $\omega = \omega_0$  existirán dos valores medios  $m_{0i}$  y  $m_{0s}$ , y para  $\omega = \omega_1$  los correspondientes valores medios serán  $m_{1i}$  y  $m_{1s}$ .

Para determinar estos cuatro valores medios puede seguirse el método numérico-gráfico que pasamos a describir.

Sea  $\omega^*$  el mínimo valor que puede alcanzar la proporción de desechos contenida en una población de desviación tipo  $\sigma$ . Dicho valor se obtiene cuando la media poblacional se sitúa en el punto central del intervalo de especificación, es decir, cuando las colas  $\omega'$  y  $\omega''$  son iguales (ver fig. 7.10).



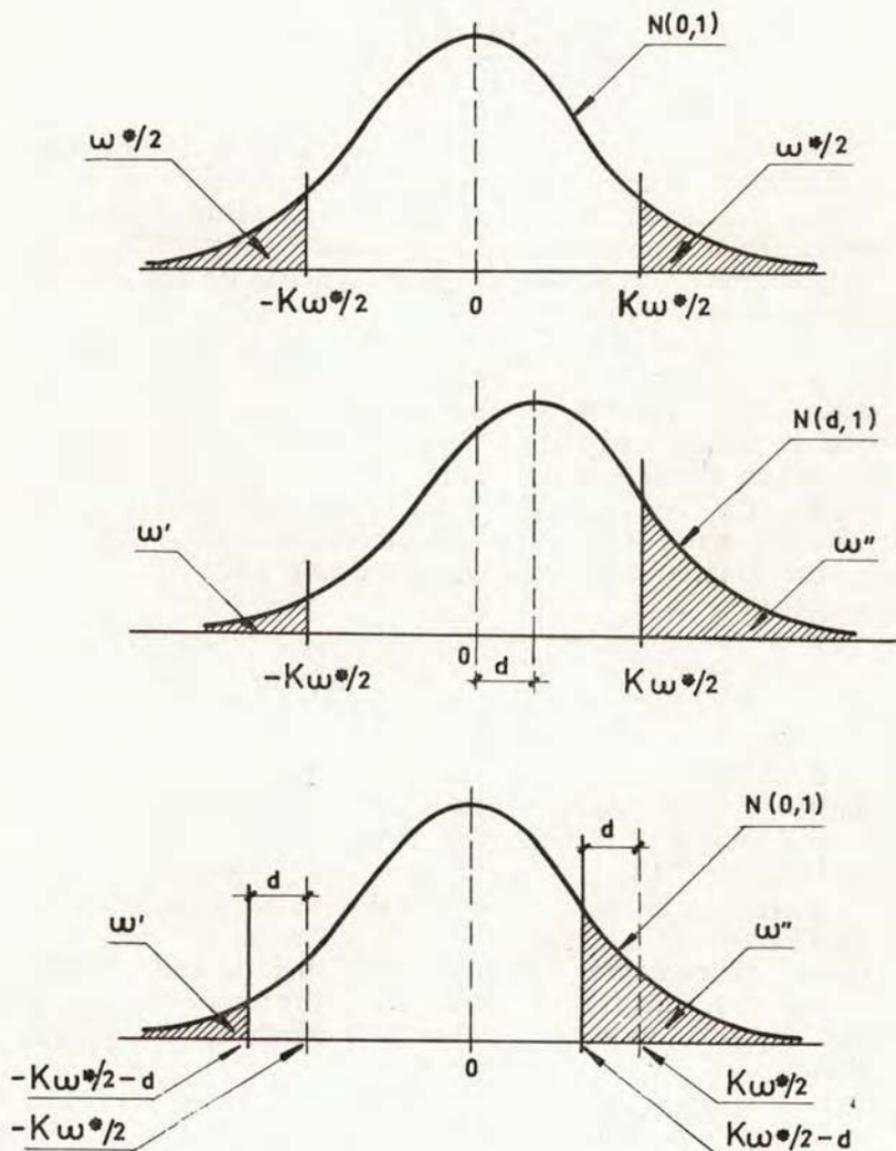


Fig. 7.11

El valor  $\omega^*$  puede calcularse a partir de la expresión

$$\omega^* = 2 \phi \left( \frac{T_1 - m^*}{\sigma} \right) = 2 \phi \left( \frac{T_1 - T_s}{\sigma} \right)$$

El valor  $\omega^*$  es el mínimo obtenible, y cualquier desviación de la media respecto del centro del intervalo de especificación se traducirá necesariamente en un incremento del porcentaje de desechos  $\omega$ . Vamos a estudiar la ley de variación de  $\omega$  en función de las desviaciones de la media.

Si pasamos a utilizar variables centradas y reducidas, los límites de especificación pasarán a ser  $-K_{\omega^{*/2}}$  y  $K_{\omega^{*/2}}$  y, a efectos de cálculo, lo mismo dará suponer que la media sufre un desplazamiento  $d$  con respecto al origen de referencia, como suponer que los límites  $-K_{\omega^{*/2}}$  y  $K_{\omega^{*/2}}$  experimentan un desplazamiento de la misma cuantía y de sentido contrario (ver fig. 7.11).

En consecuencia, podremos escribir

$$\begin{aligned} \omega &= \omega' + \omega'' = \\ &= \phi(-K_{\omega^{*/2}} - d) + [1 - \phi(K_{\omega^{*/2}} - d)] = \\ &= 2 - [\phi(K_{\omega^{*/2}} + d) + \phi(K_{\omega^{*/2}} - d)] \end{aligned}$$

A partir de esta expresión, es posible determinar por puntos la curva representativa de la ley de variación de  $\omega$  en función de  $d$ . Dicha curva tiene la forma indicada en la figura 7.12.

Entrando en esta curva con los valores  $\omega_0$  y  $\omega_1$  especificados en las condiciones de eficacia, pueden obtenerse gráficamente los desplazamientos  $d_0$  y  $d_1$  correspondientes. Por consiguiente, los valores  $m_{0i}$ ,  $m_{0s}$ ,  $m_{1i}$  y  $m_{1s}$  buscados, podrán calcularse a partir de las expresiones

$$\begin{aligned} m_{0i} &= m^* - d_0\sigma \\ m_{0s} &= m^* + d_0\sigma \\ m_{1i} &= m^* - d_1\sigma \\ m_{1s} &= m^* + d_1\sigma \end{aligned}$$

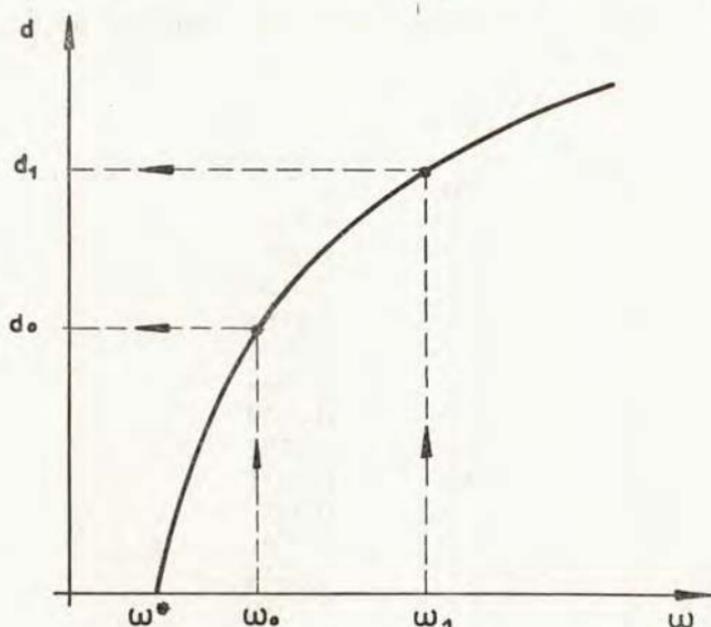


Fig. 7.12

toda vez que los desplazamientos  $d_0$  y  $d_1$  están expresados en unidades centradas y reducidas.

Como ejemplo de aplicación del método numérico-gráfico que acabamos de exponer, supongamos el siguiente caso particular:

$$\omega^* = 1 \%$$

$$\omega_0 = 2 \%$$

$$\omega_1 = 7 \%$$

Se trata de determinar los valores  $d_0$  y  $d_1$ , correspondientes a  $\omega_0$  y  $\omega_1$ .

En este caso  $\omega^*/2 = 0.005$  y  $K_{\omega^*/2} = 2.57583$ . En consecuencia

$$\omega = 2 - [\phi(2.57583 + d) + \phi(2.57583 - d)]$$

y los valores de  $\omega$  correspondientes a valores de  $d$  comprendidos entre 0.0 y 1.5 serán los de la tabla adjunta.

d	$\omega$
0.0	0.0100
0.1	0.0104
0.2	0.0115
0.3	0.0134
0.4	0.0162
0.5	0.0200
0.6	0.0248
0.7	0.0309
0.8	0.0382
0.9	0.0471
1.0	0.0577
1.1	0.0701
1.2	0.0845
1.3	0.1010
1.4	0.1198
1.5	0.1410

En la figura 7.13 se ha representado la correspondiente curva  $\omega - d$ . Entrando en esta curva con los valores  $\omega = 2\%$  y  $\omega = 7\%$ , se obtiene inmediatamente

$$d_0 = 0.5$$

$$d_1 = 1.1$$

En la figura 7.14 se han representado las curvas  $\omega - d$ , correspondientes a valores de  $\omega^*$  iguales al 1 ‰, 5 ‰, 1 %, 2 %, 3 %, 4 %, 5 % y 6 %. Estas curvas son de gran utilidad práctica, pues permiten, para cada conjunto de valores  $\omega^*$ ,  $\omega_0$  y  $\omega_1$  que se puedan presentar en la práctica, la determinación de los límites extremos del intervalo de variación del parámetro  $d$ , fuera de los cuales no resulta necesario efectuar el cálculo de las funciones de distribución  $\phi(K_{\omega^*/2} + d)$  y  $\phi(K_{\omega^*/2} - d)$ . Por ejemplo, en el caso  $\omega^* = 1,5\%$ ,  $\omega_0 = 3\%$ ,  $\omega_1 = 7\%$ , el intervalo de variación que convendrá estudiar para el

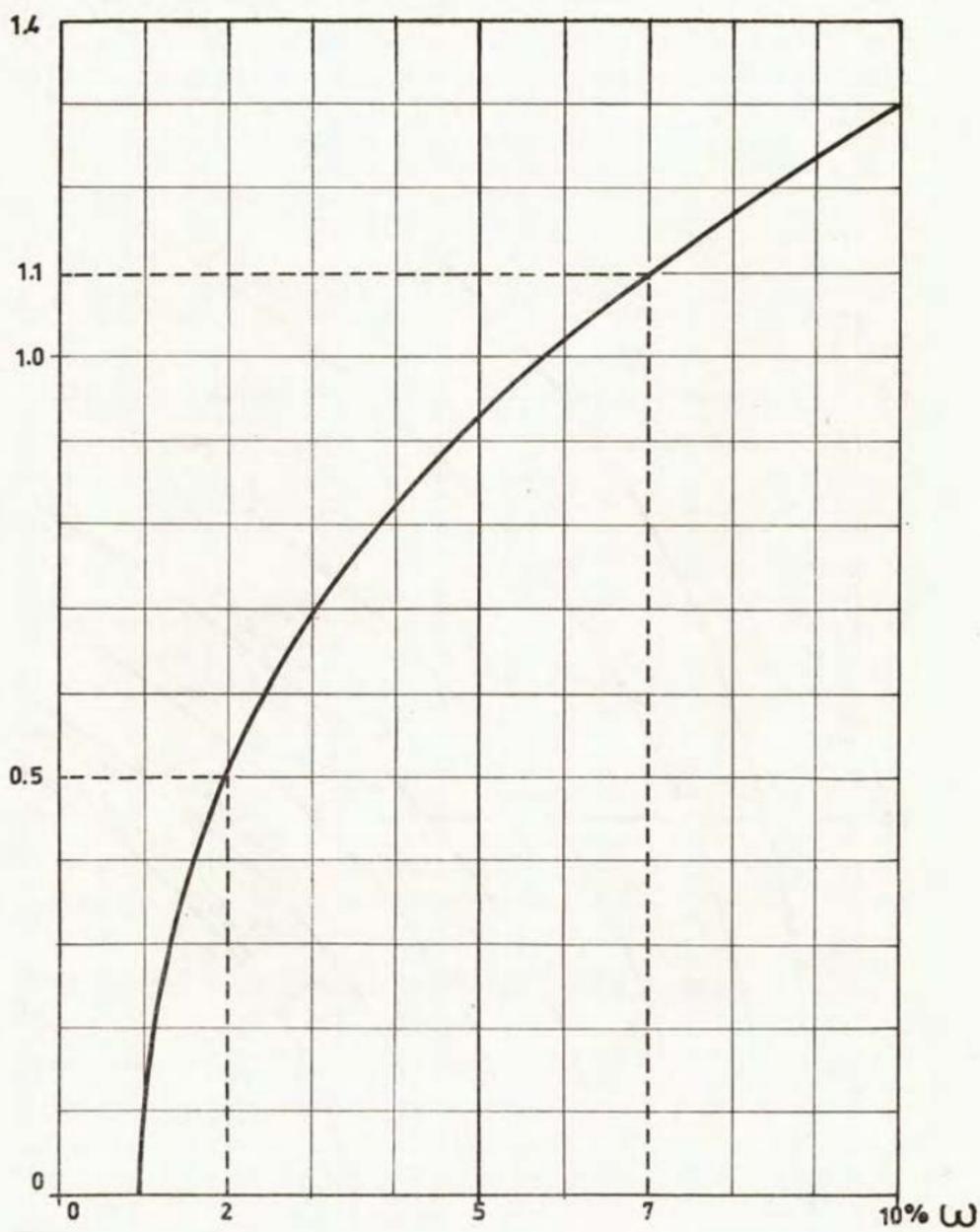


Fig. 7.13

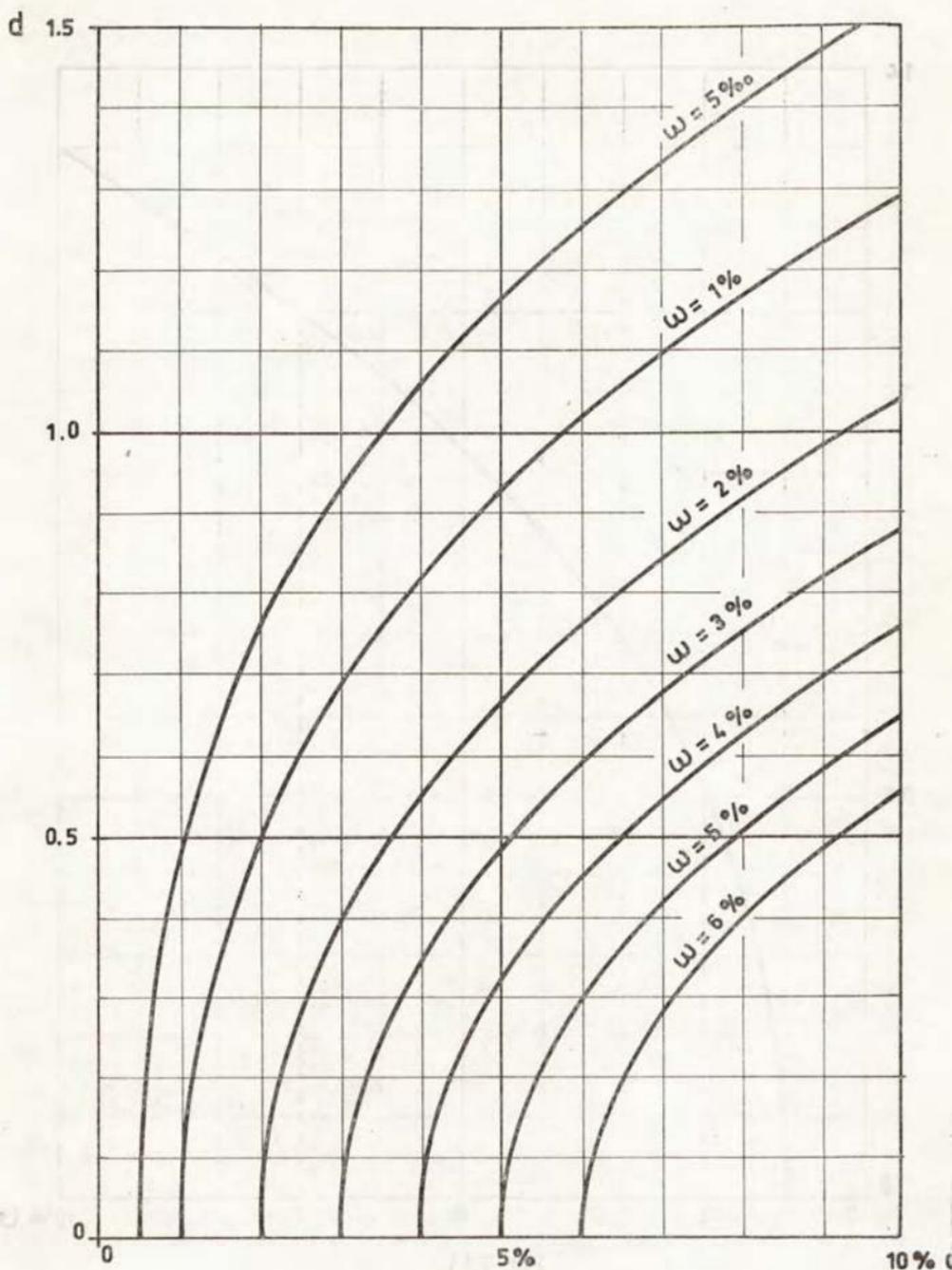


Fig. 7.14

parámetro  $d$  será (0.3, 1.1). Extender fuera de él los cálculos no tendría ninguna utilidad práctica.

Cuando los límites de especificación son tan amplios o la dispersión de la población tan reducida que los límites de tolerancia natural de la distribución supuesta centrada en  $m^*$ , al nivel de significación del  $2\text{‰}$ , quedan en su interior (ver fig. 7.15), es decir, cuando se cumple la condición

$$T_s - T_i > 2K_{0.001}\sigma = 6.18\sigma$$

el cambio de la variable  $\omega$  a la variable  $m$  es sumamente simple.

En efecto, en este caso cuando se determina un área  $\omega_0$  o  $\omega_1$  por encima de  $T_s$ , el área determinada por debajo de  $T_i$  es inferior al  $1\text{‰}$ , y viceversa. En consecuencia, será posible escribir, aproximadamente (ver figura 7.16)

$$m_{0i} = T_i + K_{\omega_0}\sigma$$

$$m_{0s} = T_s - K_{\omega_0}\sigma$$

$$m_{1i} = T_i + K_{\omega_1}\sigma$$

$$m_{1s} = T_s - K_{\omega_1}\sigma$$

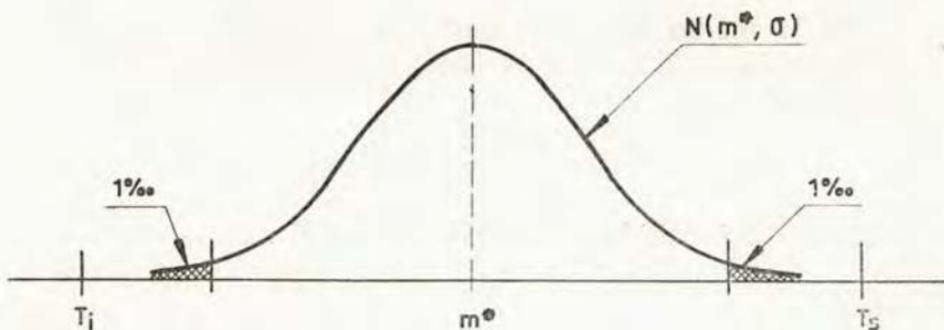


Fig. 7.15

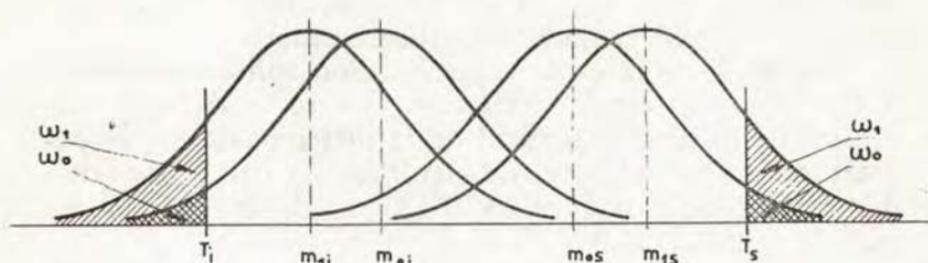


Fig. 7.16

Así pues, en cualquier caso, la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  y una especificación definida por dos límites  $T_i$  y  $T_s$  es en todo equivalente a la prueba  $T\{m_{0i} \leq m \leq m_{1s} \mid m < m_{0i}; m > m_{1s}\}$  con las condiciones de eficacia  $(m_{0s}, 1 - \alpha)$  y  $(m_{1s}, \beta)$  (ver fig. 7.17).

En este caso la prueba viene definida por la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$

$$A_x = \{m_{LI} \leq \bar{x} \leq m_{LS}\}$$

siendo  $m_{LI}$  y  $m_{LS}$  dos límites tales que

$$P_r\{m_{LI} \leq \bar{x} \leq m_{LS} \mid m = m_{0s} \text{ ó } m = m_{0i}\} = 1 - \alpha$$

Si la media de la distribución es realmente  $m$  (la proporción de desechos es igual a  $\omega$ ), existirá una probabilidad

$$P(m) = P_r\{m_{LI} \leq \bar{x} \leq m_{LS} \mid m = m\}$$

de aceptar indebidamente la hipótesis  $H_0$ . Concretamente, cuando  $m = m_{1s}$  ó  $m_{1i}$ , deberá cumplirse la condición

$$P_r\{m_{LI} \leq \bar{x} \leq m_{LS} \mid m = m_{1s} \text{ ó } m = m_{1i}\} = \beta$$

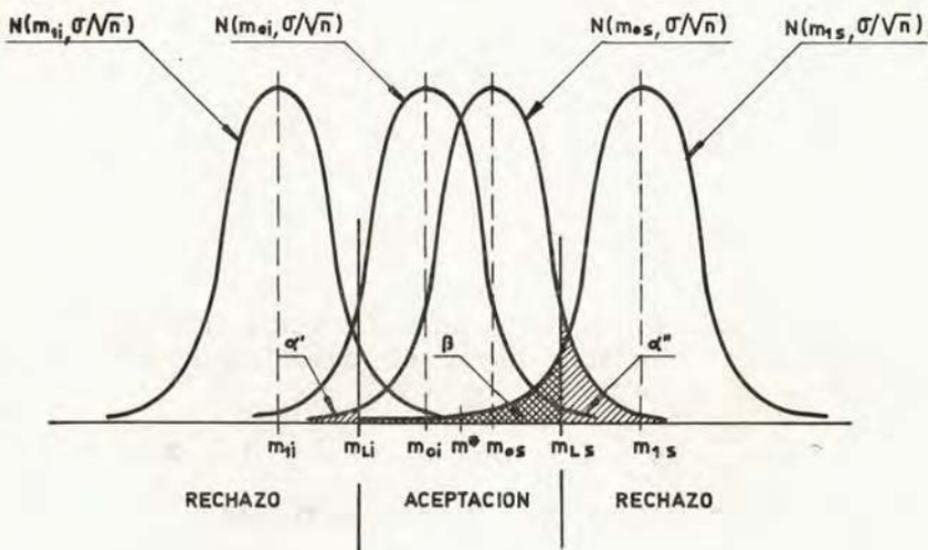


Fig. 7.17

Así pues, para determinar los límites  $m_{LI}$  y  $m_{LS}$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$  y el tamaño de muestra a adoptar en el plan de experimentación, habrá que resolver el sistema de ecuaciones

$$P_r\{m_{LI} \leq \bar{x} \leq m_{LS} \mid m = m_{os} \text{ ó } m = m_{oi}\} = 1 - \alpha$$

$$P_r\{m_{LI} \leq \bar{x} \leq m_{LS} \mid m = m_{1s} \text{ ó } m = m_{i1}\} = \beta$$

Para la resolución de este sistema puede seguirse el método numérico-gráfico que pasamos a exponer en los párrafos siguientes.

Adoptando variables reducidas y centradas respecto de  $m^*$ , los valores  $m_{os}$ ,  $m_{1s}$  y  $m_{LS}$  se convertirán en unos valores  $D_0$ ,  $D_1$  y  $D_L$  calculables a partir de las expresiones

$$D_0 = \frac{m_{0s} - m^*}{\sigma} \sqrt{n} = d_0 \sqrt{n}$$

$$D_1 = \frac{m_{1s} - m^*}{\sigma} \sqrt{n} = d_1 \sqrt{n}$$

$$D_L = \frac{m_{LS} - m^*}{\sigma} \sqrt{n}$$

Tras este cambio de variable, las ecuaciones que expresan las condiciones de eficacia deseadas, deberán escribirse en la forma (ver fig. 7.18)

$$P_r\{-D_L \leq D \leq D_L \mid m = D_0\} = 1 - \alpha$$

$$P_r\{-D_L \leq D \leq D_L \mid m = D_1\} = \beta$$

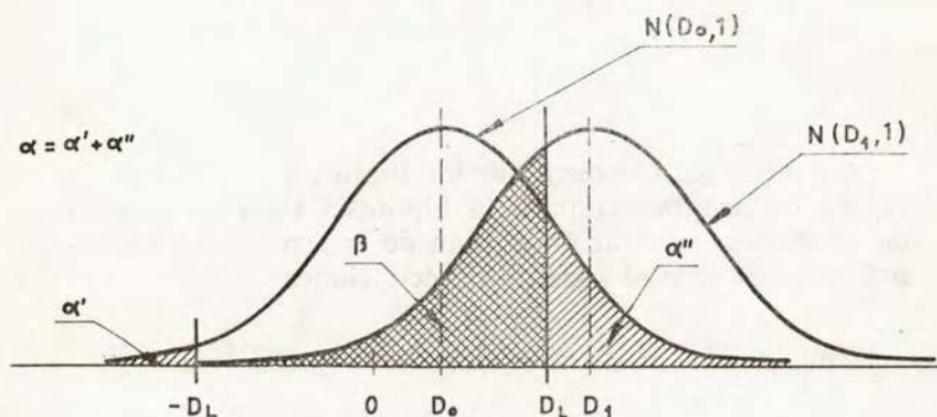


Fig. 7.18

o lo que es lo mismo

$$\phi(D_L - D_0) - \phi(-D_L - D_0) = 1 - \alpha$$

$$\phi(D_L - D_1) - \phi(-D_L - D_1) = \beta$$

sistema al que hay que añadir la ecuación complementaria

$$\frac{D_1}{D_0} = \frac{d_1\sqrt{n}}{d_0\sqrt{n}} = \frac{d_1}{d_0}$$

Estudiemos en primer lugar la ecuación

$$\phi(D_L - D_0) - \phi(-D_L - D_0) = 1 - \alpha$$

que no es sino una función que relaciona los valores del desplazamiento  $D_0$  con los límites de un intervalo simétrico respecto del origen y tal que el área determinada bajo la curva normal  $N(D_0, 1)$  entre dichos límites es precisamente igual a  $1 - \alpha$  (ver fig. 7.19).

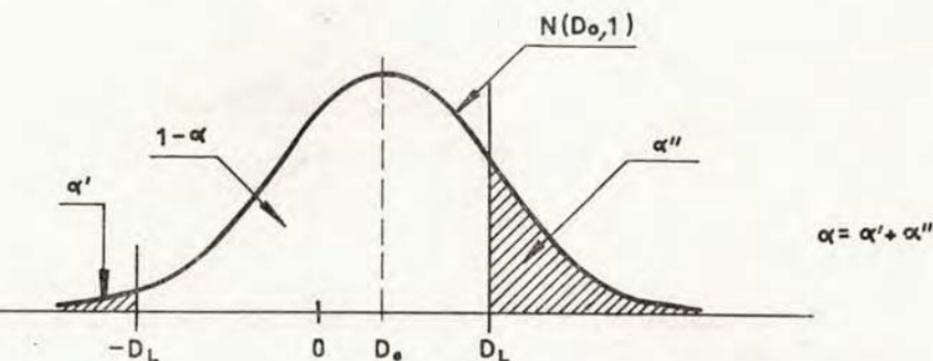


Fig. 7.19

Así pues, dado un valor  $D_0$ , para determinar los correspondientes límites  $\pm D_L$ , bastará ir dando valores a  $D_L$  hasta conseguir que la diferencia entre las funciones de distribución  $\phi(D_L - D_0)$  y  $\phi(-D_L - D_0)$  sea igual a  $1 - \alpha$ .

Repetiendo este cálculo para distintos valores de  $D_0$ , será posible trazar por puntos la curva representativa de la ley de variación de  $D_L$  en función de  $D_0$ . Dicha curva deberá partir, evidentemente, del punto  $(0, K_{\alpha/2})$ , toda vez que cuando el desplazamiento es nulo ( $D_0 = 0$ ) los límites del intervalo son necesariamente  $\pm K_{\alpha/2}$ . A

medida que el descentramiento  $D_0$  vaya aumentando, la cola de la izquierda, es decir, el valor de la función de distribución  $\phi(-D_L - D_0)$ , será cada vez menor. A partir de un descentramiento  $D_0$  superior a 3 unidades, el valor de  $\phi(-D_L - D_0)$  será inferior a 1 ‰. En consecuencia, a partir de un valor de  $D_0$  superior a 3, la curva tenderá a confundirse con la recta  $D_L = D_0 + K_\alpha$  (ver fig. 7.20).

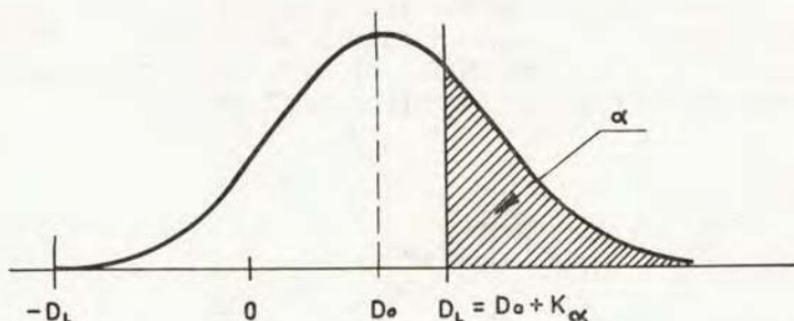


Fig. 7.20

En consecuencia, la forma de la curva  $D_L - D_0$  será la indicada en la figura 7.21.

Estudiemos ahora la ecuación

$$\phi(D_L - D_1) - \phi(-D_L - D_1) = \beta$$

Esta ecuación permite calcular el valor  $D_1$  de la media de la distribución normal  $N(D_1, 1)$ , para el cual el área comprendida bajo la curva representativa de la función densidad de probabilidad entre dos límites  $\pm D_L$  dados es precisamente igual a  $\beta$  (ver fig. 7.22).

Así pues, es posible calcular para cada punto de la curva  $D_L - D_0$  el correspondiente valor de  $D_1$ .

Dado que en la práctica suelen adoptarse para  $\alpha$  valores pequeños (1 ‰ ó 5 ‰) los límites  $\pm D_L$  son muy

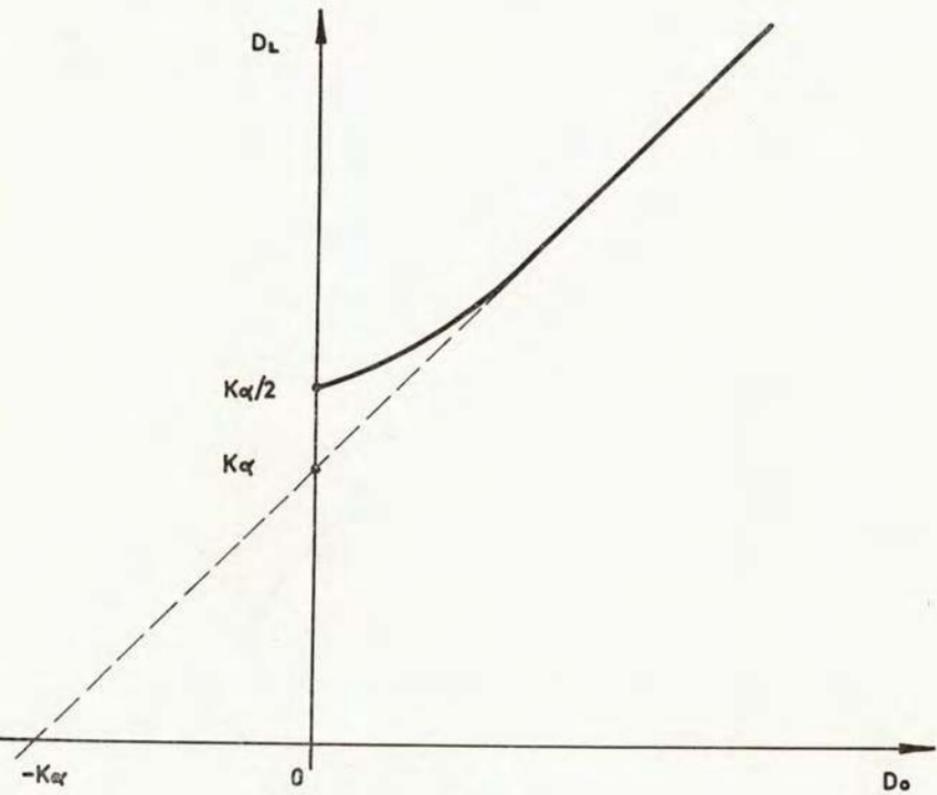


Fig. 7.21

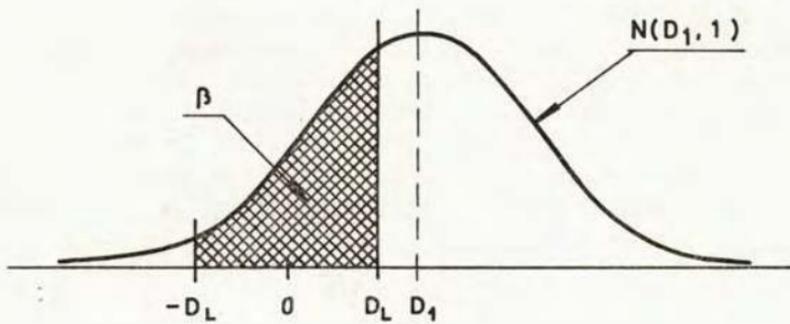


Fig. 7.22

amplios ( $\pm 2.5758$  ó  $\pm 1.9600$ ), y como  $\beta$  también suele ser pequeño (5 % ó 10 %), el valor  $\phi(-D_L - D_1)$  es prácticamente despreciable, y puede escribirse aproximadamente (ver fig. 7.23)

$$\phi(D_L - D_1) = \beta$$

es decir

$$D_L - D_1 = K_{1-\beta} = -K_\beta$$

de donde

$$D_1 = D_L + K_\beta$$

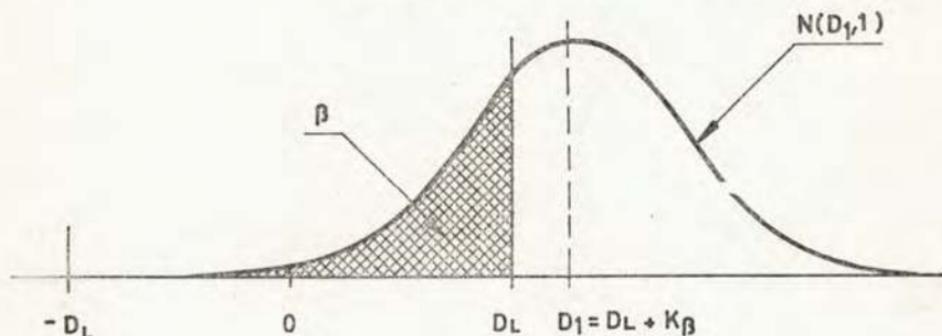


Fig. 7.23

En la tabla 17, calculada por el autor, se dan los valores de los parámetros  $D_L$  y  $D_1$  para una amplia gama de valores de  $D_0$  y los valores más usuales de  $\alpha$  y  $\beta$ .

La tabla 17 contiene toda la información necesaria para plantear la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia ( $\omega_0, 1 - \alpha$ ) y ( $\omega_1, \beta$ ) y una especificación definida por dos límites  $T_1$  y  $T_s$ . En efecto, como

$$D_0 = d_0\sqrt{n}$$

$$D_1 = d_1\sqrt{n}$$

resulta que

$$n = \frac{(D_1 - D_0)^2}{(d_1 - d_0)^2} = \frac{p}{(d_1 - d_0)^2}$$

siendo

$$p = (D_1 - D_0)^2$$

Por otra parte

$$D_L = \frac{m_{LS} - m^*}{\sigma} \sqrt{n}$$

de donde

$$\begin{aligned} m_{LS} &= m^* + D_L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = m^* + D_L \sigma \frac{d_1 - d_0}{D_1 - D_0} = \\ &= m^* + (d_1 - d_0) \sigma q \end{aligned}$$

siendo

$$q = D_L / (D_1 - D_0)$$

Además,  $D_1/D_0 = d_1/d_0$ .

Por consiguiente, si con la información de la tabla 17 se dibujan las curvas de variación de los parámetros  $p$  y  $q$  en función de  $D_1/D_0$ , será posible deducir de forma gráfica los valores de  $p$  y  $q$  correspondientes a una relación  $d_1/d_0$  dada y, en consecuencia, calcular aproximadamente el tamaño de la muestra a adoptar en el plan de experimentación y los límites  $m_{LI}$  y  $m_{LS}$  de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$ .

En las figuras 7.24, 7.25 y 7.26 se han representado las curvas  $D_1/D_0 - p$  y  $D_1/D_0 - q$  para  $\alpha = 1\%$  y  $\beta = 5\%$ ,  $\alpha = 5\%$  y  $\beta = 5\%$  y  $\alpha = 5\%$  y  $\beta = 10\%$ .

Así pues, para proceder a la realización de la prueba de la hipótesis  $H_0: \omega \leq \omega_0$  contra la hipótesis  $H_1: \omega >$

$> \omega_0$ , con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  y una especificación definida por dos límites  $T_1$  y  $T_s$ , deberá seguirse el siguiente camino:

— determinar el valor de la cuantila de orden  $1 - \omega^*/2$  de la ley normal  $N(0, 1)$ , a partir de la expresión

$$K_{\omega^*/2} = \frac{T_s - m^*}{\sigma} = \frac{T_s - T_1}{2\sigma}$$

y deducir el correspondiente valor de  $\omega^*$ . Si  $\omega_0 < \omega^*$ , la condición de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  carece de sentido toda vez que  $\omega_0$  no puede alcanzar nunca valores inferiores a  $\omega^*$ ;

— construir la curva  $\omega - d$  correspondiente al valor  $\omega^*$  obtenido;

— entrar en dicha curva con los valores  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , procediendo a la determinación gráfica de los correspondientes valores  $d_0$  y  $d_1$ ;

— calcular el cociente  $d_1/d_0$  y la diferencia  $d_1 - d_0$ ;

— entrar con el valor  $d_1/d_0$  en las curvas  $D_1/D_0 - p$  y  $D_1/D_0 - q$ , procediendo a la determinación gráfica de los correspondientes valores  $p$  y  $q$ ;

— determinar el tamaño de la muestra a adoptar en el plan de experimentación, a partir de la expresión

$$n = \frac{P}{(d_1 - d_0)^2}$$

— determinar los límites de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$  a partir de las expresiones

$$m_{LS} = m^* + (d_1 - d_0)\sigma q$$

$$m_{LI} = m^* - (d_1 - d_0)\sigma q$$

— extraer una muestra aleatoria de  $n$  elementos;

— determinar la media muestral  $\bar{x}$ ;

— si  $\bar{x}$  está comprendido dentro del intervalo  $[m_{LI},$

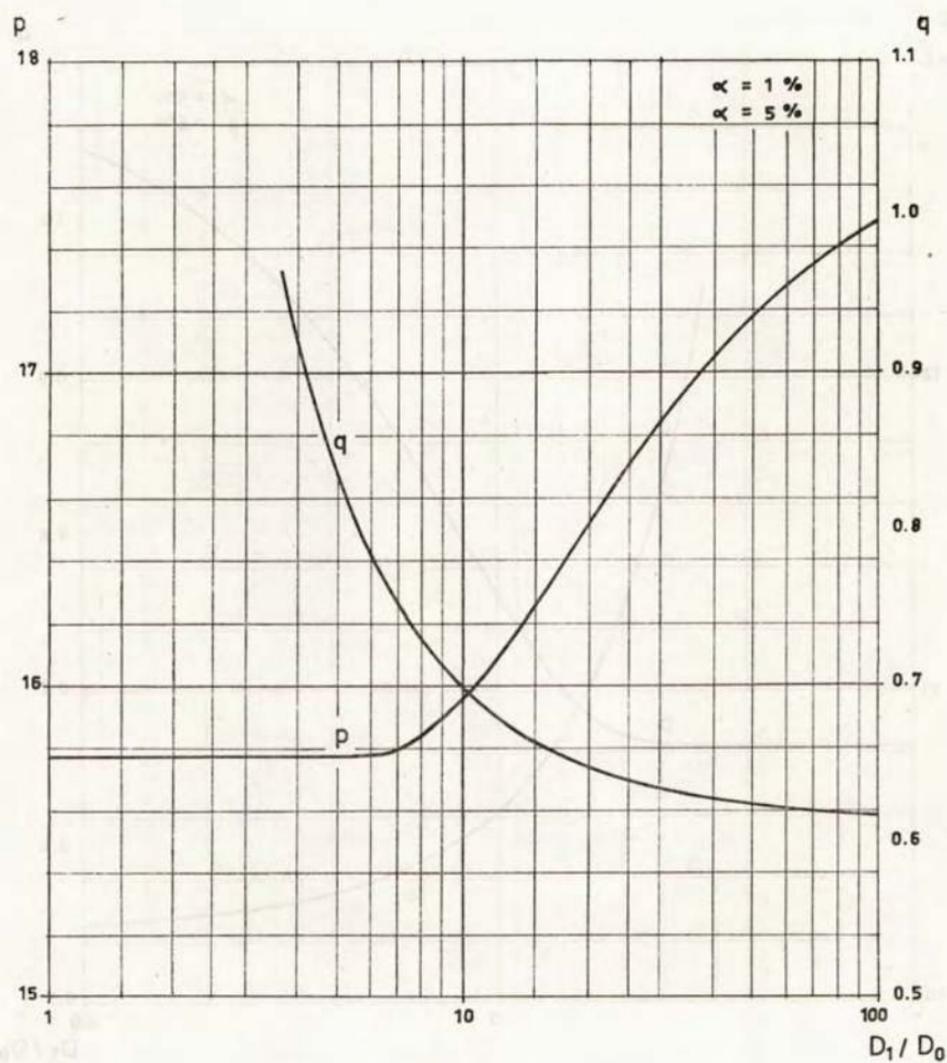


Fig. 7.24

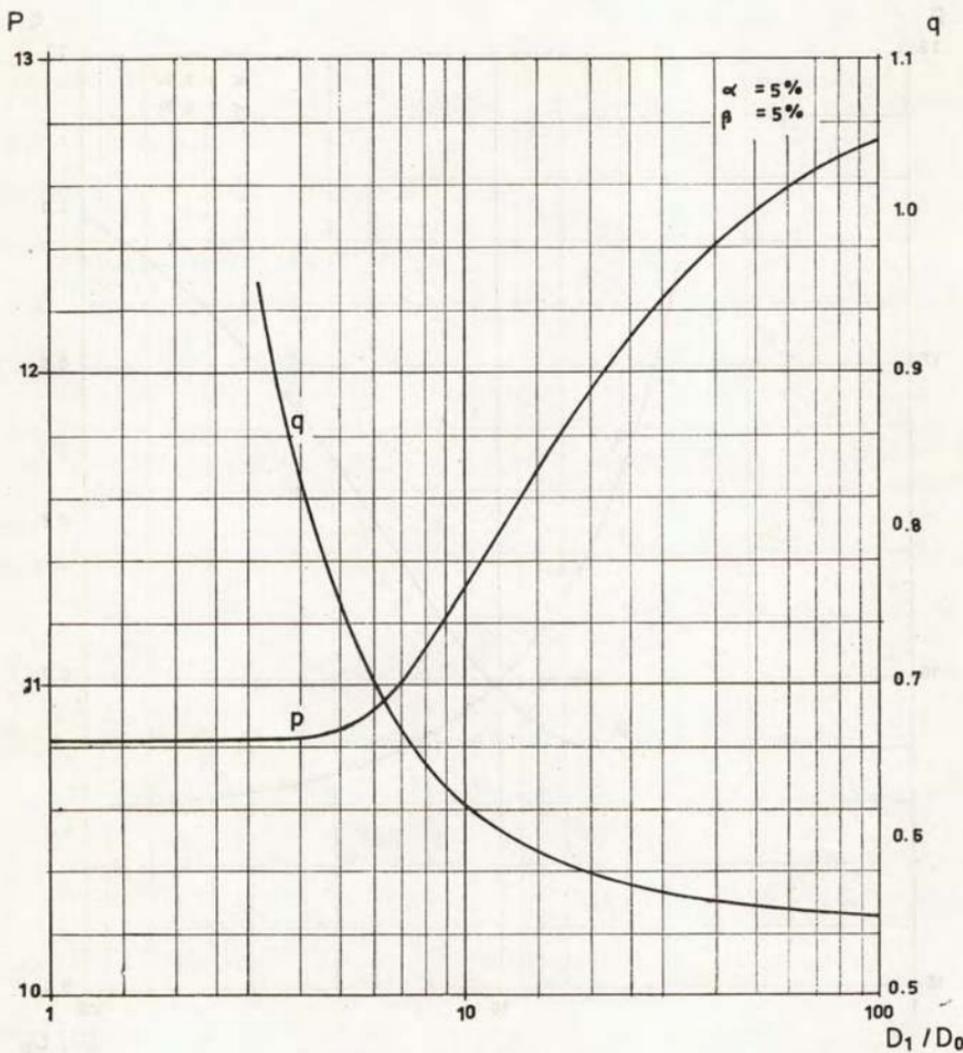


Fig. 7.25

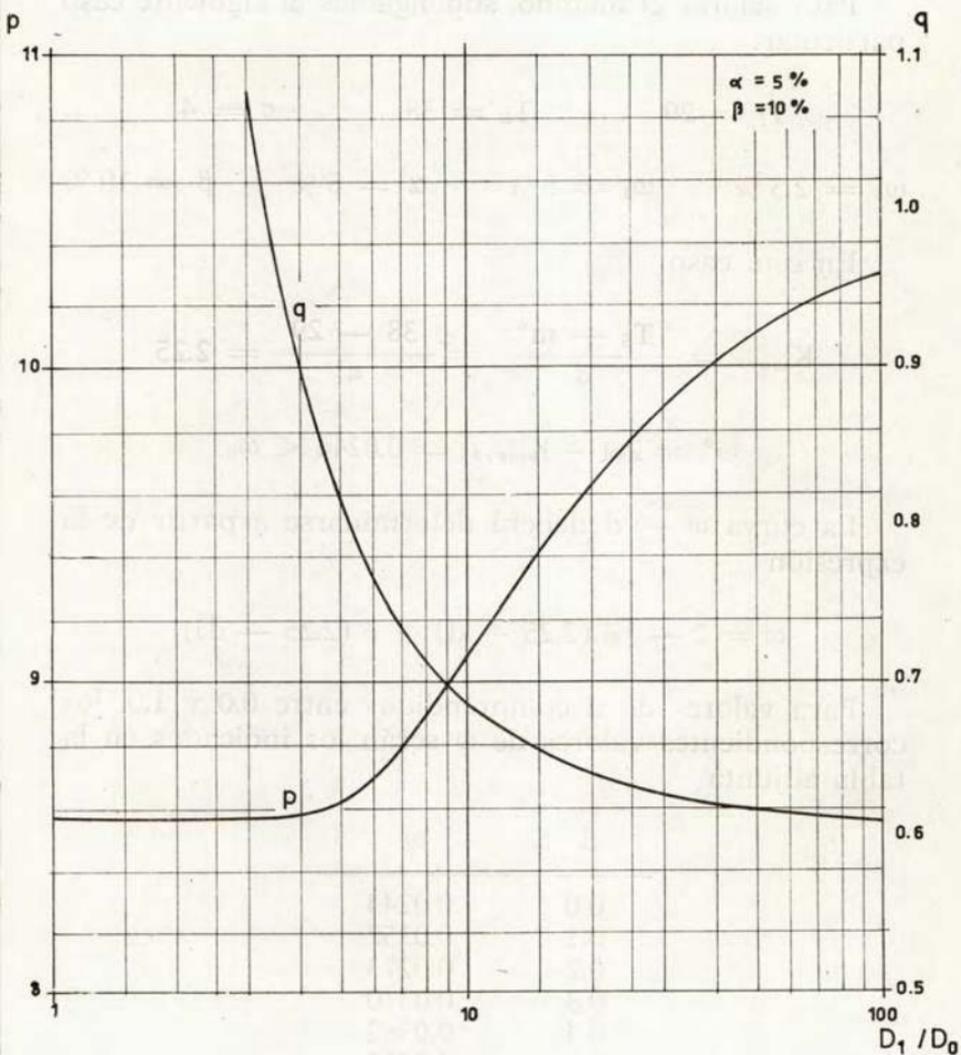


Fig. 7.26

$m_{L,S}]$ , aceptar la hipótesis  $H_0$ , rechazándola en caso contrario.

Para aclarar el método, supongamos el siguiente caso particular:

$$T_i = 20 \qquad T_s = 38 \qquad \sigma = 4$$

$$\omega_0 = 2.5 \% \qquad \omega_1 = 8 \% \qquad \alpha = 5 \% \qquad \beta = 10 \%$$

En este caso

$$K_{\omega^*/2} = \frac{T_s - m^*}{\sigma} = \frac{38 - 29}{4} = 2.25$$

$$\omega^* = 2\phi(-K_{\omega^*/2}) = 0.0244 < \omega_0$$

La curva  $\omega - d$  deberá determinarse a partir de la expresión

$$\omega = 2 - [\phi(2.25 + d) + \phi(2.25 - d)]$$

Para valores de  $d$  comprendidos entre 0.0 y 1.0, los correspondientes valores de  $\omega$  serán los indicados en la tabla adjunta

d	$\omega$
0.0	0.0244
0.1	0.0252
0.2	0.0273
0.3	0.0310
0.4	0.0362
0.5	0.0430
0.6	0.0517
0.7	0.0622
0.8	0.0747
0.9	0.0893
1.0	0.1062

A partir de estos valores puede dibujarse la curva de la figura 7.27. Entrando en esta curva con  $\omega_0 = 0.0250$  y  $\omega_1 = 0.0800$ , se obtiene inmediatamente

$$d_0 = 0.085$$

$$d_1 = 0.838$$

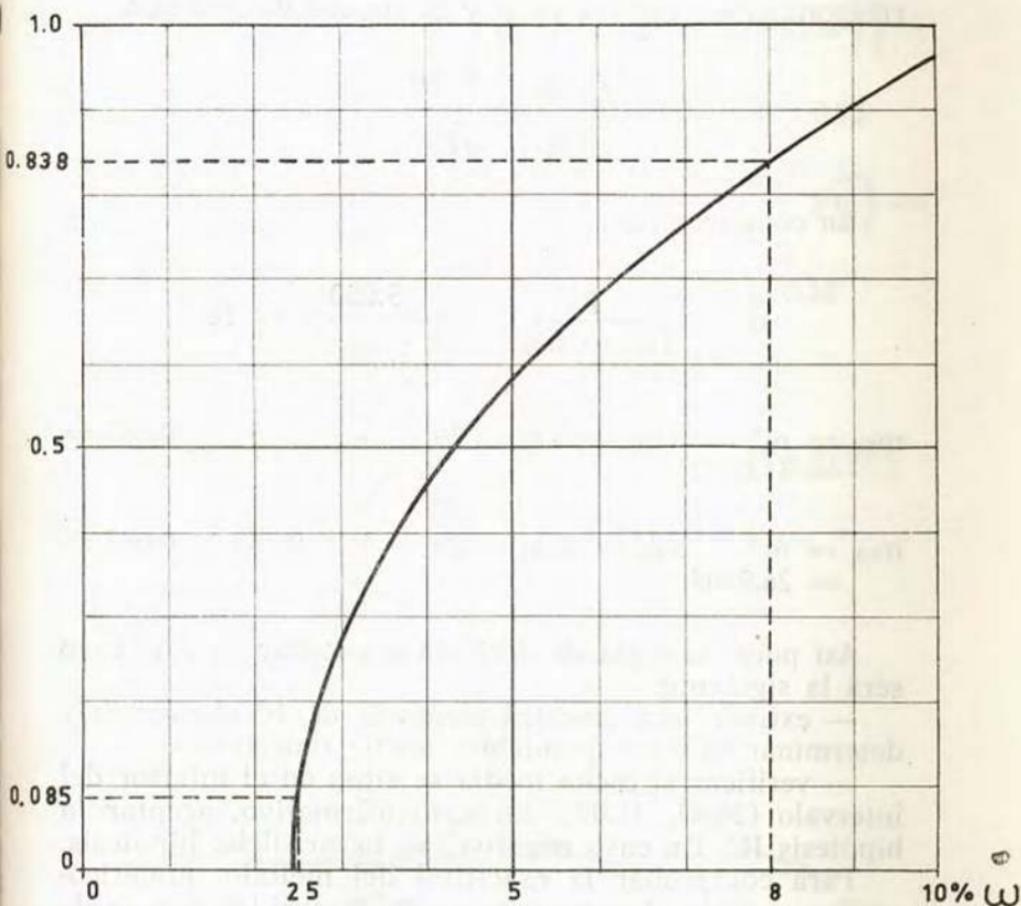


Fig. 7.27

En consecuencia

$$\frac{d_1}{d_0} = 9.859$$

$$d_1 - d_0 = 0.753$$

Entrando con el valor  $d_1/d_0 = 9.859$  en las curvas de la figura 7.26, pueden deducirse inmediatamente los correspondientes valores de  $p$  y  $q$ . Dichos valores son

$$p = 9.050$$

$$q = 0.687$$

En consecuencia

$$n = \frac{p}{(d_1 - d_0)^2} = \frac{9.050}{0.753^2} = 16$$

$$m_{LS} = m^* + \sigma(d_1 - d_0)q = 29 + 4 \times 0.753 \times 0.687 = 31.0692$$

$$m_{LI} = m^* - \sigma(d_1 - d_0)q = 29 - 4 \times 0.753 \times 0.687 = 26.9308$$

Así pues, la regla de decisión a adoptar en este caso será la siguiente:

— extraer una muestra aleatoria de 16 elementos y determinar la correspondiente media muestral  $\bar{x}$ ;

— verificar si dicha media se sitúa en el interior del intervalo (26.93, 31.07). En caso afirmativo, aceptar la hipótesis  $H_0$ . En caso negativo, rechazar dicha hipótesis.

Para comprobar la exactitud del método numérico-gráfico seguido, determinemos *a posteriori* los riesgos de error en que incurriremos al adoptar la anterior regla de decisión.

Dado que

$$m_{0s} = m^* + d_0\sigma = 29 + 0.085 \times 4 = 29.340$$

$$m_{1s} = m^* + d_1\sigma = 29 + 0.838 \times 4 = 32.352$$

es posible escribir (ver fig. 7.28)

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' =$$

$$= \phi\left(\frac{m_{L1} - m_{0s}}{\sigma} \sqrt{n}\right) + \left[1 - \phi\left(\frac{m_{LS} - m_{0s}}{\sigma} \sqrt{n}\right)\right] =$$

$$= \phi(-2.409) + 1 - \phi(1.729) = 0.0499 \approx 0.05$$

$$\beta = \phi\left(\frac{m_{LS} - m_{1s}}{\sigma} \sqrt{n}\right) - \phi\left(\frac{m_{L1} - m_{1s}}{\sigma} \sqrt{n}\right) =$$

$$= \phi(-1.283) - \phi(-5.421) = 0.0998 \approx 0.10$$

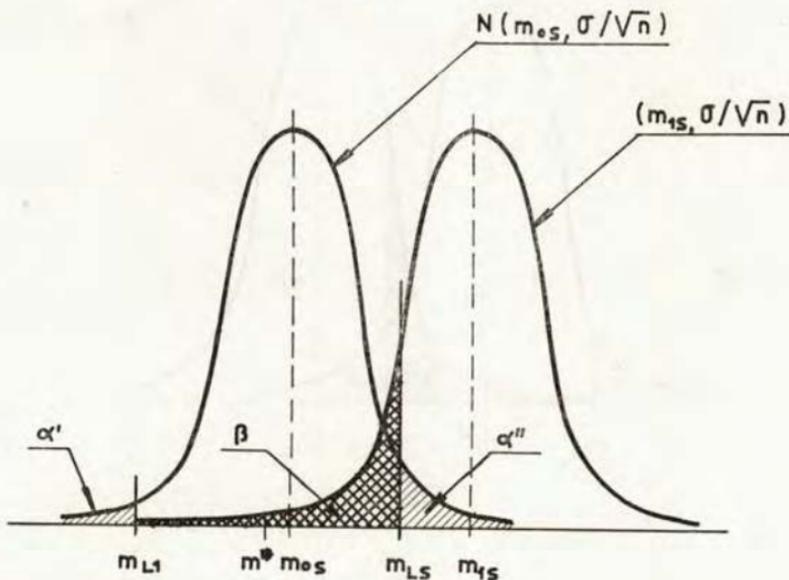


Fig. 7.28

Los riesgos obtenidos son pues, aun contando con el hecho del necesario redondeo de la muestra, prácticamente iguales a los establecidos *a priori*.

Es interesante estudiar los valores límites de los parámetros  $p$  y  $q$ .

Cuando  $D_1/D_0 \rightarrow \infty$ , es decir, cuando  $D_0 \rightarrow 0$ ,  $\omega_0 \rightarrow \omega^*$  y, en consecuencia (ver fig. 7.29)

$$D_L \rightarrow K_{\alpha/2}$$

Por consiguiente

$$\lim_{D_0 \rightarrow 0} p = \lim_{D_0 \rightarrow 0} (D_1 - D_0)^2 = D_1^2 = (K_{\alpha/2} + K_\beta)^2$$

$$\lim_{D_0 \rightarrow 0} q = \lim_{D_0 \rightarrow 0} \frac{D_L}{D_1 - D_0} = \frac{K_{\alpha/2}}{K_{\alpha/2} + K_\beta}$$

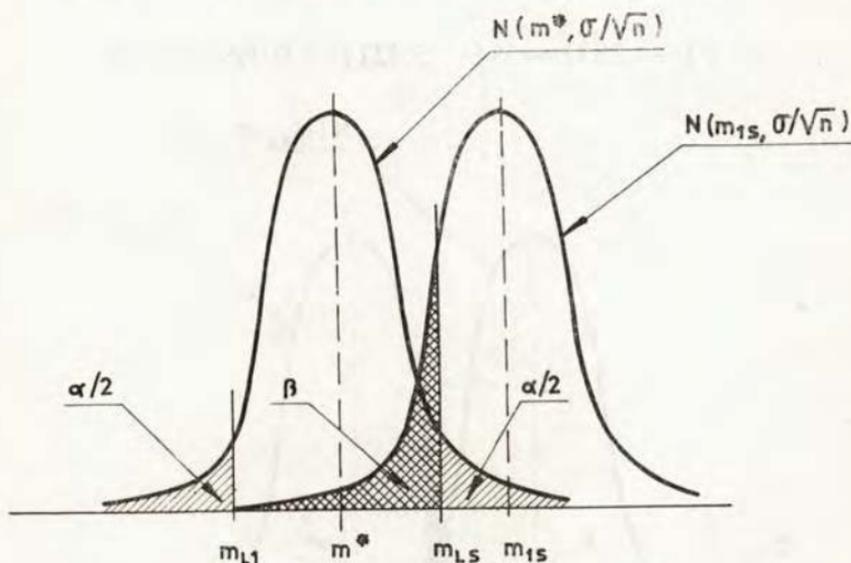


Fig. 7.29

Por otra parte, cuando  $D_1/D_0 \rightarrow 1$ , lo que implica necesariamente para los valores normales de  $\alpha$  y  $\beta$  que los

desplazamientos  $D_0$  y  $D_1$  tiendan ambos a infinito, se verifica que (ver fig. 7.30)

$$D_1 - D_0 = K_\alpha + K_\beta$$

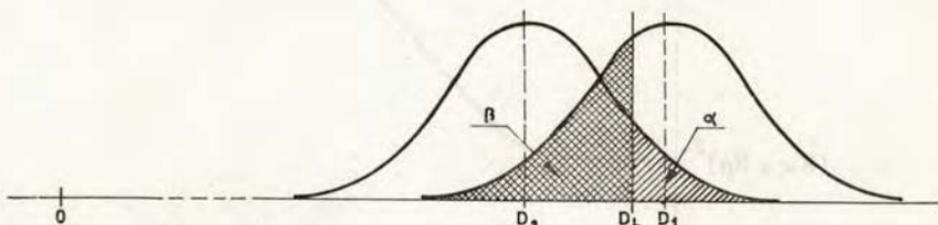


Fig. 7.30

y en consecuencia

$$\lim_{\substack{D_1 \rightarrow 1 \\ D_0}} p = \lim_{\substack{D_1 \rightarrow 1 \\ D_0}} (D_1 - D_0)^2 = (K_\alpha + K_\beta)^2$$

$$\lim_{\substack{D_1 \rightarrow 1 \\ D_0}} q = \lim_{\substack{D_1 \rightarrow 1 \\ D_0}} \frac{D_L}{D_1 - D_0} = \lim_{\substack{D_1 \rightarrow 1 \\ D_0}} \frac{D_1 - K_\beta}{D_1 - D_0} = \infty$$

Así pues, la función  $p(D_1/D_0)$  tiene por asíntota la recta  $p = (K_{\alpha/2} + K_\beta)^2$  y parte del punto  $[1, (K_\alpha + K_\beta)^2]$ , mientras que la función  $q(D_1/D_0)$  tiene por asíntotas las

rectas  $q = \frac{K_{\alpha/2}}{K_{\alpha/2} + K_\beta}$  y  $D_1/D_0 = 1$ , según puede verse

en la figura 7.31.

Es de observar que cuando  $\omega_0 = \omega^*$ , es decir, cuando  $D_0 = d_0 = 0$ , se verifica que

$$n = \frac{p}{d_i^2} = \left[ \frac{(K_{\alpha/2} + K_\beta)\sigma}{m_{1s} - m^*} \right]^2$$

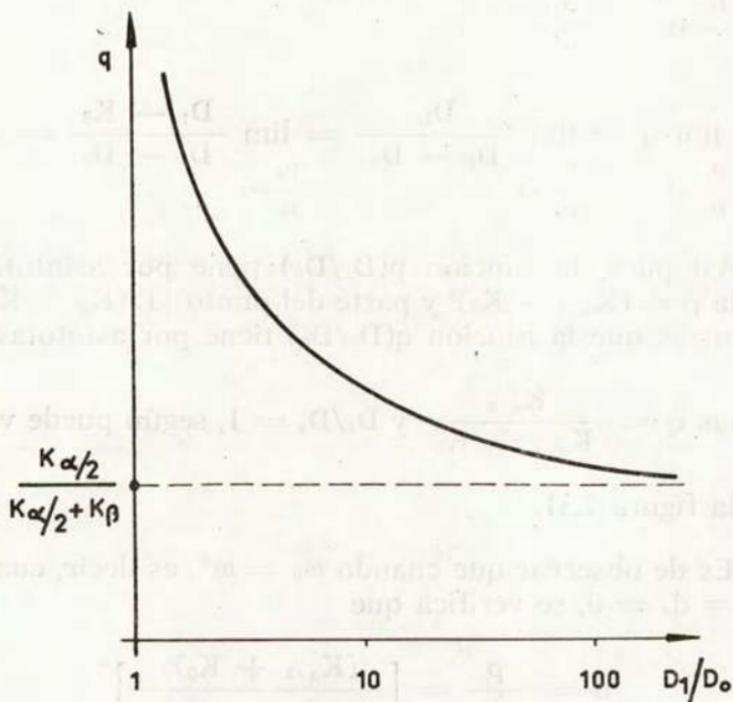
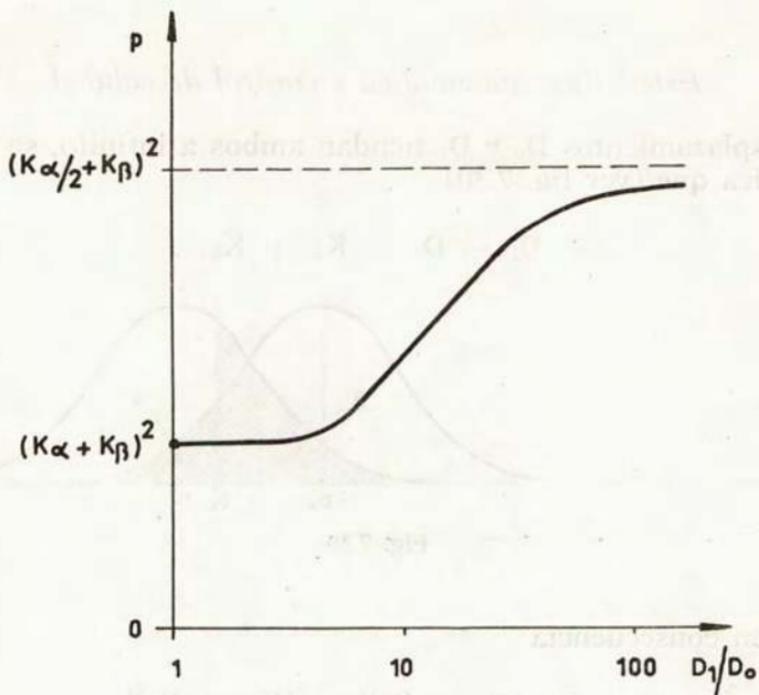


Fig. 7.31

$$m_{LS} = m^* + \sigma d_1 \frac{D_L}{D_1} = \frac{m^* K_\beta + m_{1s} K_{\alpha/2}}{K_{\alpha/2} + K_\beta}$$

expresiones evidentemente idénticas a las ya deducidas en el párrafo 6.3. La determinación de  $n$  también puede efectuarse en este caso a partir de los gráficos  $d_\beta - n$  de las figuras 6.35 y 6.36.

Cuando  $T_s - T_i > 6.18\sigma$ , el planteamiento de la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  se simplifica considerablemente. En efecto, hemos visto que en este caso es posible escribir

$$m_{0s} = T_s - K_{\omega_0} \sigma$$

$$m_{1s} = T_s - K_{\omega_1} \sigma$$

Por otra parte, como en este caso las medias  $m_{0s}$  y  $m_{0i}$  están relativamente muy alejadas del punto medio del intervalo  $(T_i, T_s)$ , se tiene

$$\phi\left(\frac{m_{LI} - m_{0s}}{\sigma} \sqrt{n}\right) \approx 0$$

$$\phi\left(\frac{m_{LI} - m_{1s}}{\sigma} \sqrt{n}\right) \approx 0$$

y en consecuencia (ver fig. 7.32)

$$\phi\left(\frac{m_{LS} - m_{0s}}{\sigma} \sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

$$\phi\left(\frac{m_{LS} - m_{1s}}{\sigma} \sqrt{n}\right) = \beta$$

sistema de ecuaciones que puede escribirse en la forma

$$(m_{LS} - m_{0s})\sqrt{n} / \sigma = K_\alpha$$

$$(m_{LS} - m_{1s})\sqrt{n} / \sigma = K_{1-\beta} = -K_\beta$$

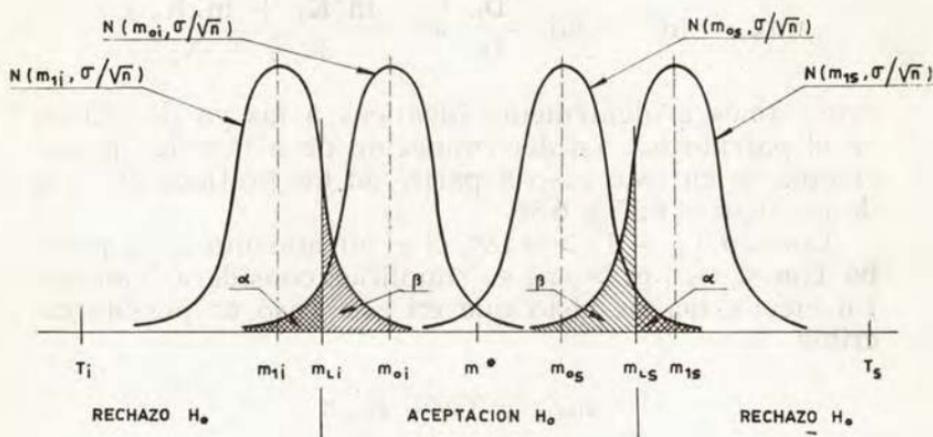


Fig. 7.32

De este sistema de ecuaciones se deduce inmediatamente que

$$n = \left( \frac{K_\alpha + K_\beta}{K_{\omega_0} - K_{\omega_1}} \right)^2$$

$$m_{LS} = T_s - \sigma \frac{K_{\omega_1} K_\alpha + K_{\omega_0} K_\beta}{K_\alpha + K_\beta}$$

$$m_{LI} = T_i + \sigma \frac{K_{\omega_1} K_\alpha + K_{\omega_0} K_\beta}{K_\alpha + K_\beta}$$

toda vez que el límite inferior del intervalo de aceptación para la hipótesis  $H_0$  es simétrico del límite superior respecto del punto medio del intervalo ( $T_i$ ,  $T_s$ ).

A idénticos resultados habríamos llegado caso de habernos referido al límite inferior de especificación  $T_i$ .

Es de observar que las expresiones de  $n$ ,  $m_{LS}$  y  $m_{LI}$ , son idénticas a las ya obtenidas en el párrafo 7.2.2 para el caso de una especificación definida por un solo límite.

### 7.3 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA AL PORCENTAJE DE ELEMENTOS FUERA DE ESPECIFICACION EXISTENTE EN UNA DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA CONOCIDA Y DESVIACION TIPO DESCONOCIDA

#### 7.3.1 *Enunciado del problema*

Se trata de construir una prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$ .

Se supone para la población una distribución normal  $N(m, \sigma)$ , de media conocida y desviación tipo desconocida.

#### 7.3.2 *Un solo límite de especificación*

Dado que entre la proporción de desechos,  $\omega$ , y los parámetros  $m$  y  $\sigma$  de la distribución normal existe, en este caso, la relación funcional

$$\omega = \phi\left(\frac{T_i - m}{\sigma}\right)$$

si la especificación viene definida por un límite inferior  $T_i$ , o la relación funcional

$$\omega = 1 - \phi\left(\frac{T_s - m}{\sigma}\right)$$

si la especificación viene definida por un límite superior  $T_s$ , se verificará que, para una media determinada, a las

proporciones de desechos  $\omega_0$  y  $\omega_1$  deberán corresponder unos valores de la desviación tipo  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$ , calculables a partir de las expresiones

$$K_{1-\omega_0} = \frac{T_i - m}{\sigma_0}$$

$$K_{1-\omega_1} = \frac{T_i - m}{\sigma_1}$$

o bien a partir de las expresiones

$$K_{\omega_0} = \frac{T_s - m}{\sigma_0}$$

$$K_{\omega_1} = \frac{T_s - m}{\sigma_1}$$

es decir

$$\sigma_0 = \frac{m - T_i}{K_{\omega_0}}$$

$$\sigma_1 = \frac{m - T_i}{K_{\omega_1}}$$

o bien

$$\sigma_0 = \frac{T_s - m}{K_{\omega_0}}$$

$$\sigma_1 = \frac{T_s - m}{K_{\omega_1}}$$

A idéntico resultado podríamos haber llegado por simple examen de las figuras 7.33 a y b.

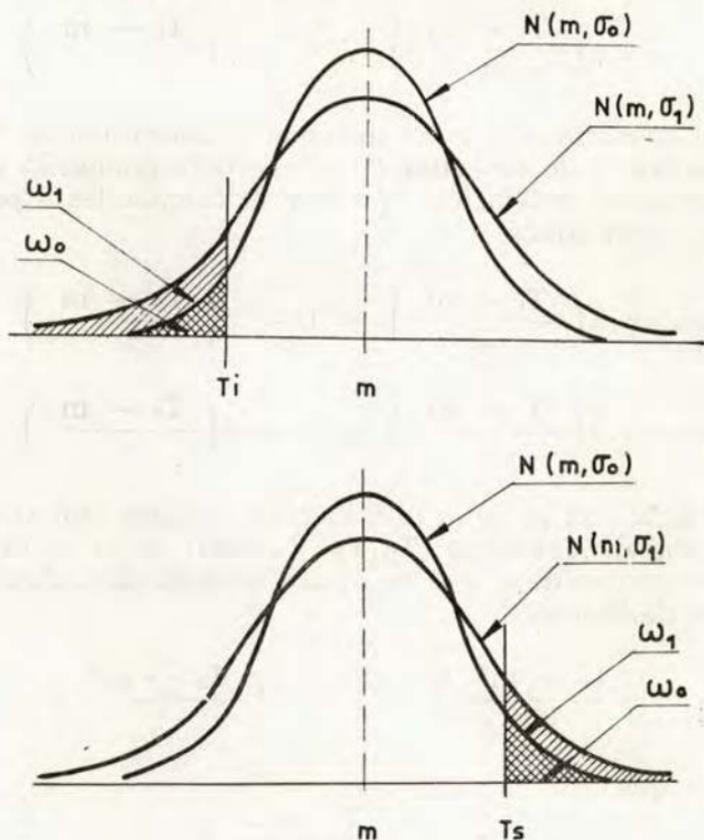


Fig. 7.33

Así pues, la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  y una especificación definida por un solo límite ( $T_i$  ó  $T_s$ ), es en todo equivalente a la prueba  $T\{\sigma \leq \sigma_0 \mid \sigma > \sigma_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\sigma_0, 1 - \alpha)$  y  $(\sigma_1, \beta)$ . Dicha prueba, fue objeto de detenido análisis en el párrafo 6.6.1

### 7.3.3 Dos límites de especificación

En este caso, entre la proporción de desechos  $\omega$  y los parámetros  $m$  y  $\sigma$  de la distribución normal existe la relación funcional

$$\omega = \phi\left(\frac{T_i - m}{\sigma}\right) + 1 - \phi\left(\frac{T_s - m}{\sigma}\right)$$

En consecuencia, para una media determinada, a las proporciones de desechos  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , corresponderán unos valores de la desviación tipo  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$ , calculables a partir de las expresiones

$$\omega_0 = \phi\left(\frac{T_i - m}{\sigma_0}\right) + 1 - \phi\left(\frac{T_s - m}{\sigma_0}\right)$$

$$\omega_1 = \phi\left(\frac{T_i - m}{\sigma_1}\right) + 1 - \phi\left(\frac{T_s - m}{\sigma_1}\right)$$

Si la media  $m$  de la distribución coincide con el punto medio del intervalo  $(T_i, T_s)$ , es decir, si  $m = m^*$ , la determinación de  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$  no ofrece ninguna dificultad. En efecto, dado que

$$\phi\left(\frac{T_i - m^*}{\sigma}\right) = 1 - \phi\left(\frac{T_s - m^*}{\sigma}\right)$$

resulta que

$$\omega = 2\phi\left(\frac{T_i - m}{\sigma}\right)$$

y en consecuencia

$$K_{1-\omega_0/2} = \frac{T_i - m^*}{\sigma_0}$$

$$K_{1-\omega_1/2} = \frac{T_i - m^*}{\sigma_1}$$

Por consiguiente, los valores de  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$  serán

$$\sigma_0 = (m^* - T_i)/K_{\omega_0/2}$$

$$\sigma_1 = (m^* - T_i)/K_{\omega_1/2}$$

A idéntica conclusión podríamos haber llegado por simple examen de la figura 7.34.

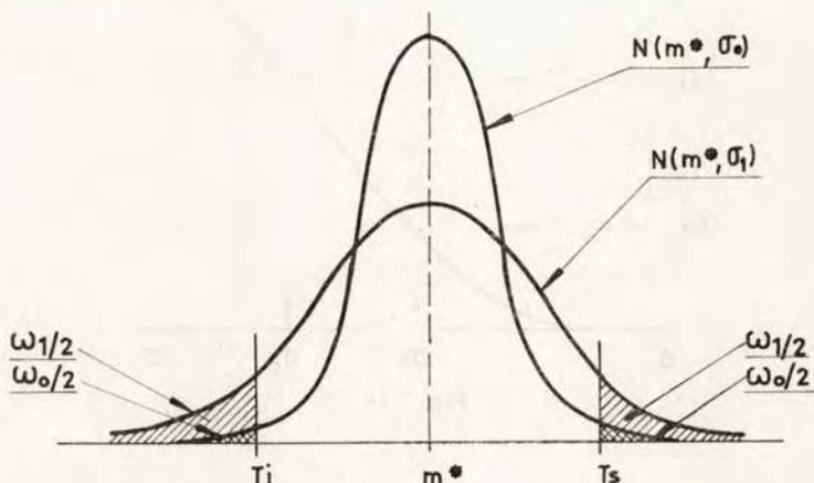


Fig. 7.34

Si la media  $m$  de la distribución no coincide con  $m^*$ , para el cálculo de  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$  deberá procederse a la determinación por puntos de la curva representativa de la función  $\omega(\sigma)$ . Para ello habrá que elegir una serie adecuada de valores de  $\sigma$  y proceder al cálculo de los correspondientes valores de  $\omega$ . Una vez representada la curva  $\omega(\sigma)$ , bastará entrar con los valores  $\omega_0$  y  $\omega_1$  y leer directamente los correspondientes valores  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$  (ver fig. 7.35).

Dado que si  $m \neq m^*$  se cumple necesariamente que

$$\sigma_0 < \frac{m^* - T_i}{K_{\omega_0/2}}$$

$$\sigma_1 < \frac{m^* - T_i}{K_{\omega_1/2}}$$

deberán elegirse valores de  $\sigma$  inferiores a  $\frac{m^* - T_i}{K_{\omega_1/2}}$ .

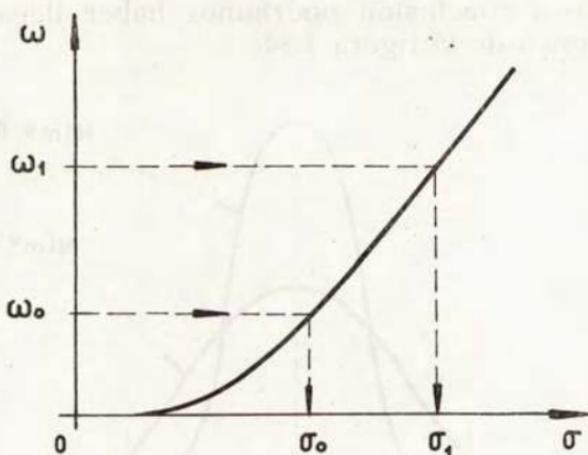


Fig. 7.35

Supongamos, por ejemplo, el siguiente caso particular

$$T_i = 20 \quad T_s = 30 \quad m = 27$$

$$\omega_0 = 2\% \quad \omega_1 = 8\% \quad \alpha = 5\% \quad \beta = 10\%$$

En este caso se verificará que

$$\begin{aligned} \omega &= \phi\left(\frac{20 - 27}{\sigma}\right) + 1 - \phi\left(\frac{30 - 27}{\sigma}\right) = \\ &= 1 + \phi\left(\frac{-7}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

y para  $\sigma$  deberán elegirse valores inferiores a

$$\frac{m^* - T_i}{K_{\omega_1/2}} = \frac{25 - 20}{K_{0.04}} = 2.85$$

Los valores de  $\omega$  correspondientes a valores de  $\sigma$  comprendidos entre 2.50 y 1.25 serán los de la tabla adjunta

$\sigma$	$\omega$
2.50	0.1176
2.25	0.0921
2.00	0.0670
1.75	0.0433
1.50	0.0228
1.25	0.0082

En la figura 7.36 se ha representado la correspondiente curva  $\sigma - \omega$ . Entrando en esta curva con los valores  $\omega_0 = 2\%$  y  $\omega_1 = 8\%$ , se obtiene inmediatamente

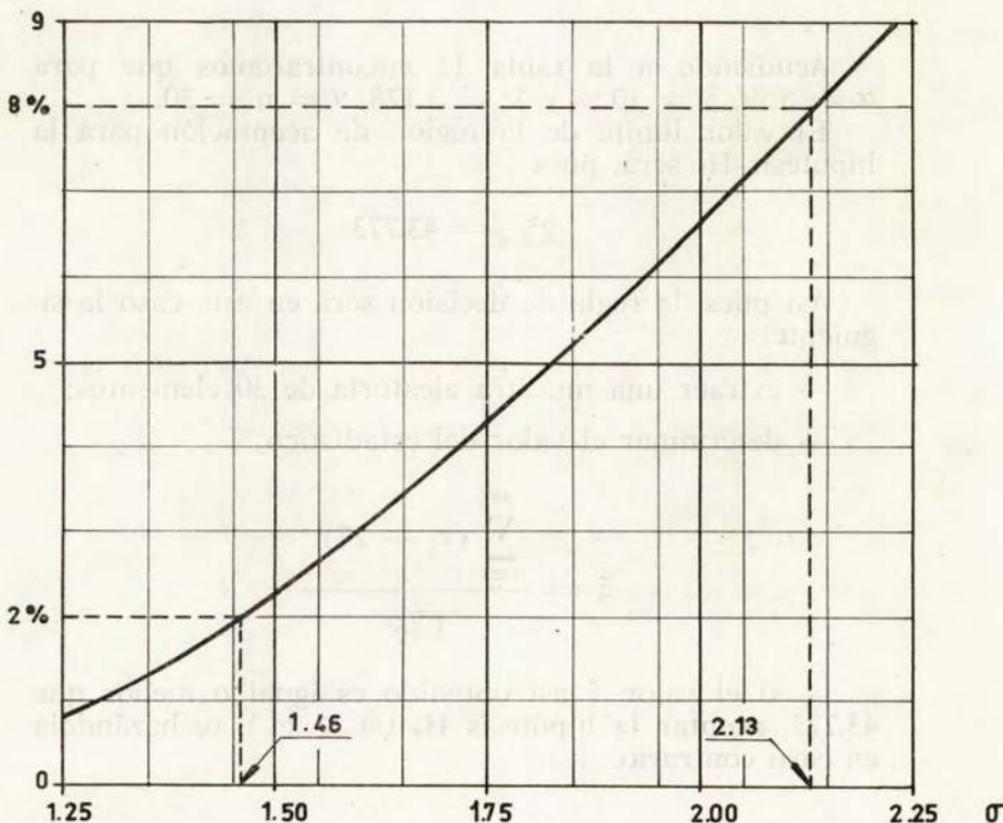


Fig. 7.36

$$\sigma_0 = 1.46$$

$$\sigma_1 = 2.13$$

Una vez deducidos los valores de  $\sigma_0$  y  $\sigma_1$ , bastará construir la prueba  $T\{\sigma \leq \sigma_0 \mid \sigma > \sigma_0\}$  con las condiciones de eficacia (1.46, 0.95) y (2.13, 0.10).

Para ello habrá que determinar en primer lugar el valor del parámetro  $\lambda_p^2 = (\sigma_1/\sigma_0)^2$ . En nuestro caso

$$\lambda_p^2 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2 = \left(\frac{2.13}{1.46}\right)^2 = 2.128$$

Acudiendo a la tabla 13 encontraremos que para  $\alpha = 5\%$ ,  $\beta = 10\%$  y  $\lambda^2 = 2.128$ ,  $\nu = n = 30$ .

El valor límite de la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$  será, pues

$$\chi^2_{\alpha, n} = 43.773$$

Así pues, la regla de decisión será en este caso la siguiente:

- extraer una muestra aleatoria de 30 elementos;
- determinar el valor del estadístico

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{30} (x_i - 27)^2}{1.46^2}$$

— si el valor  $\xi$  así obtenido es igual o menor que 43.773, aceptar la hipótesis  $H_0$  ( $\omega \leq \omega_0$ ), rechazándola en caso contrario.

## 7.4 PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA AL PORCENTAJE DE ELEMENTOS FUERA DE ESPECIFICACION EXISTENTE EN UNA DISTRIBUCION NORMAL DE MEDIA Y DESVIACION TIPO DESCONOCIDAS

### 7.4.1 Enunciado del problema

Se trata de construir una prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$ .

Se supone para la población una distribución normal  $N(m, \sigma)$ , de media y desviación tipo desconocidas.

### 7.4.2 Un solo límite de especificación

En este caso la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  no puede reducirse a la prueba de una hipótesis relativa a un parámetro (media o desviación tipo) de una distribución normal, toda vez que, en la relación funcional que liga  $\omega$  con  $m$  y  $\sigma$ , ambos parámetros figuran como incógnitas.

Ahora bien, en los párrafos 3.5 y 4.5.2 vimos que cuando la media y la desviación tipo de una distribución normal son desconocidas, es posible definir un límite  $\bar{x} + KS$ , de forma que sea  $\gamma$  la probabilidad de que al menos una proporción  $P$  de la población se sitúe por debajo de él. También resulta posible definir un límite  $\bar{x} - KS$ , de forma que sea  $\gamma$  la probabilidad de que al menos una proporción  $P$  de la población se sitúe por encima de él.

En ambos casos  $\bar{x}$  y  $S$  son la media y la raíz cuadrada de la cuasi-variancia de una muestra aleatoria de  $n$  elementos, y  $K$  un parámetro que se determina a partir de la expresión

$$Pr\{t^* \leq K\sqrt{n} \mid \delta = K_{1-P}\sqrt{n}, f = n - 1\} = \gamma$$

Decir que existe la probabilidad  $\gamma$  de que al menos una proporción  $P$  de la población se sitúe por debajo de  $\bar{x} + KS$  equivale a afirmar que existe una probabilidad  $\gamma$  de que el estadístico  $\bar{x} + KS$  se sitúe por encima de un cierto límite desconocido  $T$ , más allá del cual queda justamente una proporción  $1 - P$  de la población, es decir, que se cumpla la condición (ver fig. 7.37)

$$Pr\{\bar{x} + KS > T\} = \gamma$$

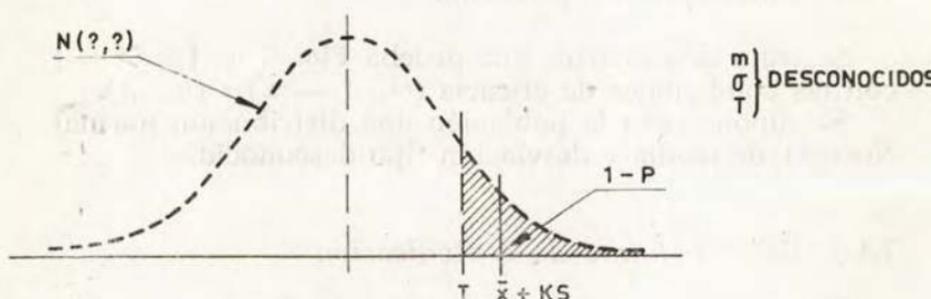


Fig. 7.37

Del mismo modo si  $T$  es un límite desconocido por debajo del cual queda justamente una proporción  $1 - P$  de la población, se cumplirá para el estadístico  $\bar{x} - KS$  que (ver fig. 7.38)

$$Pr\{\bar{x} - KS < T\} = \gamma$$

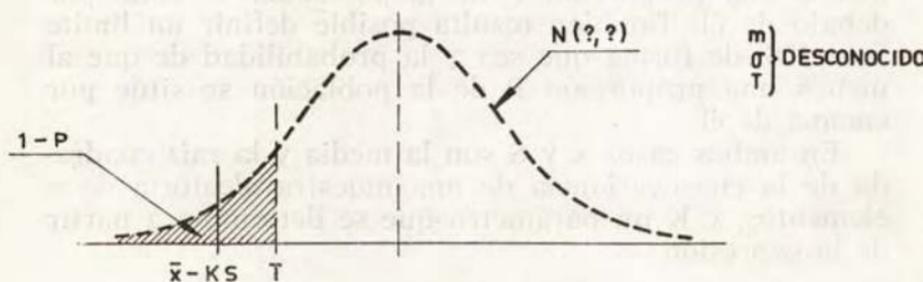


Fig. 7.38

Partiendo de estos conceptos, es posible construir la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  y una especificación definida por un solo límite (superior o inferior).

Supongamos en primer lugar que la especificación viene definida por un límite superior  $T_s$ . Se trata de probar la hipótesis de que la proporción de desechos contenida en la población es, como máximo, igual a  $\omega_0$ .

Sea  $\bar{x} + KS$  un límite definido de forma que la probabilidad de que al menos una proporción  $1 - P$  de la población quede por debajo de él, sea muy pequeña e igual a  $\alpha$ .

En estas condiciones, si la proporción de elementos fuera de especificación existente en la población es realmente igual a  $\omega_0$ , el límite  $\bar{x} + KS$  así definido tendrá, evidentemente, una probabilidad  $\alpha$  de situarse por encima del límite de especificación  $T_s$ , es decir, se cumplirá que (ver fig. 7.39).

$$Pr\{\bar{x} + KS > T_s\} = \alpha$$

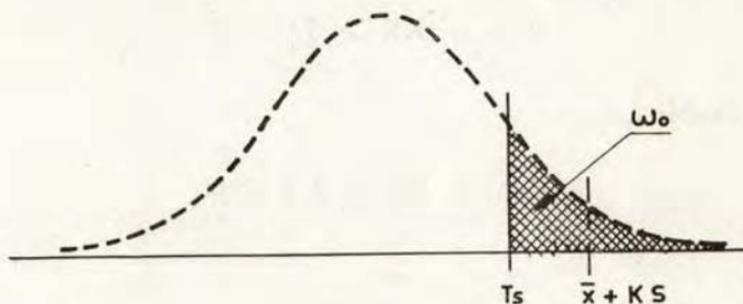


Fig. 7.39

Si la proporción de desechos real es inferior a  $\omega_0$ , el límite desconocido  $T$ , que determina justamente una cola de área  $\omega_0$ , deberá quedar necesariamente por debajo de  $T_s$  (ver fig. 7.40) y como

$$Pr\{\bar{x} + KS > T\} = \alpha$$

se cumplirá que

$$Pr\{\bar{x} + KS > T_s\} < \alpha$$

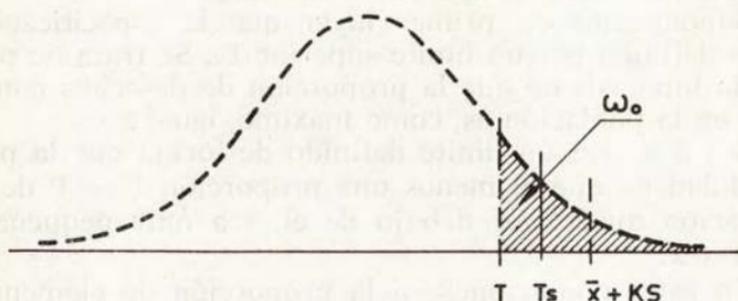


Fig. 7.40

Si por el contrario, la proporción de desechos real es superior a  $\omega_0$ , el límite desconocido T que determina justamente una cola de área  $\omega_0$ , deberá quedar necesariamente por encima de  $T_s$  (ver fig. 7.41), y como

$$Pr\{\bar{x} + KS > T\} = \alpha$$

se cumplirá que

$$Pr\{\bar{x} + KS > T_s\} > \alpha$$

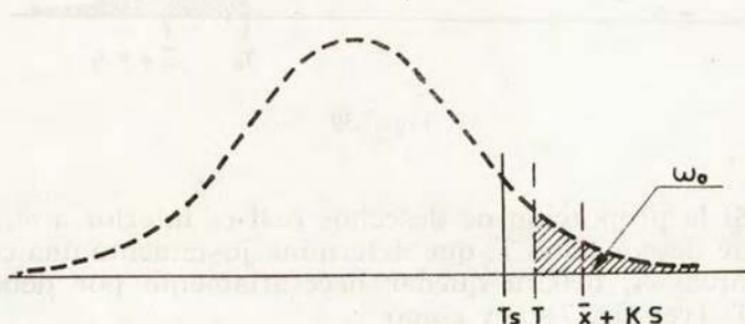


Fig. 7.41

En consecuencia, si tras extraer una muestra aleatoria de  $n$  elementos, calcular  $\bar{x}$  y  $S$  y formar el límite  $\bar{x} + KS$ , siendo  $K$  un parámetro definido por la expresión

$$P_r\{t^* \leq K\sqrt{n} \mid \delta = K_{\omega_0}\sqrt{n}, f = n - 1\} = \alpha$$

resulta que dicho límite cae por encima de  $T_s$ , puede pensarse que:

— o bien la proporción de desechos contenida en la población es realmente igual o menor que  $\omega_0$ , y se ha producido un acontecimiento que *a priori* tiene una pequeña probabilidad de producirse (igual o inferior a  $\alpha$ );

— o bien, la proporción de desechos contenida en la población es superior a  $\omega_0$ .

Como la primera alternativa es poco probable, lo más racional será pensar que, en realidad,  $\omega$  es superior a  $\omega_0$ .

Si, por el contrario, el límite  $\bar{x} + KS$  cae por debajo de  $T_s$ , nada se opondrá a pensar que la proporción de desechos es realmente igual o inferior a  $\omega_0$ .

Así pues, podemos establecer, para la prueba de la hipótesis  $H_0: \omega \leq \omega_0$ , la siguiente regla de decisión:

- extraer una muestra aleatoria de  $n$  elementos;
- determinar los correspondientes valores de  $\bar{x}$  y  $S$ ;
- determinar el valor del parámetro  $K$ ;
- formar el estadístico  $\bar{x} + KS$ ;
- si  $\bar{x} + KS \leq T_s$ , aceptar la hipótesis  $H_0: \omega \leq \omega_0$ , rechazándola en caso contrario.

En esta prueba se parte de un tamaño de muestra,  $n$ , elegido *a priori*. Estudiemos ahora la forma de determinar  $n$  y  $K$  con la condición de que, cuando la proporción de desechos sea realmente igual a  $\omega_1$ , exista tan sólo una probabilidad  $\beta$  de creer erróneamente que dicha proporción es igual o inferior a  $\omega_0$ .

Volvamos a la ecuación

$$P_r\{t^* \leq K\sqrt{n} \mid \delta = K_{\omega_0}\sqrt{n}, f = n - 1\} = \alpha \quad [1]$$

que permite determinar el valor del parámetro  $K$  correspondiente a un tamaño de muestra prefijado, y escribámosla en la forma general

$$P_r\{t^* \leq -K\sqrt{n} \mid \delta = -K_{\omega}\sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \gamma \quad [2]$$

Si en esta ecuación sustituimos  $K$  y  $n$  por dos valores que satisfagan a la ecuación [1] y vamos dando distintos valores a  $\omega$ , la probabilidad  $1 - \gamma$  irá variando. Dado que  $1 - \gamma$  no es otra cosa que la probabilidad de aceptar como buena la hipótesis  $H_0$  cuando la proporción real de desechos es  $\omega$ , la ecuación [2] nos define la función de eficacia de la prueba. Evidentemente, si  $\omega = \omega_0$ ,  $1 - \gamma = 1 - \alpha$ . Cuando  $\omega = \omega_1$ , deberá cumplirse que

$$P_r\{t^* \leq -K\sqrt{n} \mid \delta = -K_{\omega_1}\sqrt{n}, f = n - 1\} = \beta \quad [3]$$

Así pues, para determinar los valores de  $n$  y  $K$  correspondientes a la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$ , habrá que resolver el sistema formado por las ecuaciones [1] y [3] que, a efectos de cálculo, es más cómodo escribir en la forma

$$P_r\{t^* \leq -K\sqrt{n} \mid \delta = -K_{\omega_0}\sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \alpha \quad [4]$$

$$P_r\{t^* \leq K\sqrt{n} \mid \delta = K_{\omega_1}\sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \beta \quad [5]$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, debe recurrirse a un método numérico-gráfico consistente en dibujar por puntos las curvas representativas de las ecuaciones [4] y [5]. Las coordenadas del punto de corte de ambas curvas constituyen la solución del problema (ver fig. 7.42).

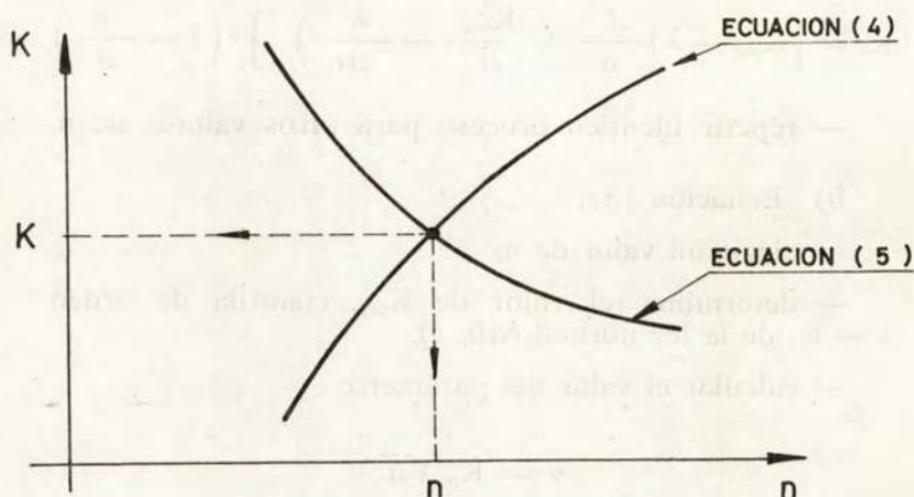


Fig. 7.42

El proceso de cálculo a seguir es el siguiente:

a) Ecuación [4]:

— elegir un valor de  $n$ ;

— determinar el valor de  $K_{\omega_0}$ , cuantila de orden  $1 - \omega_0$  de la ley normal  $N(0, 1)$ ;

— calcular el valor del parámetro

$$\delta = -K_{\omega_0} \sqrt{n}$$

— calcular el valor del parámetro

$$\eta = \delta / (2f + \delta^2)^{1/2}$$

— leer en las tablas de Johnson y Welch el correspondiente valor de  $\lambda$  para  $f = n - 1$  y  $\gamma = 1 - \alpha$ ;

— calcular  $K_0$  a partir de la expresión

$$K_0 = \left[ K_{\omega_0} - \lambda \left( \frac{1}{n} + \frac{K_{\omega_0}^2}{2f} - \frac{\lambda^2}{2fn} \right)^{1/2} \right] / \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2f} \right)$$

— repetir idéntico proceso para otros valores de  $n$ .

b) Ecuación [5]:

— elegir un valor de  $n$ ;

— determinar el valor de  $K_{\omega_1}$ , cuantila de orden  $1 - \omega_1$  de la ley normal  $N(0, 1)$ ;

— calcular el valor del parámetro

$$\delta = K_{\omega_1} \sqrt{n}$$

— calcular el valor del parámetro

$$\eta = \delta / (2f + \delta^2)^{1/2}$$

— leer en las tablas de Johnson y Welch el correspondiente valor de  $\lambda$  para  $f = n - 1$  y  $\gamma = 1 - \beta$ ;

— calcular  $K_1$  a partir de la expresión

$$K_1 = \left[ K_{\omega_1} + \lambda \left( \frac{1}{n} + \frac{K_{\omega_1}^2}{2f} - \frac{\lambda^2}{2fn} \right)^{1/2} \right] / \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2f} \right)$$

— repetir idéntico proceso para otros valores de  $n$ .

De cara a la representación gráfica de las funciones  $K_0(n)$  y  $K_1(n)$  es útil tener en cuenta las siguientes observaciones:

— cuando  $n$  tiende a infinito,  $K_0(n)$  y  $K_1(n)$  tienden a  $K_{\omega_0}$  y  $K_{\omega_1}$  respectivamente;

— cuando  $n$  aumenta,  $K_0(n)$  crece y  $K_1(n)$  decrece.

El carácter creciente de  $K_0(n)$  y decreciente de  $K_1(n)$  tiene una justificación estadística evidente. Para valores

grandes de  $n$ , la distribución de los valores medios muestrales,  $\bar{x}$ , está muy concentrada en torno al valor medio poblacional, es decir, la dispersión es pequeña; todo lo contrario ocurre para valores pequeños del tamaño de la muestra.

Teniendo esto en cuenta, consideremos en primer lugar el límite  $\bar{x} + K_1S$ . Si  $n$  es grande,  $\bar{x}$  y  $S$  tendrán valores no muy diferentes de los correspondientes valores poblacionales, y para garantizar que el estadístico  $\bar{x} + K_1S$  se sitúe por encima de  $T_s$  con una casi-seguridad  $1 - \beta$ , bastará multiplicar  $S$  por un factor  $K_1$  de valor relativamente bajo. A medida que disminuya  $n$ , aumentará la dispersión posible de  $\bar{x}$  y  $S$  en torno a los respectivos valores poblacionales, y para poder tener una garantía  $1 - \beta$  de que el estadístico  $\bar{x} + K_1S$  se sitúe por encima de  $T_s$ , habrá que multiplicar  $S$  por valores de  $K_1$  cada vez mayores.

Por el contrario, en el caso del límite  $\bar{x} + K_0S$ , si el tamaño de la muestra es pequeño, y grande por consiguiente la dispersión esperada para  $\bar{x}$  y  $S$ , deberemos tomar un valor pequeño para  $K_0$ , toda vez que nos exponemos a sobrepasar en seguida el límite  $T_s$ , suceso para el cual sólo aceptamos una pequeña probabilidad  $\alpha$  de ocurrencia. A medida que  $n$  aumente, disminuirá la dispersión esperada para  $\bar{x}$  y  $S$  y, en consecuencia, podrán aceptarse para  $K_0$  valores cada vez mayores, manteniendo dentro del umbral  $\alpha$  el riesgo de sobrepasar el límite  $T_s$ .

Las curvas representativas de las funciones  $K_0(n)$  y  $K_1(n)$  deberán tener, pues, un aspecto tal como el indicado en la figura 7.43.

En la figura 7.44 se ha dibujado una familia de curvas  $K_0(n)$  para una amplia gama de valores de  $\omega_0$  y  $\alpha = 0.05$ , y otra familia de curvas  $K_1(n)$  para la misma gama de valores de  $\omega_1$  y  $\beta = 0.05$ .

En la figura 7.45 se han dibujado las dos familias de curvas correspondientes a  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$ , e idéntica gama de valores de  $\omega_0$  y  $\omega_1$ .

Dadas unas condiciones de eficacia ( $\omega_0$ ,  $1 - \alpha$ ) y ( $\omega_1$ ,  $\beta$ ), el empleo de estas curvas permite reducir considerablemente el trabajo de tanteo numérico-gráfico de las

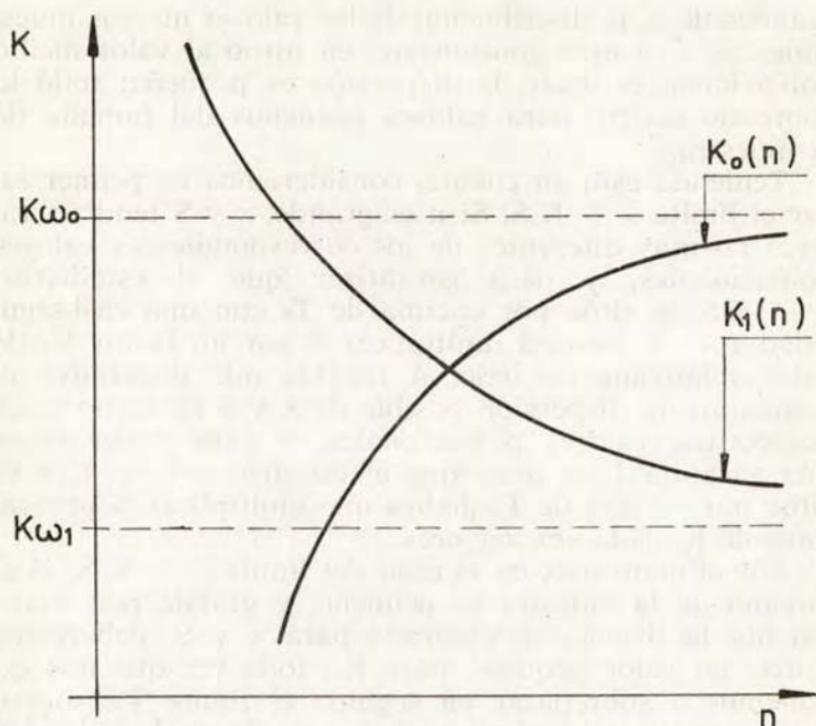


Fig. 7.43

ecuaciones [4] y [5], necesario para la determinación de  $n$  y  $K$ . En efecto, entrando en dichos gráficos con los valores  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , para los cuales no existirá en general ninguna curva dibujada, se puede deducir por interpolación el intervalo de valores de  $n$  al cual interesa limitar el tanteo numérico-gráfico.

De todas formas, aun con esta ayuda, la determinación exacta de  $K$  y  $n$  es sumamente laboriosa.

De cara a las necesidades prácticas, está plenamente justificada la adopción de soluciones aproximadas.

Pueden obtenerse resultados muy satisfactorios recurriendo a un método de determinación de  $n$  y  $K$  totalmente gráfico. Se trata simplemente de dibujar sobre un sistema de ejes coordenados  $\omega - K$  la familia de curvas del parámetro  $n$  correspondiente a  $\alpha = 5\%$  y, sobre los

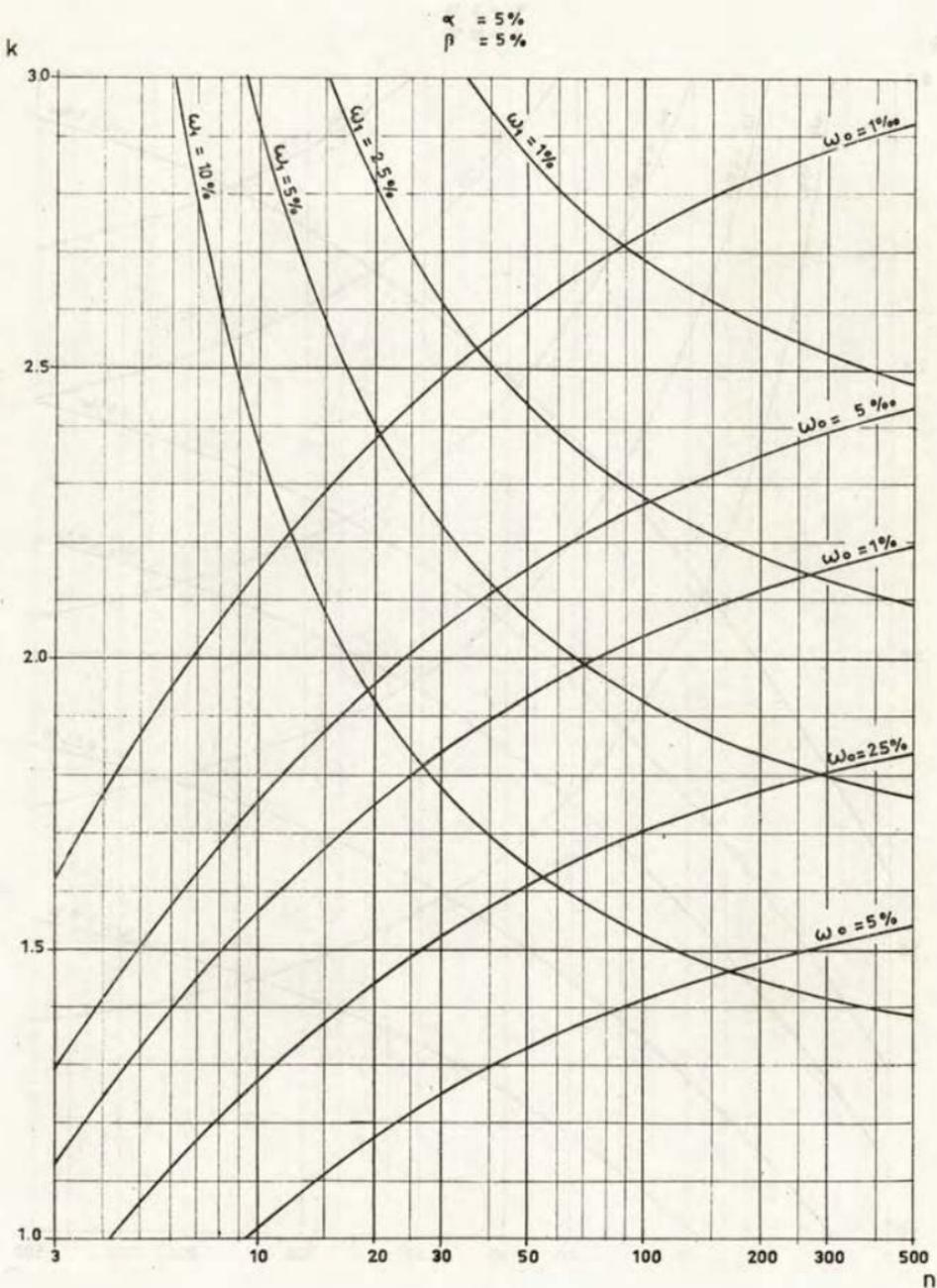


Fig. 7.44

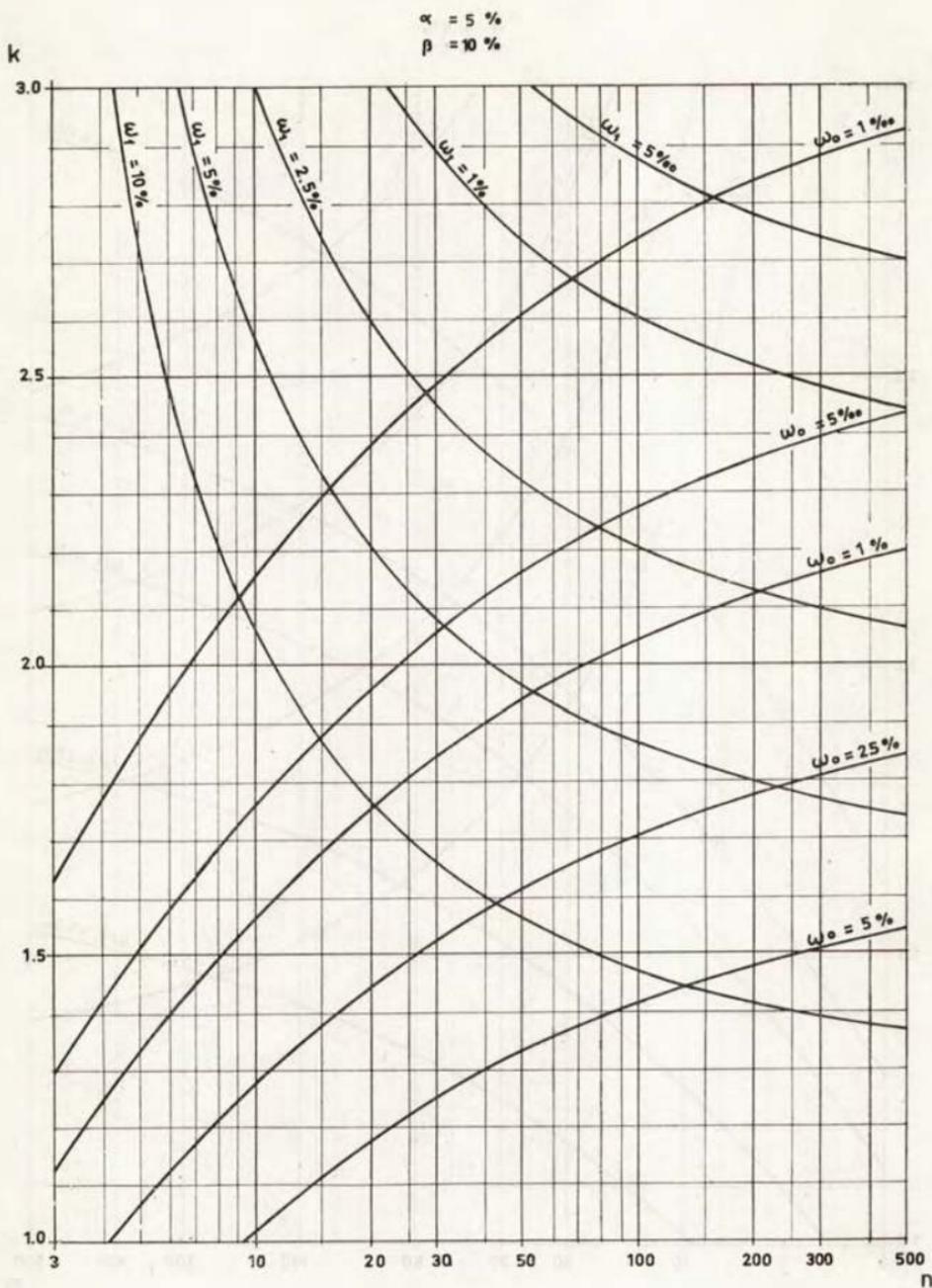


Fig. 7.45

mismos ejes pero con la escala de abscisas graduada en sentido inverso para mayor comodidad de lectura, la familia de curvas de parámetro  $n$  correspondiente a  $\beta = 5\%$  o a  $\beta = 10\%$ .

En la figura 7.46 se ha representado una curva de cada familia, para un mismo valor de  $n$ .

Dada la forma en que han sido trazadas estas curvas, es evidente que, fijados un par de valores  $K$  y  $n$ , es decir,

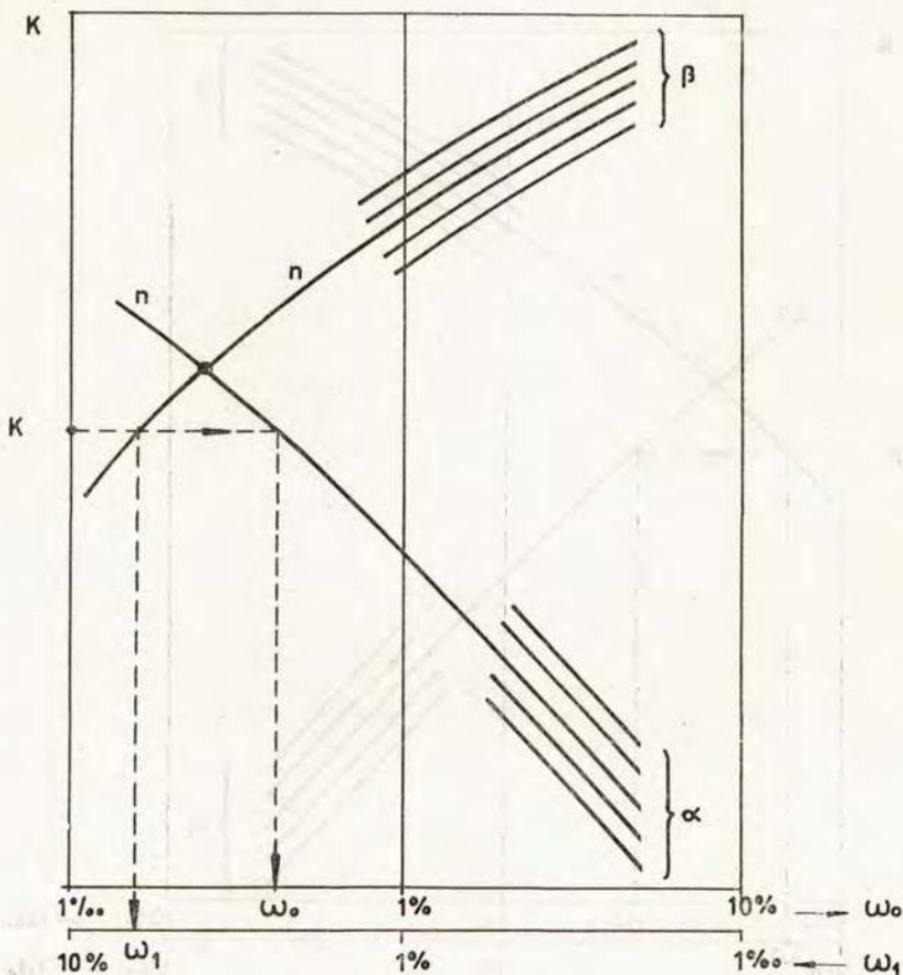


Fig. 7.46

definida de forma completa la prueba, es posible determinar gráficamente las abscisas  $\omega_0$  y  $\omega_1$  de la curva de eficacia correspondiente a las ordenadas  $1 - \alpha$  y  $\beta$ , es decir, los valores de la proporción de desechos que debe contener la población sometida a examen para que la probabilidad de aceptar la hipótesis  $H_0: \omega \leq \omega_0$  sea justamente igual a  $1 - \alpha$  o a  $\beta$  respectivamente.

De forma inversa, dadas las coordenadas  $(\omega_0, 1 - \alpha)$

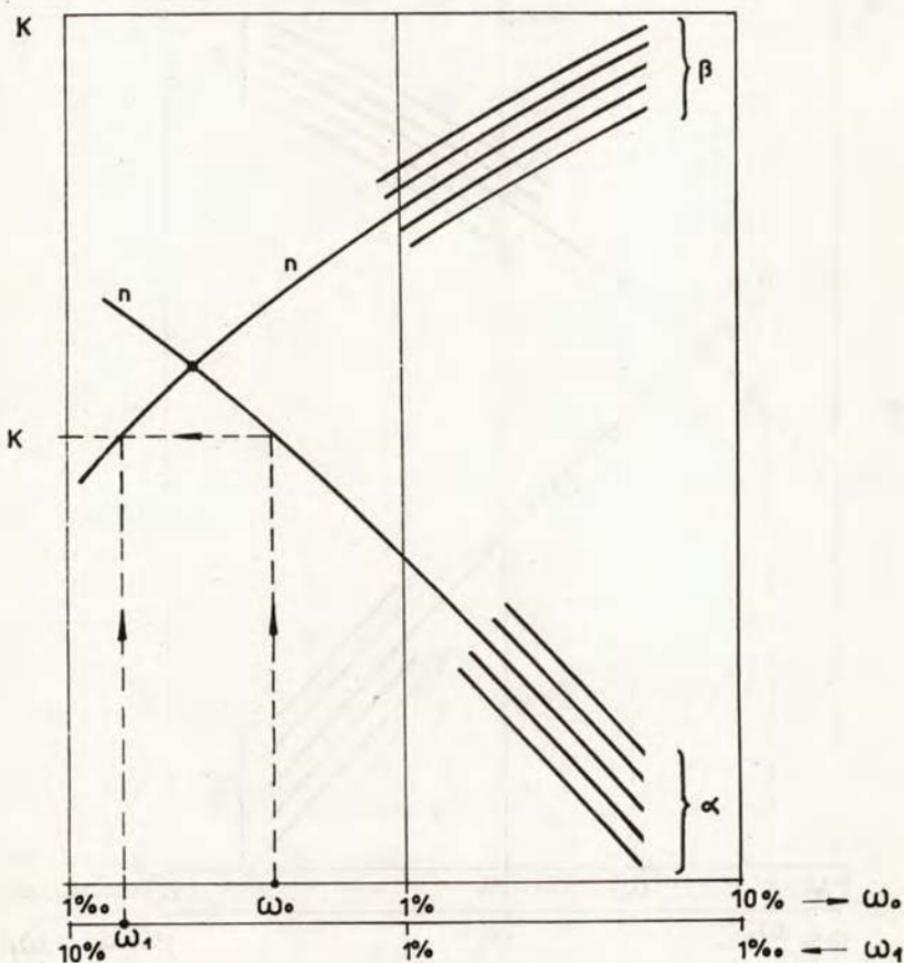


Fig. 7.47

y  $(\omega_1, \beta)$  de dos puntos de la curva de eficacia, es posible encontrar gráficamente los correspondientes valores de  $n$  y  $K$ . Para ello bastará encontrar aquel par de curvas correspondientes a un mismo valor de  $n$ , tales que sus puntos de intersección con las verticales trazadas por  $\omega_0$  y  $\omega_1$  tengan idéntica ordenada  $K$  (ver fig. 7.47).

En las figuras 7.48 y 7.49 se han representado familias de curvas tales como las descritas para  $\alpha = 5\%$ ,  $\beta = 5\%$  y para  $\alpha = 5\%$ ,  $\beta = 10\%$  respectivamente.

Como ejemplo de su manejo, supongamos el siguiente caso particular: una factoría ha recibido un suministro de ciertos elementos mecánicos, una de cuyas características físicas debe ser sometida a control. Se sabe que dicha característica es una variable aleatoria normalmente distribuida, pero se desconoce su media y su desviación tipo. Todo elemento del suministro para el cual la variable objeto de control tenga una medida superior a 25 unidades es considerado defectuoso.

Se desea preparar un plan de inspección por muestra que permita tener al menos una casi seguridad del 95% de aceptar aquellos lotes que tengan como máximo un 1% de elementos defectuosos. Por otra parte, cuando la proporción de desechos sea igual o superior al 6%, sólo se quiere correr un riesgo máximo del 10% de aceptar como bueno el lote.

En este caso, la especificación viene definida por un límite superior  $T_s = 25$ , y las condiciones de eficacia son  $(0.01, 0.05)$  y  $(0.06, 0.10)$ . Acudiendo a las curvas de la figura 7.49 se encuentran inmediatamente para  $n$  y  $K$  los siguientes valores

$$\begin{aligned} n &= 40 \\ K &= 1.9 \end{aligned}$$

Así pues, para realizar el control, bastará extraer al azar una muestra de 40 piezas, medirlas una a una y determinar los correspondientes valores muestrales  $\bar{x}$  y  $S$ . Si el valor del estadístico

$$\bar{x} + KS = \bar{x} + 1.9S$$

$\alpha = 5\%$   
 $\beta = 5\%$

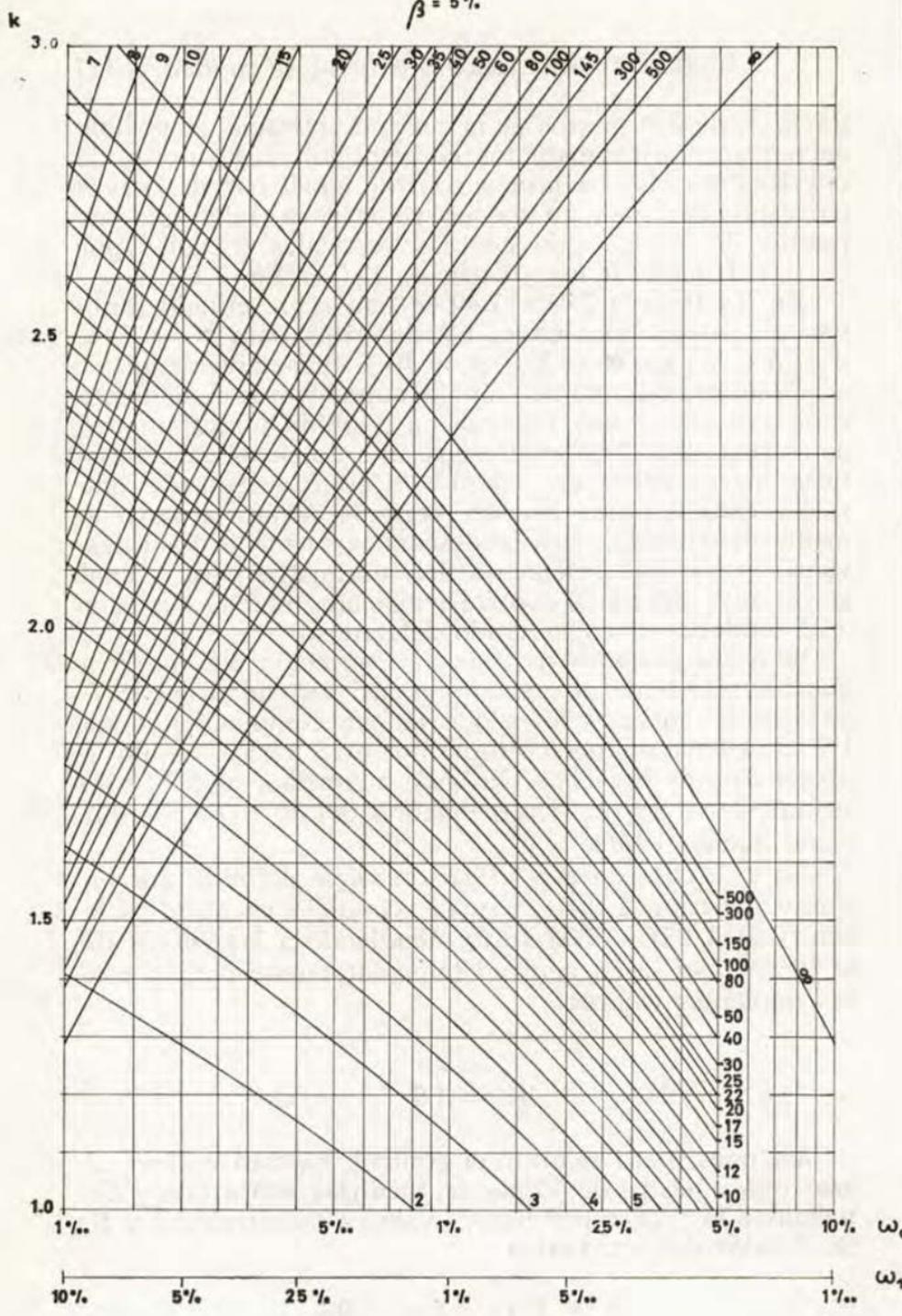


Fig. 7.48

$\alpha = 5\%$   
 $\beta = 10\%$

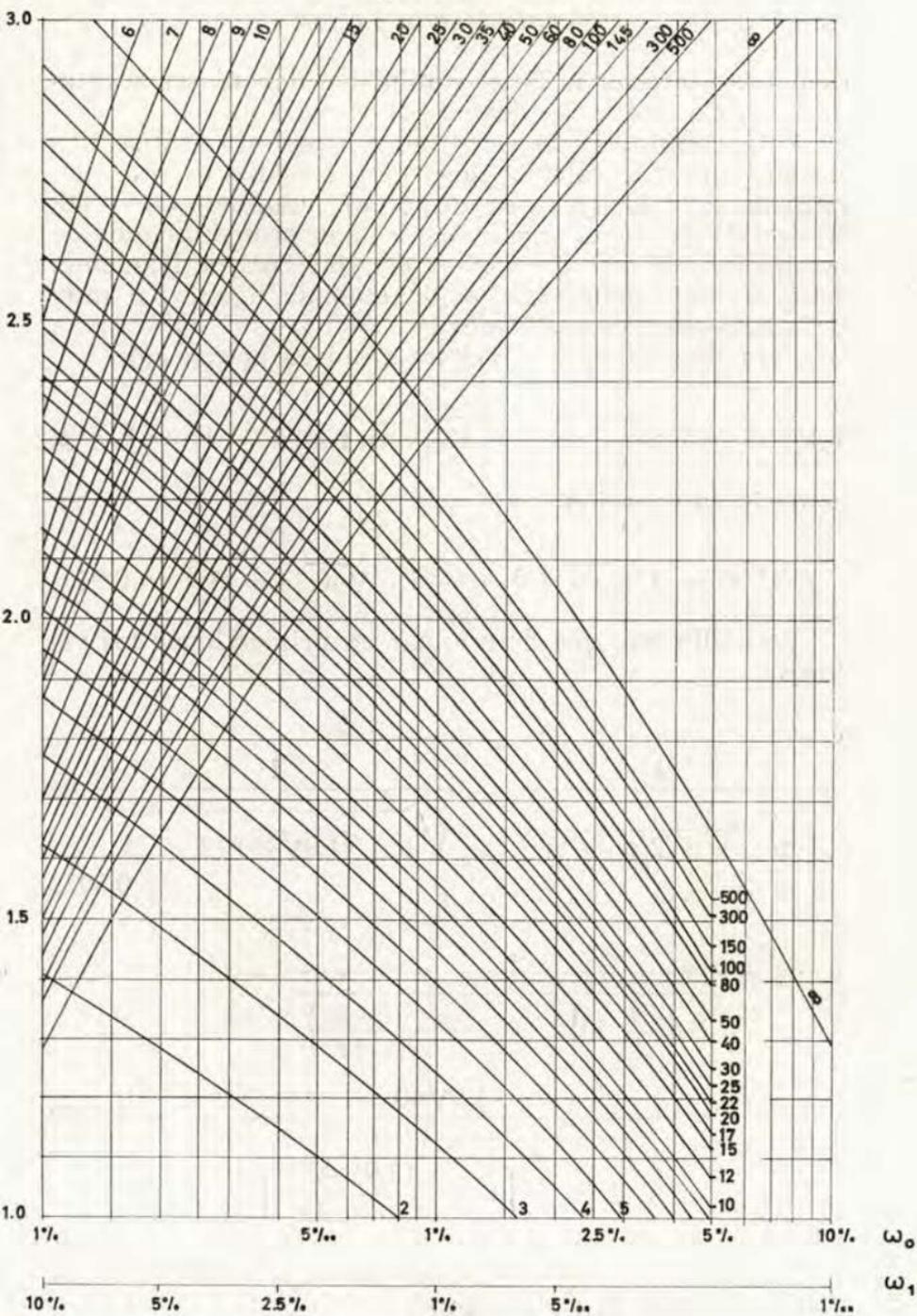


Fig. 7.49

es igual o inferior a 25, el suministro deberá ser aceptado; en caso contrario, deberá ser rechazado.

Para comprobar la exactitud del método gráfico utilizado, vamos a calcular los valores reales de  $\omega_0$  y  $\omega_1$  para los cuales el plan de inspección adoptado ( $n = 40$ ,  $K = 1.9$ ) garantiza exactamente unas probabilidades de aceptación del lote del 95 % y del 10 % respectivamente. Tales valores deben ser, evidentemente, iguales o muy próximos a los especificados ( $\omega_0 = 1\%$  y  $\omega_1 = 6\%$ ).

Para determinar  $\omega_0$  bastará resolver la ecuación

$$P_r\{t^* \leq -K\sqrt{n} \mid \delta = -K_{\omega_0}\sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \alpha$$

es decir, la ecuación

$$P_r\{t^* \leq -1.9\sqrt{40} \mid \delta = -K_{\omega_0}\sqrt{40}, f = 39\} = 0.95$$

Para ello hay que determinar en primer lugar los valores

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + t_0^2/2(n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1.9\sqrt{40})^2/2 \times 39}} = 0.5922$$

$$y' = \frac{t_0}{\sqrt{2(n-1)\left[1 + \frac{t_0^2}{2(n-1)}\right]}} = \frac{-1.9\sqrt{40}}{\sqrt{2 \times 39\left[1 + \frac{(1.9\sqrt{40})^2}{2 \times 39}\right]}} = -0.8058$$

Acudiendo con estos valores de  $y$  e  $y'$  a las tablas de Johnson y Welch, encontramos

	$f_0 = 36$	$f_1 = 144$
$y_0 = 0.5$	$\lambda_{00} = 1.6116$	$\lambda_{10} = 1.6291$
$y = 0.5922$		
$y_1 = 0.6$	$\lambda_{01} = 1.6115$	$\lambda_{11} = 1.6289$

Dado que en estas tablas debe interpolarse para  $y$ , linealmente respecto de  $y$ , y para  $f$ , linealmente respecto de  $144/f$ , resultará

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_{00} + (\lambda_{01} - \lambda_{00}) \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \\ &= 1.6116 + (1.6115 - 1.6116) \frac{0.5922 - 0.5}{0.6 - 0.5} = 1.6115 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_{10} + (\lambda_{11} - \lambda_{10}) \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \\ &= 1.6291 + (1.6289 - 1.6291) \frac{0.5922 - 0.5}{0.6 - 0.5} = 1.6289 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) \frac{\frac{144}{f} - \frac{144}{f_0}}{\frac{144}{f_1} - \frac{144}{f_0}} = \\ &= 1.6115 + (1.6289 - 1.6115) \frac{\frac{144}{39} - \frac{144}{36}}{\frac{144}{144} - \frac{144}{36}} = 1.6133 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\delta = t_0 - \lambda \sqrt{1 + \frac{t_0^2}{2(n-1)}} =$$

$$= -1.9\sqrt{40} - 1.6133\sqrt{1 + \frac{(1.9\sqrt{40})^2}{2 \times 39}} = -14.7408$$

y dado que

$$\delta = -K_{\omega_0}\sqrt{n} = -K_{\omega_0}\sqrt{40}$$

resulta finalmente

$$K_{\omega_0} = \frac{-\delta}{\sqrt{40}} = \frac{14.7408}{\sqrt{40}} = 2.3307$$

es decir  $\omega_0 = 0.0099$ .

Así pues, el valor real de  $\omega_0$  es 0.99 % en lugar de 1 % (valor especificado). La diferencia es, ciertamente, muy pequeña.

Para determinar  $\omega_1$  debe resolverse la ecuación

$$P_r\{t^* \leq K\sqrt{n} \mid \delta = K_{\omega_1}\sqrt{n}, f = n - 1\} = 1 - \beta$$

es decir, la ecuación

$$P_r\{t^* \leq 1.9\sqrt{40} \mid \delta = K_{\omega_1}\sqrt{40}, f = 39\} = 0.90$$

En este caso el proceso operativo es el que a continuación se indica

$$\begin{aligned} y &= 0.5922 \\ y' &= 0.8058 \\ \lambda_{00} &= 1.3210 \\ \lambda_{01} &= 1.3193 \\ \lambda_{10} &= 1.3021 \\ \lambda_{11} &= 1.3012 \\ f_0 &= 36 \\ f_1 &= 144 \end{aligned}$$

$$\lambda_0 = 1.3210 + (1.3193 - 1.3210) \frac{0.5922 - 0.5}{0.6 - 0.5} = 1.3194$$

$$\lambda_1 = 1.3021 + (1.3012 - 1.3021) \frac{0.5922 - 0.5}{0.6 - 0.5} = 1.3013$$

$$\lambda = 1.3194 + (1.3013 - 1.3194) \frac{\frac{144}{39} - \frac{144}{36}}{\frac{144}{144} - \frac{144}{36}} = 1.3175$$

$$\delta = 1.9\sqrt{40} - 1.3175 \sqrt{1 + \frac{(1.9\sqrt{40})^2}{2 \times 39}} = 9.7920$$

$$K_{\omega_1} = \frac{\delta}{\sqrt{40}} = \frac{9.7920}{\sqrt{40}} = 1.5482$$

$$\omega_1 = 0.0608$$

El valor real de  $\omega_1$  es también muy próximo al especificado ( $\omega_1 = 0.06$ ). La aproximación dada por el método gráfico es, pues, excelente.

Todo lo dicho para el caso de una especificación definida por un límite superior  $T_s$  es aplicable al caso en que la especificación viene definida por un límite inferior  $T_i$ . En este caso la región de aceptación para la hipótesis  $H_0$  es

$$A_\alpha = \{\bar{x} - KS \geq T_i\}$$

debiendo procederse al cálculo de  $n$  y  $K$  mediante los métodos numérico-gráficos ya descritos, sin ninguna modificación.

### 7.4.3 Dos límites de especificación

Según vimos en el párrafo 4.5.3, cuando la media y la desviación tipo de una distribución son desconocidas, es posible determinar un intervalo  $\bar{x} \pm KS$  tal que sea  $\gamma$  la probabilidad de que al menos una proporción  $P$  de la población quede comprendida en su interior.

Wald y Wolfowitz proponen determinar  $K$  a partir de la expresión

$$K = r^{\mathfrak{U}}$$

siendo  $r$  la raíz de la ecuación

$$\phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + r\right) - \phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - r\right) = P$$

y  $\mathfrak{U}$  una función de  $n$  y  $\gamma$  definida por la expresión

$$\mathfrak{U} = \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{\gamma, n-1}^2}}$$

siendo  $\chi_{\gamma, n-1}^2$  la cuantila de orden  $1 - \gamma$  de la ley de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad.

Partiendo de estos conceptos, es posible plantear la prueba  $T\{\omega \leq \omega_0 \mid \omega > \omega_0\}$  con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  y una especificación definida por dos límites  $T_1$  y  $T_s$

Bastará, en efecto, dibujar por puntos en un sistema de ejes coordenados las curvas representativas de las funciones de  $n$

$$K_0 = r_0 \mathfrak{U}_\alpha$$

y

$$K_1 = r_1 \mathfrak{U}_{1-\beta}$$

siendo  $r_0$  y  $r_1$  las respectivas raíces de las ecuaciones

$$\phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + r_0\right) - \phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - r_0\right) = 1 - \omega_0$$

$$\phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + r_1\right) - \phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - r_1\right) = 1 - \omega_1$$

y  $q_{\alpha}$  y  $q_{1-\beta}$  sendas funciones de  $n$ , definidas por las expresiones

$$q_{\alpha} = \sqrt{(n-1)/\chi_{\alpha, n-1}^2}$$

y

$$q_{1-\beta} = \sqrt{(n-1)/\chi_{1-\beta, n-1}^2}$$

y tomar como valores de los parámetros  $K$  y  $n$  de la prueba, las coordenadas del punto de corte de dichas curvas (ver fig. 7.50).

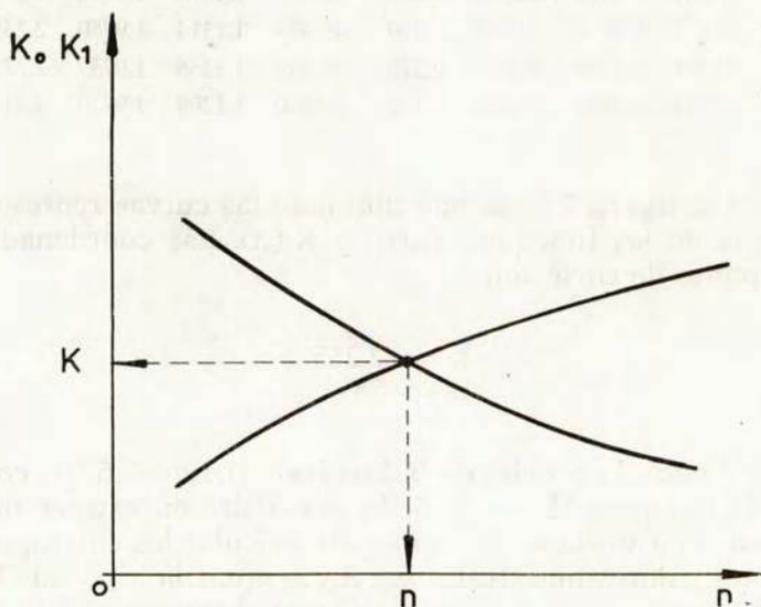


Fig. 7.50

Como ejemplo de aplicación supongamos el siguiente caso particular:

$$\omega_0 = 5\text{‰}, \quad \omega_1 = 6\text{‰}, \quad \alpha = 5\text{‰}, \quad \beta = 10\text{‰},$$

$$T_1 = 20,$$

$$T_8 = 25$$

En este caso, para valores de  $n$  comprendidos entre 40 y 75 se obtienen los resultados de la tabla adjunta

$n$	$\chi^2_{\alpha, n-1}$	$Q_{\alpha}$	$r_0$	$K_0$	$\chi^2_{1-\beta, n-1}$	$Q_{1-\beta}$	$r_1$	$K_1$
40	54.572	0.8454	2.6074	2.204	28.196	1.1761	1.9842	2.334
45	60.481	0.8529	2.6039	2.221	32.487	1.1638	1.9816	2.306
50	66.339	0.8594	2.6012	2.235	36.818	1.1536	1.9794	2.283
55	72.153	0.8651	2.5989	2.248*	41.183	1.1451	1.9777	2.265*
60	77.931	0.8701	2.5970	2.260*	45.577	1.1378	1.9762	2.249*
65	83.675	0.8746	2.5954	2.270	49.996	1.1314	1.9750	2.235
70	89.391	0.8786	2.5940	2.279	54.438	1.1258	1.9739	2.222
75	95.081	0.8822	2.5928	2.287	58.900	1.1209	1.9730	2.212

En la figura 7.51 se han dibujado las curvas representativas de las funciones  $K_0(n)$  y  $K_1(n)$ . Las coordenadas del punto de corte son

$$K = 2.255$$

$$n = 58$$

Así pues, la prueba de la hipótesis  $H_0: \omega \leq 5\text{‰}$  contra la hipótesis  $H_1: \omega > 5\text{‰}$  consistirá en extraer una muestra aleatoria de 58 elementos, calcular los correspondientes valores muestrales  $\bar{x}$  y  $S$  y aceptar la hipótesis  $H_0$  si el intervalo  $\bar{x} \pm 2.255S$  se sitúa en el interior del intervalo  $[20, 25]$ , rechazándola en caso contrario.

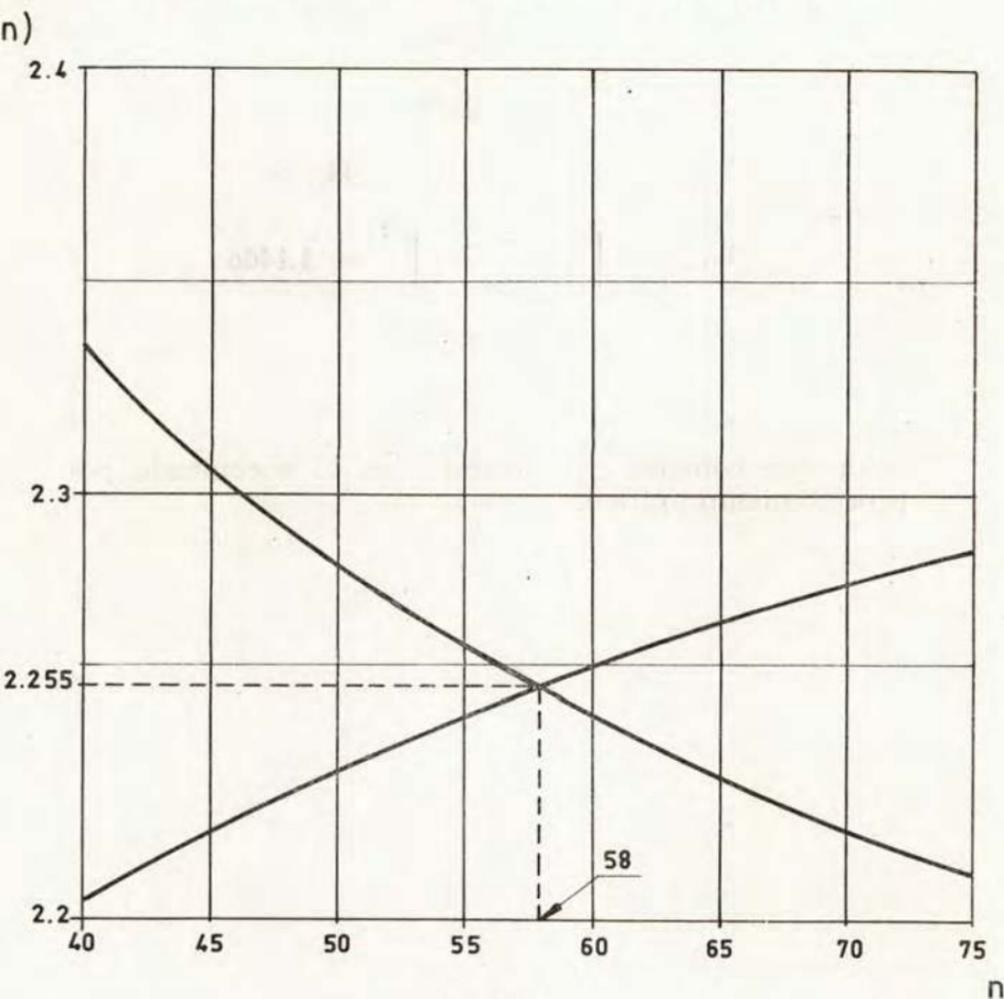


Fig. 7.51

Para comprobar la exactitud de esta solución basta calcular numéricamente el valor de  $K$  correspondiente a  $n = 58$ . En efecto, para  $n = 58$ , resulta

$$\chi^2_{\alpha, n-1} = \chi^2_{0.05, 57} = 75.624$$

$$u_{\alpha} = \left[ \frac{n-1}{\chi^2_{\alpha, n-1}} \right]^{1/2} = 0.8682$$

$$r_0 = 2.5977$$

$$K_0 = 2.255$$

$$\chi_{1-\beta, n-1}^2 = \chi_{0.90; 57}^2 = 43.816$$

$$u_{1-\beta} = \left[ \frac{n-1}{\chi_{1-\beta, n-1}^2} \right]^{1/2} = 1.1406$$

$$r_1 = 1.9767$$

$$K_1 = 2.255$$

valor que coincide exactamente con el encontrado por procedimiento gráfico.

## CAPITULO 8

### *CONTROL DE RECEPCION*

#### 8.1. NATURALEZA ESTADISTICA DE LOS PROBLEMAS DE CONTROL DE LA CALIDAD DE LAS FABRICACIONES

Cuando se investiga cualquier característica física común a las distintas unidades (items) de una fabricación en serie (la dureza de unos ejes de acero, por ejemplo), nunca se encuentra para dicha característica un valor fijo, idéntico para todos los elementos, sino una distribución de valores. La razón de esta variabilidad hay que buscarla en el gran número de factores que intervienen en toda fabricación, cuya absoluta fijeza es imposible garantizar, y en la imperfección de los aparatos de medida a la que viene a sumarse, de forma no despreciable, el factor humano.

Por otra parte, es preciso que las unidades de una fabricación cumplan con unas especificaciones para que resulten útiles al fin que se destinan.

La existencia de estas dos realidades contrapuestas, variabilidad y especificación, se traduce en un hecho inevitable: la producción de desechos.

El problema de la existencia de desechos presenta aspectos distintos según se examine bajo el punto de vista del cliente o bajo el punto de vista del fabricante.

Para el cliente o consumidor, cualquier elemento defectuoso es inutilizable, de forma que será su deseo que en los lotes que adquiere no figure ningún elemento fuera de especificación.

Por su parte, el fabricante o productor encontrará

esta exigencia poco razonable. La producción de desechos es inevitable y, aun suponiendo que mediante la adopción de una tecnología avanzada y de unos métodos de control en curso de fabricación muy rigurosos, pudiera reducir a un mínimo la proporción de desechos producida, se vería obligado en último término a controlar al 100 % la totalidad de la producción. Todas estas medidas supondrían costes de fabricación prohibitivos que, en una buena parte, deberían ser pagados por el consumidor. Además, un control al 100 %, cuando existe posibilidad física de hacerlo (ensayos no destructivos) y en contra de lo que pueda parecer a simple vista, no garantiza en modo alguno una calidad absolutamente perfecta, toda vez que ni los aparatos de medida ni el personal encargado de la realización del control son infalibles.

Estamos, pues, ante un conflicto entre calidad y coste que exige una solución de compromiso. El cliente deberá tolerar que en los lotes que adquiere figure un cierto número de desechos, y el fabricante por su parte deberá procurar suministrar siempre calidades aceptables a un coste razonable.

Tácitamente aceptado este compromiso, el cliente, para conocer la calidad real de los lotes que le son enviados, no tiene otro remedio que proceder a un control.

Este control, por las razones ya expuestas, no puede hacerse extensivo a la totalidad del suministro, sino que debe quedar limitado a una muestra aleatoria del mismo. Según los resultados del examen de la muestra, se decidirá la aceptación o el rechazo de cada uno de los lotes.

Para efectuar este examen por muestra, denominado «control de recepción», debe recurrirse al empleo de las técnicas estadísticas expuestas en los capítulos anteriores.

En efecto, para cada lote, se trata de probar la hipótesis  $H_0$ : «el lote es de calidad aceptable», contra la hipótesis  $H_1$ : «el lote es de mala calidad».

Como toda prueba de hipótesis, un plan de control de recepción posee una curva de eficacia, es decir, una curva que da en ordenadas la probabilidad de aceptar

el lote en función del valor real de la proporción de desechos contenida en el lote controlado (ver fig. 8.1).

Esta curva pone claramente de manifiesto lo que puede esperarse que ocurra en la práctica como consecuencia de la implantación de una modalidad de control determinada.

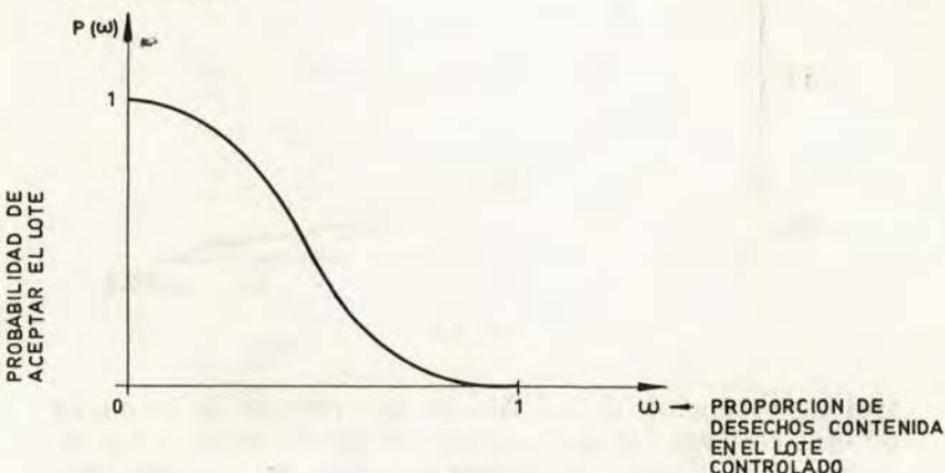


Fig. 8.1

En el caso de un consumidor que deseara tener una casi-seguridad del 95 % de rechazar aquellos lotes cuya proporción de desechos fuese igual o superior al 6 %, calidad que él considera inadmisibile, un plan de control cuya curva de eficacia fuese tal como la representada en la figura 8.2 satisfaría plenamente sus deseos.

Ahora bien, este plan de control sería desastroso para el fabricante, al cual le sería rechazada una elevada proporción de lotes de excelente calidad; concretamente, el 50 % de los lotes que contuviesen un 2 % de desechos.

Se comprende que esto no es justo y que los intereses del fabricante también deben ser tenidos en cuenta, dando una probabilidad de aceptación elevada a los lotes de calidad igual o superior a un cierto límite.

Así pues, para definir correctamente un plan de con-

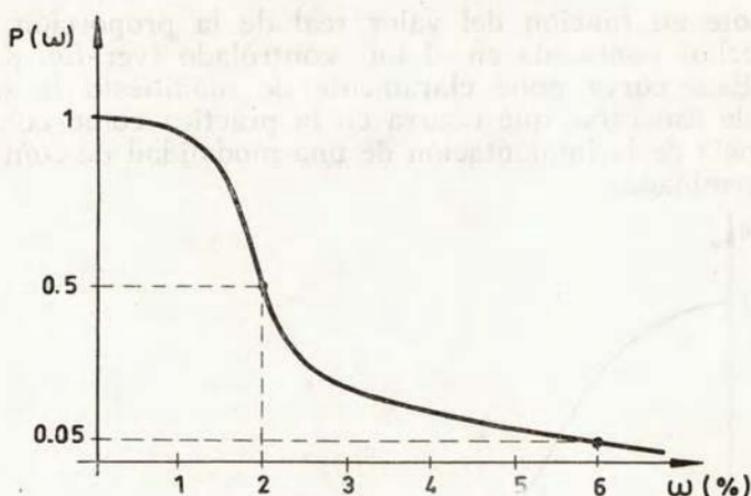


Fig. 8.2

trol de recepción deben fijarse dos puntos de la curva de eficacia (ver fig. 8.3). El punto  $(\omega_1, \beta)$  traduce los intereses del cliente y el punto  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  los intereses del fabricante. En estas condiciones, si la proporción real de desechos de la fabricación es  $\omega \leq \omega_0$ , la proba-

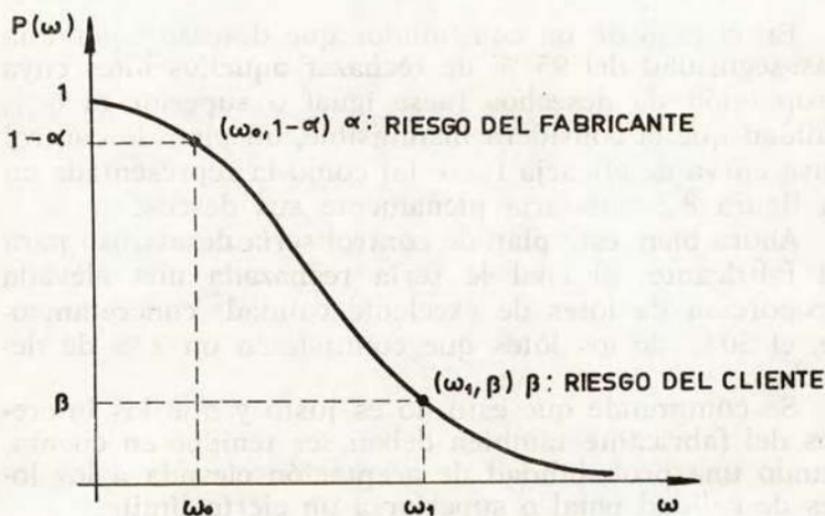


Fig. 8.3

bilidad de rechazar el lote será igual o menor que  $\alpha$  (riesgo del fabricante), mientras que, si la proporción de desechos es  $\omega = \omega_1$ , la probabilidad de aceptar el lote será  $\beta$  (riesgo del cliente). Los valores que deben adoptarse para  $\alpha$  y  $\beta$  dependen, en cada caso, de la gravedad de las consecuencias que pueda ocasionar la adopción de una decisión equivocada. En las aplicaciones industriales lo más normal es tomar  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$ .

El planteamiento de un plan de control de recepción queda, pues, reducido al planteamiento de una prueba de hipótesis, con condiciones de eficacia preestablecidas.

Hasta ahora, nos hemos referido exclusivamente al control de recepción realizado por el cliente. Ahora bien, el fabricante también necesita en muchos casos conocer la calidad real de su fabricación a fin de asegurarse de que los lotes que va a enviar tienen una elevada probabilidad de ser aceptados, y poder comprobar la efectividad de su plan de control en curso de fabricación con vistas a introducir, caso de ser necesario, las oportunas modificaciones. En este caso se habla de control de pre-expedición o control final de fabricación.

El control final es, en esencia, idéntico al control de recepción propiamente dicho, y todas las técnicas que expondremos en los párrafos siguientes serán de aplicación tanto en uno como en otro caso.

## 8.2 METODOS DE INSPECCION POR MUESTRA

La manera de definir un plan de control depende fundamentalmente de la información que se tenga sobre la distribución estadística de los valores de la variable física objeto de control.

Si se desconoce por completo la distribución estadística de dicha variable, debe recurrirse necesariamente a planes de control de tipo cualitativo. Se extrae una muestra aleatoria del lote y sus distintas unidades son examinadas y clasificadas en buenas y defectuosas. Se-

gún el número de desechos que se detecten, se decide la aceptación o el rechazo del lote.

Cuando la distribución estadística de los valores de la variable física objeto de control es conocida, puede recurrirse a planes de control de tipo cuantitativo. Se extrae una muestra del lote y se miden una a una sus distintas unidades. Según los resultados de la medición se decide la aceptación o el rechazo del lote. En general, los planes de control por medidas tienen una estructura idéntica a la de las pruebas de hipótesis ya estudiadas en capítulos anteriores.

El medir las distintas unidades de la muestra, en vez de clasificarlas simplemente como buenas o defectuosas, supone una mejor utilización de la información contenida en la muestra. Se comprende, pues, que un plan de control cuantitativo requerirá, para unas mismas condiciones de eficacia, un tamaño de muestra más reducido que un plan de control cualitativo.

Según el modo de extraer la muestra aleatoria, los planes de control cualitativo admiten las siguientes modalidades:

- muestreo simple;
- muestreo doble;
- muestreo múltiple;
- muestreo progresivo o secuencial;
- muestreo continuo.

Por su parte, los planes de control cuantitativo sólo admiten las modalidades de muestreo simple y muestreo progresivo o secuencial. Hasta el momento no se ha desarrollado ningún plan de control cuantitativo por muestreo doble, múltiple o continuo.

En los párrafos siguientes examinaremos con detenimiento las distintas modalidades de control de recepción (o pre-expedición) cualitativo y cuantitativo.

### 8.3 PLANES DE CONTROL CUALITATIVO. CONTROL POR ATRIBUTOS

#### 8.3.1 Planes de control cualitativo por muestreo simple

Un plan de muestreo simple se define de la manera siguiente:

— se toma una muestra aleatoria de extensión  $n$  del lote (constituido por  $N$  unidades);

— si la muestra contiene un número de desechos  $c$  igual o inferior a  $c_A$ , se acepta el lote; si contiene  $c_R = c_A + 1$  ó más, se rechaza.

El efectivo,  $n$ , de la muestra y el valor límite de aceptación pueden ser determinados a partir de los puntos de coordenadas  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  que definen completamente la curva de eficacia del plan de control que satisface tanto a los intereses del cliente como a los intereses del fabricante.

En primer lugar empecemos por definir la función densidad de probabilidad,  $f(c)$ , del número de desechos contenidos en una muestra de extensión  $n$  extraída de forma exhaustiva de un lote de  $N$  unidades. Dicha función de densidad de probabilidad viene dada por la distribución hipergeométrica

$$f(c) = \frac{\binom{N\omega}{c} \binom{N - N\omega}{n - c}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_{N\omega}^c C_{N-N\omega}^{n-c}}{C_N^n}$$

En efecto, hay  $C_N^n$  formas de extraer exhaustivamente una muestra de extensión  $n$  de un lote de  $N$  unidades. Por otra parte, los  $c$  desechos que figuran en la muestra deben proceder del sublote formado por las  $N\omega$  unidades defectuosas, del cual pueden ser extraídos de  $C_{N\omega}^c$

formas, y las  $n - c$  unidades restantes deben proceder del sublote formado por las  $N(1 - \omega)$  unidades buenas, del cual pueden ser extraídas de  $C_{N(1-\omega)}^{n-c}$  formas. Esto da un total de

$$C_{N\omega}^c \times C_{N(1-\omega)}^{n-c}$$

formas de extraer exhaustivamente una muestra en la que figuren  $c$  unidades defectuosas y  $n - c$  unidades buenas. En consecuencia, la función densidad de probabilidad  $f(c)$  deberá ser, necesariamente, la ya indicada.

Por otra parte, la función de eficacia del plan de muestreo simple, o sea, la probabilidad de aceptar el lote cuando en realidad la proporción de desechos sea  $\omega$ , vendrá dada por la expresión

$$P(\omega) = P_r\{c \leq c_A\} = \sum_{i=0}^{c_A} \frac{C_{N\omega}^i C_{N(1-\omega)}^{n-i}}{C_N^n}$$

Dado que para  $\omega = \omega_0$  y  $\omega = \omega_1$  deben cumplirse, respectivamente, las condiciones

$$\begin{aligned} P(\omega_0) &= 1 - \alpha \\ P(\omega_1) &= \beta \end{aligned}$$

podremos escribir

$$\sum_{i=0}^{c_A} \frac{C_{N\omega_0}^i C_{N(1-\omega_0)}^{n-i}}{C_N^n} = 1 - \alpha$$

$$\sum_{i=0}^{c_A} \frac{C_{N\omega_1}^i C_{N(1-\omega_1)}^{n-i}}{C_N^n} = \beta$$

sistema de ecuaciones que, resuelto, permite determinar  $n$  y  $c_A$ . La resolución de este sistema de ecuaciones es

muy complicada. Ahora bien, en la práctica casi siempre se opera con lotes de gran tamaño, y el efectivo  $n$  de la muestra suele ser pequeño frente a  $N$ . En estos casos, la distribución hipergeométrica puede ser aproximada por la distribución binomial, lo que equivale a suponer que el muestreo se realiza de forma no exhaustiva.

Utilizando la aproximación binomial, la función de eficacia del plan de muestreo puede ser escrita en la forma

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^{c_A} C_n^i \omega^i (1 - \omega)^{n-i}$$

siendo

$$C_n^i = \binom{n}{i} = n! / (i!(n - i)!)$$

el número de combinaciones de  $n$  elementos tomados  $i$  a  $i$ . Esto nos conduce al sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{c_A} C_n^i \omega_0^i (1 - \omega_0)^{n-i} = 1 - \alpha$$

$$\sum_{i=0}^{c_A} C_n^i \omega_1^i (1 - \omega_1)^{n-i} = \beta$$

De todas formas este sistema de ecuaciones también es de difícil solución, por lo que se imponen nuevas aproximaciones. Dado que en la mayoría de los casos prácticos los lotes contienen pocos desechos, la distribución binomial puede ser aproximada mediante la distribución de Poisson. La aproximación puede considerarse suficientemente buena siempre y cuando se cumplan las condiciones

$$n > 50$$

y

$$n\omega < 5$$

La función de eficacia adoptará en este caso la forma

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^{c_A} C_i \omega^i (1 - \omega)^{n-i} \approx \sum_{i=0}^{c_A} e^{-n\omega} \frac{(n\omega)^i}{i!}$$

lo cual conduce al sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{c_A} e^{-n\omega_0} \frac{(n\omega_0)^i}{i!} = 1 - \alpha$$

$$\sum_{i=0}^{c_A} e^{-n\omega_1} \frac{(n\omega_1)^i}{i!} = \beta$$

Este sistema puede resolverse fácilmente haciendo uso de la correspondencia que existe entre la distribución de Poisson y la distribución de  $\chi^2$ .

En efecto, para un número par de grados de libertad se verifica que (ver fig. 8.4)

$$P_r\{\chi^2 \geq \chi_{r, \nu}^2\} = P = \sum_{i=0}^{c_A} e^{-n\omega} \frac{(n\omega)^i}{i!}$$

siendo

$$\chi_{P, \nu}^2 = 2n\omega$$

y

$$\nu = 2c_A + 2 = \hat{2}$$

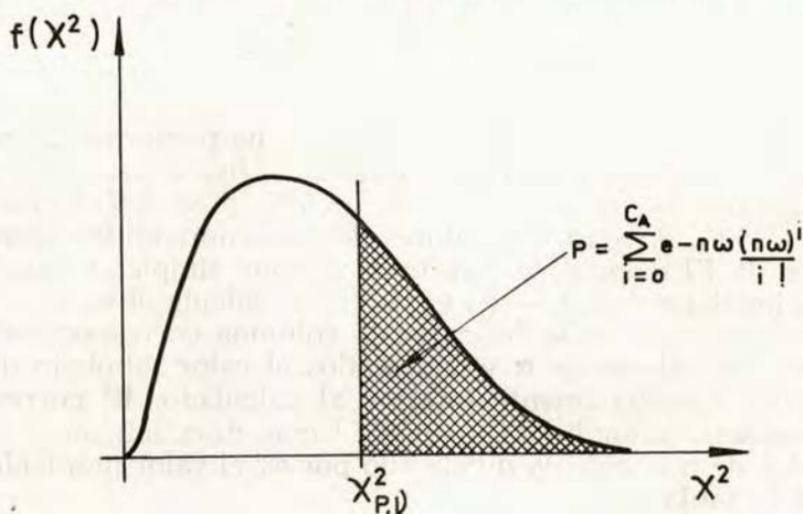


Fig. 8.4

En estas condiciones, es posible escribir que

$$\begin{aligned} \chi^2_{1-\alpha, \nu} &= 2n\omega_0 \\ \chi^2_{\beta, \nu} &= 2n\omega_1 \end{aligned}$$

ecuaciones de las que se deduce inmediatamente que

$$\frac{\chi^2_{\beta, \nu}}{\chi^2_{1-\alpha, \nu}} = \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

Esta expresión permite la determinación del valor límite  $c_A$ . Para ello basta, en efecto, buscar aquel valor par del número de grados de libertad para el cual el cociente  $\chi^2_{\beta, \nu} / \chi^2_{1-\alpha, \nu}$  es lo más parecido posible al cociente  $\omega_1 / \omega_0$ , y escribir

$$c_A = \frac{\nu - 2}{2}$$

Determinado  $c_A$ , el cálculo de  $n$  es inmediato a partir de la expresión

$$n = \frac{\chi_{1-\alpha, \nu}^2}{2\omega_0} = \frac{\chi_{\beta, \nu}^2}{2\omega_1}$$

Para facilitar los cálculos, el autor ha preparado la tabla 18 en la que se dan los valores de  $\omega_1/\omega_0 = \chi_{1-\alpha, \nu}^2/\chi_{\beta, \nu}^2$  y de  $n\omega_0 = \chi_{1-\alpha, \nu}^2/2$  para  $\alpha = 5\%$ ,  $\beta = 5\%$  y para  $\alpha = 5\%$ ,  $\beta = 10\%$  y valores de  $c_A$  comprendidos entre 0 y 30. El manejo de esta tabla es muy simple. A partir de los datos  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$ , se calcula el valor del cociente  $\omega_1/\omega_0$  y se busca en la columna correspondiente a los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  deseados el valor tabulado de  $\omega_1/\omega_0$  inmediatamente inferior al calculado. El correspondiente valor límite  $c_A$  puede leerse directamente y el valor de  $n$  se calcula dividiendo por  $\omega_0$  el valor  $n\omega_0$  leído en la tabla.

La razón de tomar para  $c_A$  el valor correspondiente al valor tabulado de  $\omega_1/\omega_0$  inmediatamente inferior al calculado, es la siguiente: la resolución exacta del sistema de ecuaciones

$$P(\omega_0) = 1 - \alpha$$

$$P(\omega_1) = \beta$$

con  $c_A$  y  $n$  enteros es, en general, imposible. La necesidad de adoptar una solución aproximada a base de valores enteros, para  $c_A$  y  $n$ , trae consigo la automática modificación de los riesgos de error  $\alpha$  y  $\beta$  en que se incurrirá realmente al llevar a la práctica el plan de inspección. Se obtiene así un plan de inspección cuya curva de eficacia no pasa en realidad por los puntos  $(\omega_0, 1 - \alpha)$ ,  $(\omega_1, \beta)$  sino por las «proximidades» de dichos puntos.

Supongamos, para centrar ideas, el siguiente caso particular:  $N = 10\,000$ ,  $\omega_0 = 2\%$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $\omega_1 = 6\%$ ,  $\beta = 10\%$ . En este caso  $\omega_1/\omega_0 = 0.06/0.02 = 3$ . Acudiendo a la tabla 18, encontraríamos que 3 está comprendido entre los valores 3.206 y 2.957, a los que corresponden respectivamente unos valores de  $c_A$  iguales a 6 y 7 y unos valores de  $n\omega_0 = \chi_{1-\alpha, \nu}^2/2$  iguales a 3.285 y 3.981. Si retenemos para  $c_A$  el valor 6, el correspondiente valor de  $n$  será

$$n = \frac{\chi_{0.95; 14}^2}{2\omega_0} = \frac{3.285}{0.02} = 164$$

El par de valores  $c_A = 6$  y  $n = 164$  satisfacen casi exactamente a la ecuación

$$\chi_{0.95, y}^2 = 2n\omega_0 = 0.04n$$

es decir, adoptando la solución  $c_A = 6$  y  $n = 164$  el riesgo de error  $\alpha$  será prácticamente igual al 5 %.

Ahora bien, estos valores  $n_0$  satisfacen a la ecuación

$$\chi_{0.10, y}^2 = 2n\omega_1 = 0.12n$$

En efecto

$$\chi_{0.10; 14}^2 = 21.064$$

y

$$0.12n = 19.68$$

Así pues, al adoptar la solución  $c_A = 6$  y  $n = 164$ , resultará que el riesgo de error de segunda especie realmente cometido ya no será del 10 %, sino que tendrá un valor superior  $\beta$  (ver fig. 8.5) dado por la ecuación

$$\chi_{\beta, 14}^2 = 19.68$$

La solución de esta ecuación es  $\beta = 0.1406$ . Resulta, pues, un riesgo de segunda especie de valor superior al preestablecido.

Por el contrario, si retenemos para  $c_A$  el valor 7, el correspondiente valor de  $n$  será

$$n = \frac{\chi_{0.95; 18}^2}{2\omega_0} = \frac{3.981}{0.02} = 199$$

En este caso los valores  $c_A = 7$  y  $n = 199$  satisfacen casi exactamente a la ecuación

$$\chi_{0.95, y}^2 = 2n\omega_0 = 0.04n$$

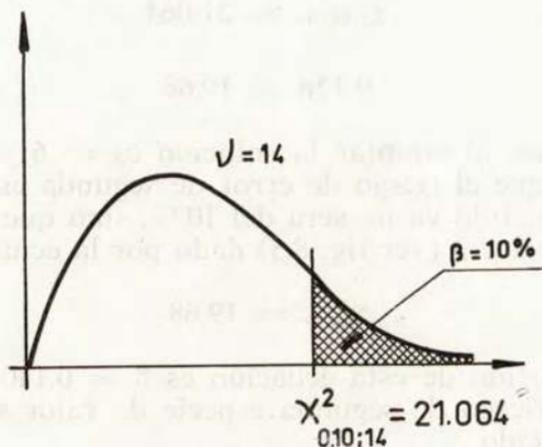
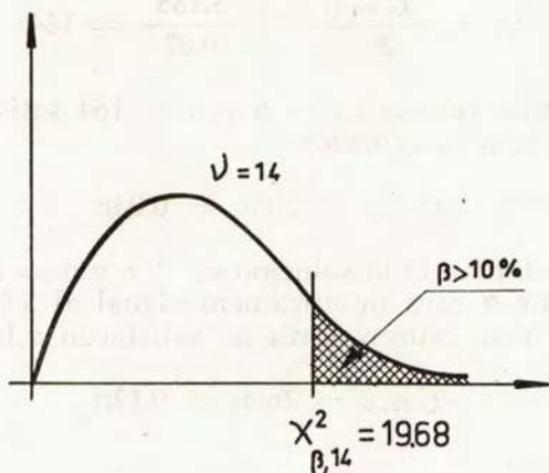


Fig. 8.5

por lo que el riesgo de error de primera especie es prácticamente igual al 5%. Sin embargo, estos valores, al igual que ocurría en el caso anterior, no satisfacen a la ecuación

$$\chi^2_{0.10, \nu} = 2n\omega_1 = 0.12n$$

toda vez que  $\chi_{0.10; 16}^2 = 23.542$  y  $0.12n = 23.880$ . Para determinar el valor real de  $\beta$ , debe resolverse la ecuación

$$\chi_{\beta, 16}^2 = 23.880$$

Ahora bien, dado que  $23.880 > 23.542$ , el valor de  $\beta$  deberá resultar necesariamente inferior al 10 %. Concretamente en este caso se obtiene  $\beta = 0.0922$ . Así pues, la adopción de la solución  $c_A = 7$  y  $n = 199$  trae consigo un riesgo de error de segunda especie inferior al prefijado.

En el caso concreto que hemos estudiado, esta segunda solución ( $c_A = 7$  y  $n = 199$ ) será preferible a la primera ( $c_A = 6$  y  $n = 164$ ), toda vez que, garantizando ambas un mismo riesgo para el proveedor, la segunda da lugar a un menor riesgo para el cliente.

Naturalmente, el criterio que acabamos de exponer no debe ser aplicado de una forma excesivamente rígida. Supongamos, por ejemplo, que las condiciones de eficacia deseadas fuesen:  $\omega_0 = 2\%$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $\omega_1 = 8\%$ ,  $\beta = 5\%$ . En este caso, de acuerdo con el criterio general, y dado que  $\omega_1/\omega_0 = 0.08/0.02 = 4$  está comprendido entre 4.023 y 3.604, deberíamos tomar para  $c_A$  el valor 6. Ahora bien, dado que 4.023 es un valor muy próximo a 4, adoptar para  $c_A$  el valor 5 no tendría desde el punto de vista práctico ninguna consecuencia sobre los riesgos. En efecto, para  $c_A = 5$  tendríamos:

$$n = \frac{2.613}{0.02} = 131$$

$$\chi_{\beta, 12}^2 = 2 \times 131 \times 0.08 = 20.96$$

y, en consecuencia, el correspondiente valor del riesgo de error de segunda especie sería

$$\beta = 0.0510$$

prácticamente igual al valor prefijado (0.05).

Por el contrario, para  $c_A = 6$  resultaría

$$n = \frac{3.286}{0.02} = 164$$

$$\chi_{\beta, 14}^2 = 2 \times 164 \times 0.08 = 26.24$$

y el riesgo de error de segunda especie sería

$$\beta = 0.0241$$

valor notablemente inferior al especificado.

A la vista de estos resultados, parece preferible adoptar la solución  $c_A = 5$  y  $n = 131$ , toda vez que garantiza unos niveles de protección prácticamente iguales a los especificados, con la ventaja de exigir un tamaño de muestra inferior.

Cuando el valor del cociente  $\omega_1/\omega_0$  sale fuera del campo de utilización de la tabla 18, es decir, cuando  $c_A > 30$ , la determinación de  $c_A$  y  $n$  puede realizarse sin dificultad teniendo en cuenta las propiedades asintóticas de la variable aleatoria

$$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

la cual, para  $\nu > 30$ , tiende a distribuirse de acuerdo con una ley normal  $N(0, 1)$ . En estas condiciones, las ecuaciones

$$\begin{aligned} P(\omega_0) &= 1 - \alpha \\ P(\omega_1) &= \beta \end{aligned}$$

se transforman en

$$\sqrt{2\chi_{1-\alpha, \nu}^2} - \sqrt{2\nu - 1} = K_{1-\alpha} = -K_{\alpha}$$

$$\sqrt{2\chi_{\beta, \nu}^2} - \sqrt{2\nu - 1} = K_{\beta}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, resulta

$$c_A = \frac{1}{4} \left[ \frac{K_\beta \sqrt{\omega_0} + K_\alpha \sqrt{\omega_1}}{\sqrt{\omega_1} - \sqrt{\omega_0}} \right]^2 - \frac{3}{4}$$

$$n = \frac{1}{4} \left[ \frac{K_\alpha + K_\beta}{\sqrt{\omega_1} - \sqrt{\omega_0}} \right]^2$$

Tanto para  $c_A$  como para  $n$  deben tomarse los valores enteros más próximos. En general, siempre conviene redondear por exceso el valor obtenido para  $n$ .

Cuando los valores de  $\omega_0$  y  $\omega_1$  son elevados, la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución de Poisson no da resultados satisfactorios. En estos casos puede recurrirse a la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal. La aproximación puede considerarse buena cuando  $n$  es grande y  $\omega$  no es demasiado próximo a 0 ó a 1. En la práctica, si se cumple la condición

$$n\omega > 5$$

y

$$n(1 - \omega) > 5$$

o bien la condición

$$n\omega(1 - \omega) > 10$$

la aproximación obtenida es excelente.

Dado que la media y la variancia de la variable aleatoria  $c$ , binomialmente distribuida, son

$$E[c] = n\omega$$

$$\text{Var}[c] = n\omega(1 - \omega)$$

la aproximación normal consistirá en suponer que la distribución de  $c$  es normal  $N(n\omega, \sqrt{n\omega(1 - \omega)})$ . En estas condiciones las ecuaciones

$$P(\omega_0) = 1 - \alpha$$

$$P(\omega_1) = \beta$$

deberán escribirse en la forma (ver fig. 8.6)

$$\phi \left[ \frac{c_A + 0.5 - n\omega_0}{\sqrt{n\omega_0(1 - \omega_0)}} \right] = 1 - \alpha$$

$$\phi \left[ \frac{c_A + 0.5 - n\omega_1}{\sqrt{n\omega_1(1 - \omega_1)}} \right] = \beta$$

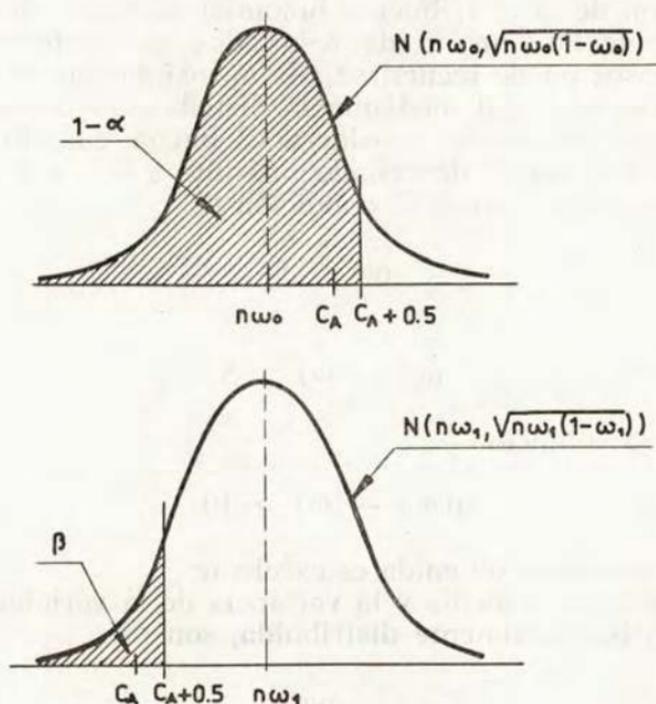


Fig. 8.6

toda vez que el paso de la distribución binomial discreta a la distribución normal continua exige la adición de 0.5 a  $c_A$ , valor necesariamente entero.

De las ecuaciones anteriores, se deduce inmediatamente que

$$\frac{c_A + 0.5 - n\omega_0}{\sqrt{n\omega_0(1 - \omega_0)}} = K_\alpha$$

$$\frac{c_A + 0.5 - n\omega_1}{\sqrt{n\omega_1(1 - \omega_1)}} = K_{1-\beta} = -K_\beta$$

o lo que es lo mismo

$$c_A + 0.5 = n\omega_0 + K_\alpha\sqrt{n\omega_0(1 - \omega_0)}$$

$$c_A + 0.5 = n\omega_1 - K_\beta\sqrt{n\omega_1(1 - \omega_1)}$$

Eliminando en este sistema de ecuaciones la incógnita  $n$ , se obtiene para  $c_A$  la expresión

$$c_A = \frac{K_\alpha\omega_1\sqrt{\omega_0(1 - \omega_0)} + K_\beta\omega_0\sqrt{\omega_1(1 - \omega_1)}}{(\omega_1 - \omega_0)^2} \\ [K_\alpha\sqrt{\omega_0(1 - \omega_0)} + K_\beta\sqrt{\omega_1(1 - \omega_1)}] - 0.5$$

Dado que  $c_A$  debe ser necesariamente entero, habrá que escoger el valor entero más próximo al calculado, ya sea por exceso ya sea por defecto. En general, conviene tomar el valor entero por exceso, pues de esta forma se consigue, respetando el nivel de protección del fabricante, reducir el riesgo del cliente.

Una vez elegido el valor  $c_A$ , el correspondiente valor de  $n$  debe calcularse a partir de la ecuación

$$c_A + 0.5 = n\omega_0 + K_\alpha\sqrt{n\omega_0(1 - \omega_0)}$$

Resolviendo esta ecuación resulta

$$n = \frac{1}{2B^2} [2AB + C^2 - C\sqrt{4AB + C^2}]$$

siendo

$$A = c_A + 0.5$$

$$B = \omega_0$$

$$C = K_\alpha \sqrt{\omega_0(1 - \omega_0)}$$

Como ejemplo de aplicación, supongamos que las condiciones de eficacia deseadas sean:  $\omega_0 = 5\%$ ,  $\alpha = 2\%$ ,  $\omega_1 = 15\%$ ,  $\beta = 5\%$ . En este caso

$$K_\alpha = 2.05375$$

$$K_\beta = 1.64485$$

y sustituyendo valores en la ecuación de  $c_A$  se obtiene

$$c_A = 9.49$$

Tomando para  $c_A$  el valor 10 y sustituyendo valores en la ecuación de  $n$ , resulta

$$n = 114$$

La solución  $c_A = 10$ ,  $n = 114$ , dará lugar a un riesgo de error de primera especie prácticamente igual al valor especificado del 2%. Sin embargo, el riesgo de error de segunda especie será inferior al 5%. En efecto,

$$K_\beta = \frac{n\omega_1 - c_A - 0.5}{\sqrt{n\omega_1(1 - \omega_1)}} = 1.73116$$

y en consecuencia

$$\beta = 0.0418$$

Si hubiésemos escogido para  $c_A$  el valor 9, se preciaría una muestra de 100 piezas pero se incurriría en un riesgo de error de segunda especie del 6.18%.

Una vez determinados el tamaño de la muestra,  $n$ , y el valor límite,  $c_A$ , por cualquiera de los métodos expuestos, el trazado de la curva de eficacia no ofrece especiales dificultades. Basta representar gráficamente la función

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^{c_A} C_n^i \omega^i (1 - \omega)^{n-i}$$

para distintos valores de  $\omega$ . Para tamaños de muestra elevados esta expresión resulta de cálculo enojoso.

Si se utiliza la aproximación de Poisson, la función de eficacia del plan de control puede escribirse en la forma

$$P(\omega) = \sum_{i=0}^{c_A} e^{-n\omega} \frac{(n\omega)^i}{i!}$$

expresión de cálculo muy simple utilizando la tabla 19.

Si se utiliza la aproximación normal, la función de eficacia del plan de control adoptará la forma

$$P(\omega) = \phi \left[ \frac{c_A + 0.5 - n\omega}{\sqrt{n\omega(1 - \omega)}} \right]$$

Su cálculo también resulta sumamente simple (ver fig. 8.7).

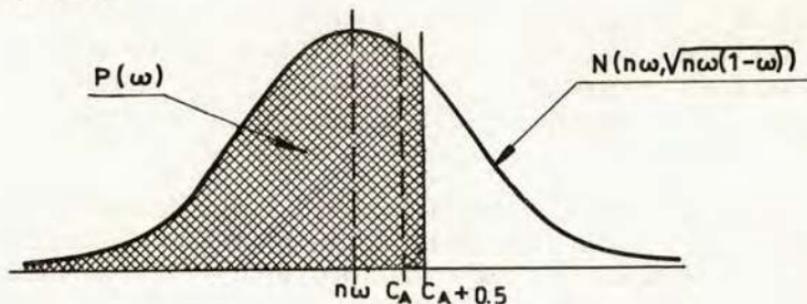


Fig. 8.7

Como ejemplo de aplicación de estos métodos, supongamos el caso particular de un plan de inspección por muestreo simple definido por los parámetros

$$n = 100$$

$$c_A = 6$$

En la tabla adjunta se dan los valores de la función  $P(\omega)$  para distintos valores de  $\omega$ , determinados por el método casi exacto (distribución binomial) y por los dos métodos aproximados (distribución de Poisson y distribución normal)

$\omega$	BINOMIAL	APROX. POISSON	APROX. NORMAL
0.01	0.9999	1.0000	1.0000
0.02	0.9959	0.9950	0.9993
0.03	0.9688	0.9660	0.9799
0.04	0.8936	0.8890	0.8990
0.05	0.7660	0.7620	0.7543
0.06	0.6064	0.6060	0.5834
0.07	0.4443	0.4500	0.4223
0.08	0.3032	0.3130	0.2902
0.09	0.1940	0.2070	0.1912
0.10	0.1172	0.1300	0.1217
0.11	0.0672	0.0790	0.0752
0.12	0.0367	0.0460	0.0453
0.13	0.0192	0.0260	0.0266
0.14	0.0097	0.0140	0.0153
0.15	0.0047	0.0080	0.0086

En la figura 8.8 se han representado gráficamente las curvas de eficacia correspondientes al método de cálculo exacto y a los dos métodos aproximados. Puede apreciarse que en ambos casos, y a efectos prácticos, la aproximación obtenida es suficiente.

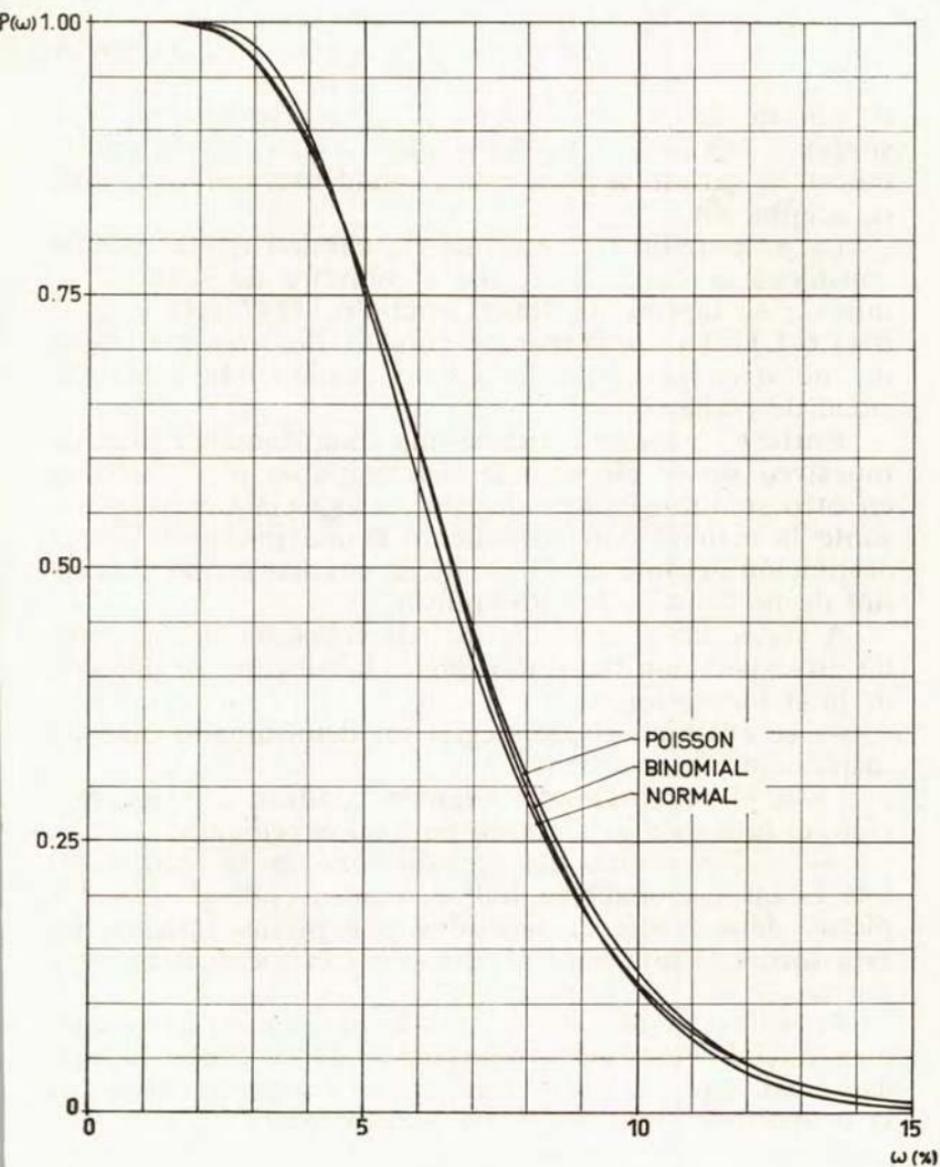


Fig. 8.8

La proporción de desechos  $\omega_0$ , calidad que el fabricante debe obtener si desea que sean pocas las devoluciones con el plan de muestreo convenido, recibe el nombre de «límite de calidad aceptable» y se representa con el símbolo AQL (*Acceptable Quality Level*). El plan de muestreo garantiza para esta calidad una casi-seguridad de aceptación.

La proporción de desechos  $\omega_1$ , calidad que el cliente considera inadmisibles, recibe el nombre de «calidad límite» y se representa con el símbolo LQ (*Limiting Quality*) o LTPD (*Lot Tolerance Percent Defective*). El plan de muestreo garantiza para esta calidad una casi-seguridad de rechazo.

Entre  $\omega_0$  y  $\omega_1$  se extiende una zona donde el plan de muestreo no es claramente determinante ni en uno ni en otro sentido. Dentro de ella, es especialmente interesante la calidad correspondiente a una probabilidad de aceptación del lote del 50 %. Dicha calidad recibe el nombre de porcentaje de indiferencia.

A veces, en el control final de fabricación o control de pre-expedición realizado por el fabricante, se procede de la siguiente forma:

— se examina el lote según un determinado plan de inspección por muestra;

— si el resultado del examen conduce a la aceptación, el lote pasa al almacén para su expedición;

— si el resultado del examen conduce al rechazo, el lote es inspeccionado al 100 %, sustituyéndose todas las piezas defectuosas encontradas por piezas buenas. De esta forma el lote pasa al almacén con todas sus piezas buenas.

En estas condiciones, si los lotes examinados contenían inicialmente una proporción  $\omega$  de desechos, la calidad final obtenida en el almacén será superior, es decir, la proporción final de desechos será inferior a  $\omega$ .

Dado un determinado plan de inspección por muestra, se puede trazar una curva que da en ordenadas la calidad media obtenida en el almacén después de la inspección, en función de la proporción de desechos original de la partida. Esta curva, denominada en la literatura anglosajona *AOQ Curve* (*Average Outgoing Quality Curve*), es de

trazado muy simple a partir de la curva de eficacia del plan de inspección. En efecto, si un lote contiene una proporción de desechos  $\omega$  (ver fig. 8.9), la probabilidad de

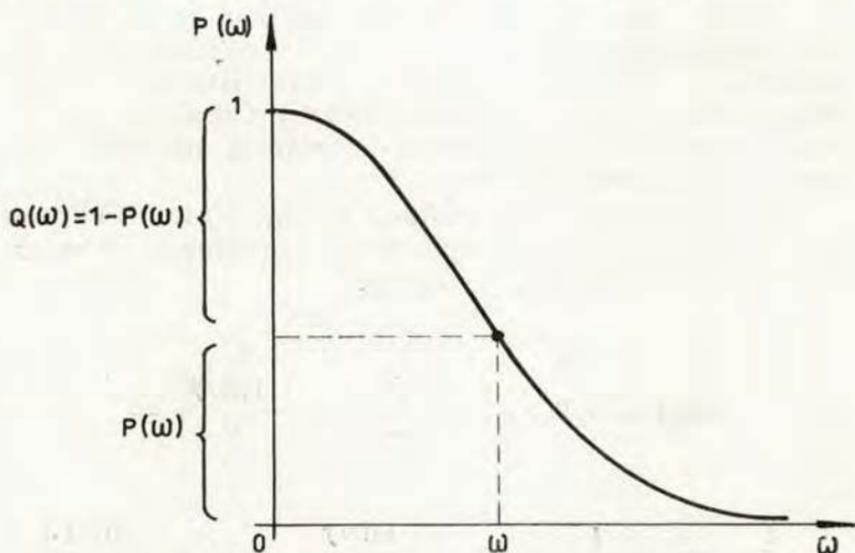


Fig. 8.9

proceder a su aceptación será  $P(\omega)$  y la de proceder a su rechazo  $Q(\omega) = 1 - P(\omega)$ . Como los lotes que son aceptados pasan sin más al almacén, mientras que los que son rechazados sufren una inspección al 100 % con sustitución de todas las piezas defectuosas por piezas buenas, la proporción media de desechos obtenida en el almacén tras el examen de un gran número de lotes será, evidentemente

$$AOQ = [1 - P(\omega)]0 + \omega P(\omega) = \omega P(\omega)$$

Así pues, el trazado de la curva AOQ puede realizarse a partir de la curva de eficacia del plan de inspección. Una curva AOQ tiene el aspecto indicado en la figura 8.10. Para  $\omega = 0$ , la curva AOQ empieza valiendo cero, que es la máxima calidad obtenible, y vuelve a valer cero cuando

$\omega = 1$ , toda vez que, en este caso, todos los lotes serían rechazados y todas sus piezas serían detectadas como defectuosas y sustituidas por piezas buenas. Entre estos dos extremos, la curva pasa por un máximo que corresponde a la calidad mínima garantizada por el plan de inspección. Esta proporción máxima de desechos o calidad límite obtenida en el almacén se representa en la literatura anglosajona con el símbolo AOQL (*Average Outgoing Quality Limit*) y es una característica del plan de muestreo que puede servir para definirlo.

Para determinar esta calidad media límite en el caso de un plan de inspección por muestreo simple, se puede partir de la expresión aproximada

$$\begin{aligned} \text{AOQ} &= \omega P(\omega) \approx \omega \sum_{i=0}^{c_A} e^{-n\omega} \frac{(n\omega)^i}{i!} = \\ &= \frac{1}{n} n\omega e^{-n\omega} \left[ 1 + n\omega + \frac{(n\omega)^2}{2!} + \dots + \frac{(n\omega)^{c_A}}{c_A!} \right] \end{aligned}$$

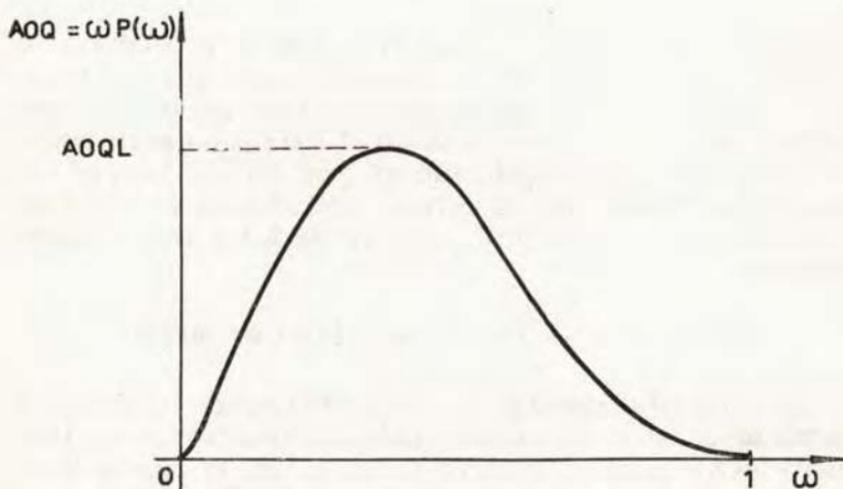


Fig. 8.10

Derivando la función nAOQ con respecto a  $n\omega$ , resulta

$$\frac{d(nAOQ)}{dn(\omega)} = P(\omega) - e^{-n\omega} \frac{(n\omega)^{c_A+1}}{c_A!}$$

Dado que esta derivada debe anularse en el máximo, puede escribirse finalmente que

$$\sum_{i=0}^{c_A} e^{-n\omega} \frac{(n\omega)^i}{i!} = e^{-n\omega} \frac{(n\omega)^{c_A+1}}{(c_A + 1)!} (c_A + 1)$$

expresión que permite determinar para cada valor de  $c_A$  el correspondiente valor  $n\omega$  y, en consecuencia, el valor del AOQL.

Como ejemplo de aplicación en la figura 8.11 se ha representado la curva AOQ correspondiente al plan de inspección por muestreo simple definido por los parámetros  $n = 100$  y  $c_A = 6$ .

En la tabla adjunta se dan los correspondientes valores de la función  $\omega P(\omega)$  para distintos valores de  $\omega$

$\omega$	$P(\omega)$	$\omega P(\omega)$
0.00	1.0000	0.0000
0.01	0.9999	0.0100
0.02	0.9959	0.0199
0.03	0.9688	0.0291
0.04	0.8936	0.0357
0.05	0.7660	0.0383
0.06	0.6064	0.0364
0.07	0.4443	0.0311
0.08	0.3032	0.0243
0.09	0.1940	0.0175
0.10	0.1172	0.0117
0.11	0.0672	0.0074
0.12	0.0367	0.0044
0.13	0.0192	0.0025
0.14	0.0097	0.0014
0.15	0.0047	0.0007

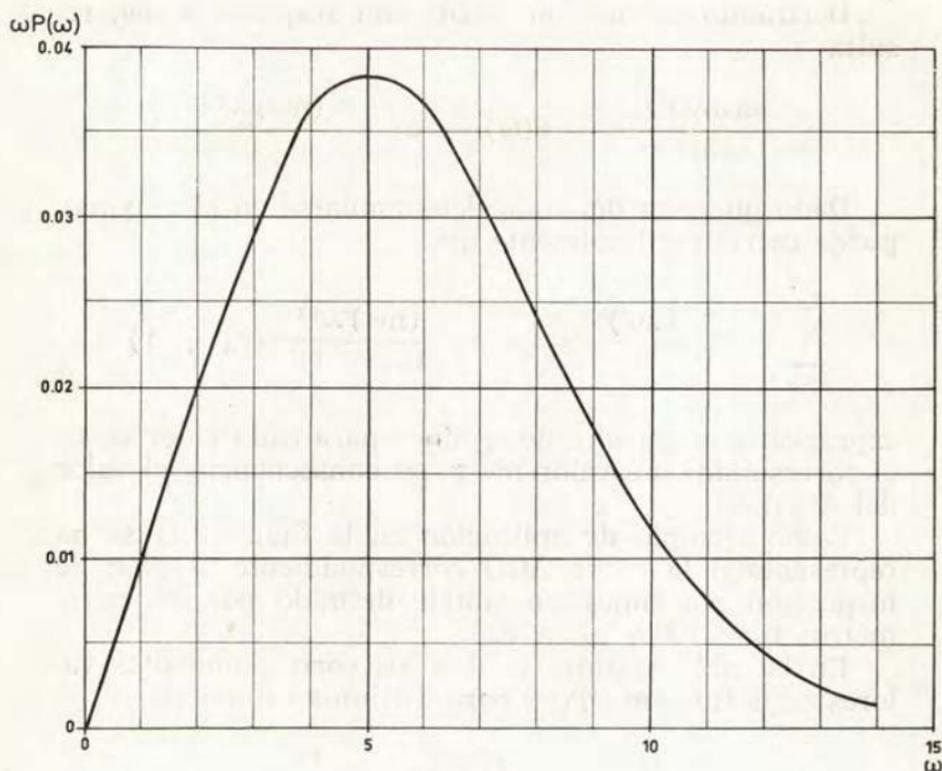


Fig. 8.11

En este caso el AOQL es igual a 3.83 % y se obtiene para un valor de la proporción de desechos original del 5 %, aproximadamente.

### 8.3.2 Planes de control cualitativo por muestreo doble

Los planes de control cualitativo por muestreo doble pueden ser caracterizados de la manera siguiente:

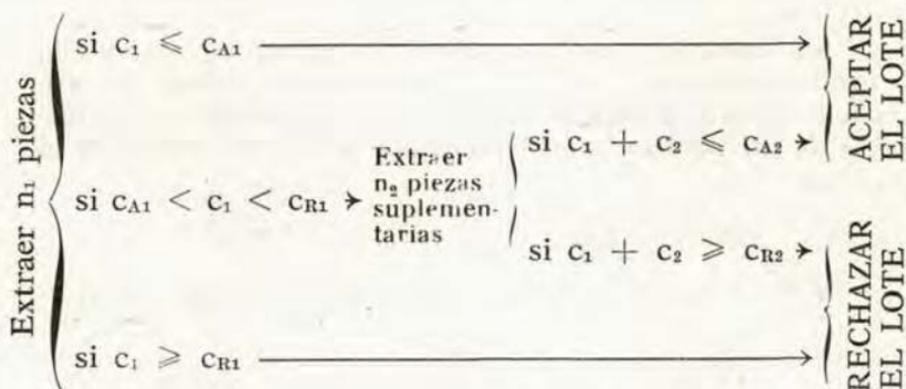
- se extrae una muestra de extensión  $n_1$  del lote (constituido por  $N$  unidades);
- si la muestra contiene un número de desechos  $c_1$  igual o inferior a  $c_{A1}$ , se acepta el lote;

— si la muestra contiene un número de desechos  $c_1$  igual o superior a  $c_{R1} > c_{A1} + 1$ , se rechaza el lote;

— si la muestra contiene un número de desechos  $c_1$  comprendido entre  $c_{A1}$  y  $c_{R1}$ , se procede a la extracción de una segunda muestra de extensión  $n_2$  del lote restante (constituido por  $N - n_1$  unidades);

— si esta segunda muestra contiene un número de desechos  $c_2$  tal que  $c_1 + c_2 \leq c_{A2}$ , se acepta el lote; si  $c_1 + c_2 \geq c_{R2} = c_{A2} + 1$ , se rechaza el lote.

Esta regla operativa puede esquematizarse en la forma siguiente:



En estas condiciones, los lotes de calidad muy buena serán en general aceptados y los de calidad muy mala rechazados, sin tener que recurrir a la extracción de la segunda muestra. Para los lotes de calidad intermedia será necesario, en general, proceder a la extracción de la muestra suplementaria. Esto supone una considerable ventaja con respecto a los planes de muestreo simple. En efecto, un plan de muestreo doble permite, en promedio, decidir la aceptación o el rechazo del lote tras el examen de un número de piezas generalmente inferior al que se precisaría con un plan de muestreo simple que ofreciese los mismos niveles de protección para el fabricante y el cliente. Otra ventaja de los planes de muestreo doble, de carácter puramente psicológico, es que aparentemente dan a los lotes de calidad incierta una nueva

posibilidad de ser aceptados, lo que constituye un ali-  
ciente para el fabricante. Sin embargo, los planes de  
muestreo doble presentan algunos inconvenientes. Su  
puesta a punto y realización es desde luego más difícil  
que la de los planes de muestreo simple. Además, la  
carga de trabajo de los controladores es variable.

En el caso de un plan de muestreo doble, no es posi-  
ble dar fórmulas simples que permitan determinar, a  
partir de unas condiciones de eficacia preestablecidas  
( $\omega_0, 1 - \alpha$ ) y ( $\omega_1, \beta$ ), los tamaños  $n_1$  y  $n_2$  de las mues-  
tras a extraer en la primera y segunda fases del mues-  
treo, y los valores límites para la aceptación o el rechazo  
del lote.

Sin embargo, dados *a priori*  $n_1, n_2, c_{A1}, c_{R1}, c_{A2}$  y  $c_{R2}$ ,  
la determinación de la correspondiente curva de efica-  
cia no ofrece dificultad. En efecto, la función de efica-  
cia de un plan de muestreo doble puede escribirse en la  
forma

$$P(\omega) = P_r\{c_1 \leq c_{A1} \mid n_1; \omega\} + P_r\{c_1 + \\ + c_2 \leq c_{A2} \mid c_{A1} < c_2 < c_{R1}; n_2; \omega\} = P_r\{c_1 \leq c_{A1} \mid n_1; \omega\} + \\ + \sum_{c_1=c_{A1}+1}^{c_{R1}-1} P_r\{c_1 \mid n_1; \omega\} P_r\{c_2 \leq c_{A2} - c_1 \mid n_2; \omega\}$$

El primer sumando del segundo miembro es la proba-  
bilidad de aceptar el lote en la primera fase del mues-  
treo. El segundo sumando es la probabilidad de aceptar  
el lote en la segunda fase del muestreo.

Así pues, la curva de eficacia vendrá definida por la  
expresión

$$P(\omega) = \sum_{c_1=0}^{c_{A1}} C_{n_1}^{-1} \omega^{c_1} (1 - \omega)^{n_1 - c_1} + \\ + \sum_{c_1=c_{A1}+1}^{c_{R1}-1} \left\{ C_{n_1}^{-1} \omega^{c_1} (1 - \omega)^{n_1 - c_1} \sum_{c_2=0}^{c_{A2}-c_1} C_{n_2}^{-2} \omega^{c_2} (1 - \omega)^{n_2 - c_2} \right\}$$

El cálculo  $P(\omega)$  puede realizarse haciendo uso de la aproximación de Poisson. Los errores cometidos son despreciables desde el punto de vista práctico.

Dada la estructura de un plan de muestreo doble, puede ocurrir que un lote determinado sea aceptado o rechazado durante la primera fase del muestreo o que, por el contrario, sea preciso pasar a la segunda fase del muestreo antes de adoptar una decisión. El tamaño de la muestra a examinar es, pues, en cada caso una variable aleatoria que puede adoptar los valores  $n_1$  ó  $n_1 + n_2$ . Su esperanza matemática, o valor medio, será

$$\begin{aligned} \bar{n}(\omega) &= n_1 P_r\{C_{A1} < c < c_{R1} \mid n_1; \omega\} + \\ &+ (n_1 + n_2) [1 - P_r\{C_{A1} < c < c_{R1} \mid n_1; \omega\}] = \\ &= n_1 + n_2 P_r\{C_{A1} < c < c_{R1} \mid n_1; \omega\} = \\ &= n_1 + n_2 \sum_{c_{A1}+1}^{c_{R1}-1} C_{n_1}^c \omega^c (1 - \omega)^{n_1-c} \end{aligned}$$

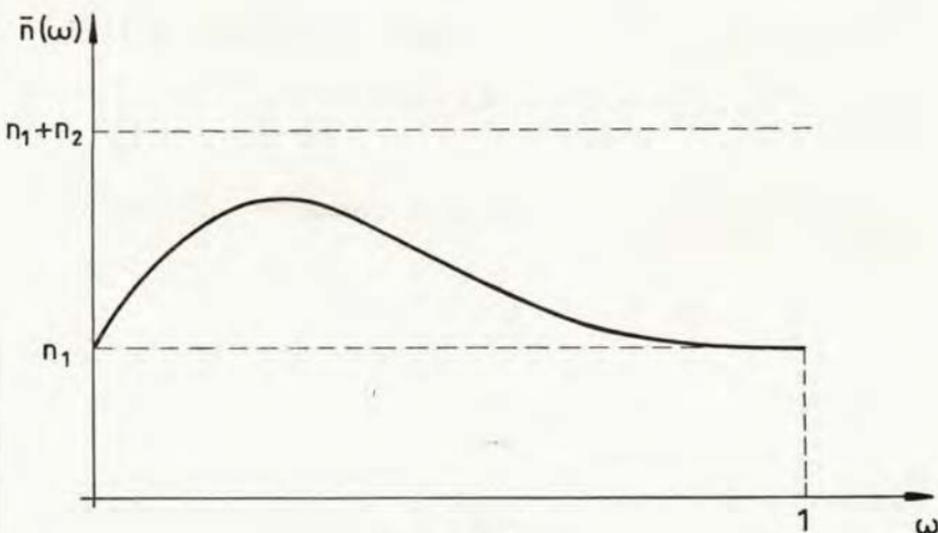


Fig. 8.12

La representación gráfica de la función  $\bar{n}(\omega)$  recibe el nombre de curva de extracciones medias y tiene el aspecto indicado en la figura 8.12.

La curva pasa evidentemente por los puntos de coordenadas  $(0, n_1)$  y  $(1, n_1)$  y se mantiene siempre por debajo de la horizontal  $n_1 + n_2$ .

Como ejemplo de aplicación, supongamos un plan de muestreo doble definido por los parámetros:  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$ ,  $c_{A1} = 1$ ,  $c_{R1} = 6$ ,  $c_{A2} = 5$ ,  $c_{R2} = 6$ . En este caso la regla operativa puede esquematizarse en la forma que se indica en la página 399.

En consecuencia, la función de eficacia deberá escribirse en la forma

$$\begin{aligned}
 P(\omega) &= P_r\{c_1 \leq 1 \mid 50; \omega\} + \\
 &+ \sum_{c_1=2}^5 P_r\{c_1 \mid 50; \omega\} P_r\{c_2 \leq 5 - c_1 \mid 100; \omega\} = \\
 &= P_1(50, \omega, 1) + p_1(50, \omega, 2)P_2(100, \omega, 3) + \\
 &+ p_1(50, \omega, 3)P_2(100, \omega, 2) + p_1(50, \omega, 4)P_2(100, \omega, 1) + \\
 &+ p_1(50, \omega, 5)P_2(100, \omega, 0)
 \end{aligned}$$

expresión en la que los símbolos utilizados tienen el siguiente significado

$$p(n, \omega, c) = C^c \omega^c (1 - \omega)^{n-c}$$

$$P(n, \omega, c) = \sum_{i=0}^c C_n^i \omega^i (1 - \omega)^{n-i}$$

Por otra parte, la correspondiente curva de extracciones medias, vendrá definida por la expresión

$n_1 = 50$	}	$c_1 = 2, 3, 4 \text{ ó } 5 \longrightarrow n_2 = 100$	$c_1 = 0 \text{ ó } 1$	Aceptar	
			$c_1 = 2$	$c_2 = 0, 1, 2 \text{ ó } 3$	Aceptar
				$c_2 = 4 \text{ ó } \text{más}$	Rechazar
			$c_1 = 3$	$c_2 = 0, 1 \text{ ó } 2$	Aceptar
				$c_2 = 3 \text{ ó } \text{más}$	Rechazar
			$c_1 = 4$	$c_2 = 0 \text{ ó } 1$	Aceptar
$c_2 = 2 \text{ ó } \text{más}$	Rechazar				
$c_1 = 5$	$c_2 = 0$	Aceptar			
	$c_2 = 1 \text{ ó } \text{más}$	Rechazar			
		$c_1 = 6 \text{ ó } \text{más}$	Rechazar		

$$\bar{n}(\omega) = n_1 + n_2 [p_1(50, \omega, 2) + p_1(50, \omega, 3) + p_1(50, \omega, 4) + p_1(50, \omega, 5)] = n_1 + n_2 [P_1(50, \omega, 5) - P_1(50, \omega, 1)]$$

En la tabla adjunta se da el esquema de cálculo de las curvas de eficacia, AQL y de extracciones medias, haciendo uso de la aproximación de Poisson para el cálculo de las probabilidades. Dichas curvas se han representado gráficamente en las figuras 8.13, 8.14 y 8.15.

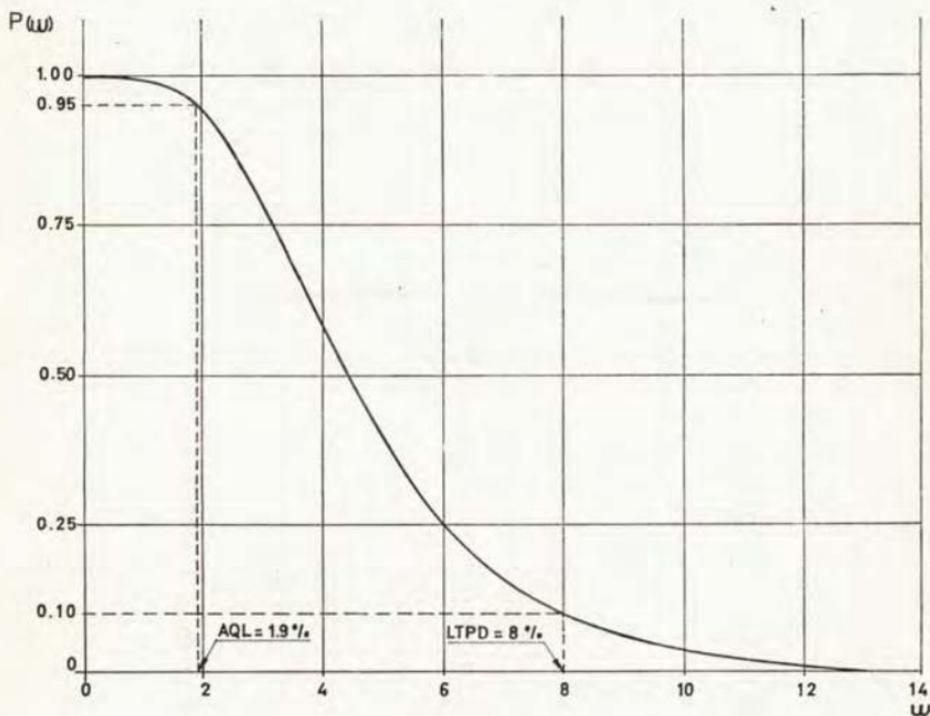


Fig. 8.13

Para pasar de este plan de muestreo doble a un plan de muestreo simple que ofrezca los mismos niveles de protección, bastará determinar gráficamente, a partir de la curva de eficacia, los valores  $\omega$  correspondientes a  $P(\omega) = 0.95$  ( $\omega_0 = \text{AQL}$ ) y a  $P(\omega) = 0.10$  ( $\omega_1 = \text{LTPD}$ ). En nuestro caso resulta

$\lambda_1 = n_1\omega$	0.5	1	2	3	4	5	6	7	
$\omega$	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	
$\lambda_2 = n_2\omega$	1	2	4	6	8	10	12	14	
$\lambda_1$	$^*P_1(1)$	0.9098	0.7358	0.4060	0.1992	0.0916	0.0404	0.0174	0.0073
	$p_1(2)$	0.0758	0.1839	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223
	$p_1(3)$	0.0126	0.0613	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521
	$p_1(4)$	0.0016	0.0153	0.0902	0.1680	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912
	$p_1(5)$	0.0002	0.0031	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277
$\lambda_2$	$P_2(3)$	0.9810	0.8572	0.4335	0.1512	0.0423	0.0104	0.0023	0.0005
	$P_2(2)$	0.9197	0.6767	0.2381	0.0620	0.0137	0.0028	0.0005	0.0001
	$P_2(1)$	0.7358	0.4060	0.0916	0.0174	0.0030	0.0005	0.0001	0.0000
	$P_2(0)$	0.3679	0.1353	0.0183	0.0025	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$^*p_1(2)P_2(3)$	0.0744	0.1576	0.1173	0.0339	0.0062	0.0009	0.0001	0.0000	
$^*p_1(3)P_2(2)$	0.0116	0.0415	0.0430	0.0139	0.0027	0.0004	0.0000	0.0000	
$^*p_1(4)P_2(1)$	0.0012	0.0062	0.0083	0.0029	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	
$^*p_1(5)P_2(0)$	0.0001	0.0004	0.0007	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
$P(\omega)$	0.9970	0.9416	0.5752	0.2501	0.1011	0.0418	0.0175	0.0073	
$\omega P(\omega)$	0.0100	0.0188	0.0230	0.0150	0.0081	0.0042	0.0021	0.0010	
$P_1(5)$	1.0000	0.9994	0.9835	0.9160	0.7852	0.6160	0.4457	0.3006	
$P_1(5) - P_1(1)$	0.0902	0.2636	0.5775	0.7168	0.6936	0.5756	0.4283	0.2933	
$\bar{n}(\omega)$	59.02	76.36	107.75	121.68	119.36	107.56	92.83	79.33	

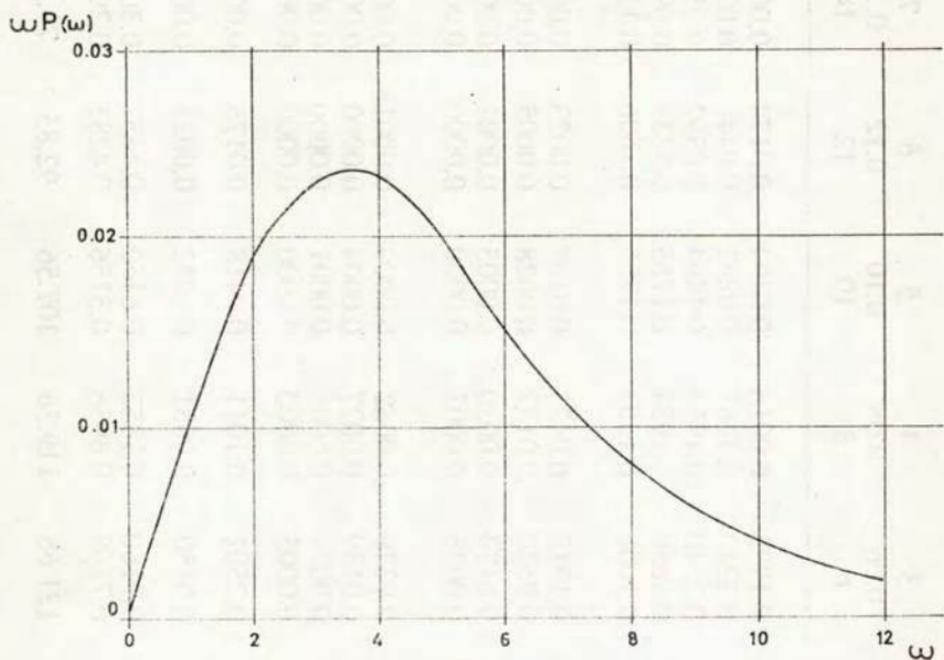


Fig. 8.14

$$\omega_0 = \text{AQL} = 1.9 \%$$

$$\omega_1 = \text{LTPD} = 8 \%$$

En consecuencia

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{8}{1.9} = 4.21$$

Acudiendo a la tabla 18 se encuentra, para  $\omega_1/\omega_0 = 4, 21$ , que:

$$c_A = 4$$

$$n = \frac{1.970}{0.019} = 104$$

que son los parámetros del plan de muestreo simple equivalente.

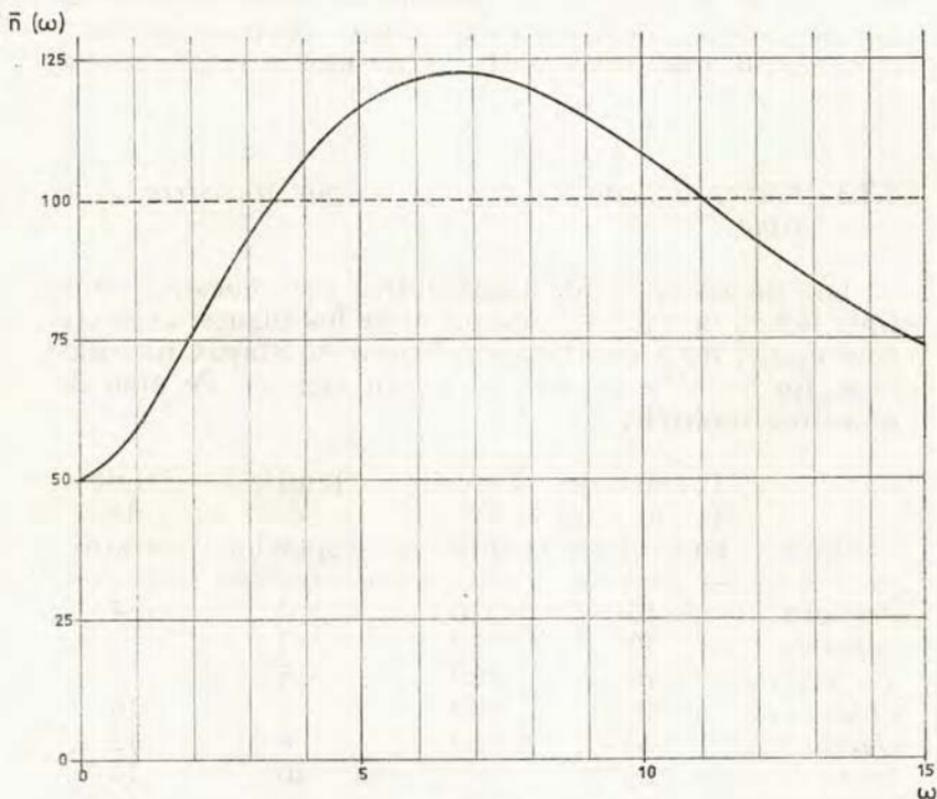


Fig. 8.15

De la observación de la figura 8.15 se deduce inmediatamente que el plan de muestreo doble objeto de análisis permite llegar, en promedio, a la aceptación o rechazo del lote tras el examen de un número de piezas inferior al necesario en el plan de muestreo simple equivalente, siempre y cuando la calidad del lote sea muy buena ( $\omega < 3.5\%$ ) o muy mala ( $\omega > 11\%$ ). Por el contrario, para calidades intermedias el plan de muestreo doble estudiado requiere el examen de un número de piezas superior.

Estas conclusiones sólo son válidas para el caso particular estudiado. En otros casos se comprueba que el plan de muestreo doble exige, sea cual fuere la calidad

del lote, el examen de un número de piezas inferior al que sería preciso extraer en el caso de un plan de muestreo simple que garantizase los mismos niveles de protección.

### 8.3.3 Planes de control cualitativo por muestreo múltiple

Los planes de control cualitativo por muestreo múltiple tienen la misma estructura que los planes de muestreo doble, pero con mayor número de etapas intermedias. En la tabla adjunta se da un ejemplo de plan de muestreo múltiple.

Etapa	Tamaño de la muestra en la etapa	Tamaño total de la muestra	Límite de aceptación	Límite de rechazo
Primera ...	10	10	0	4
Segunda ...	10	20	3	6
Tercera ....	10	30	5	8
Cuarta .....	10	40	6	10
Quinta .....	10	50	8	12
Sexta .....	10	60	10	14
Séptima ...	10	70	13	14

En este caso se empieza extrayendo una muestra de 10 elementos. Si no se encuentra ningún desecho, el lote es aceptado. Si el número de desechos encontrado es igual o superior a 4, el lote es rechazado. Si el número de desechos es igual a 1, 2 ó 3, debe procederse a la extracción de una segunda muestra de 10 elementos. Si el número total de desechos contenido en la muestra de 20 elementos es igual o inferior a 3, el lote es aceptado; si es igual o superior a 6, el lote es rechazado y, si es igual a 4 ó 5, se procede a la extracción de una tercera muestra de 10 elementos, y así sucesivamente. Si es preciso, puede llegarse a la extracción de una séptima muestra de 10 elementos. Entonces, si el número total de desechos encontrado en la muestra de 70 elementos es igual o in-

ferior a 13, el lote es aceptado y, en caso contrario, rechazado.

En este tipo de control, el número de etapas y, en consecuencia, el efectivo total de la muestra a examinar antes de deducir la aceptación o el rechazo del lote es indeterminado *a priori*, pero inferior en promedio al efectivo que se necesitaría en un plan de muestreo simple o doble que ofreciese los mismos niveles de protección. Esta ventaja es importante cuando el coste unitario de control es elevado, tal como ocurre en aquellos casos en que el examen de una pieza implica su destrucción. En contrapartida, los planes de control por muestreo múltiple tienen algunos inconvenientes. En efecto, su realización práctica y puesta a punto es mucho más compleja que la de un plan por muestreo simple o doble, el personal encargado del control debe ser muy cualificado, la carga de trabajo de los controladores es difícil de prever y la duración del control es bastante larga, lo que exige que los lotes deban estar a disposición de los controladores durante mucho tiempo, cosa que en algunos casos resulta imposible.

#### 8.3.4 Planes de control cualitativo por muestreo progresivo o secuencial

Una extensión lógica de las pruebas de hipótesis por muestreo doble o múltiple lo constituyen las pruebas de hipótesis por muestreo progresivo o secuencial.

En una prueba secuencial de la hipótesis  $H_0$  contra la hipótesis  $H_1$ , no se fija *a priori* el tamaño de la muestra, sino que se van extrayendo uno a uno los elementos de la población y, al final de cada extracción, se aplica una regla que permite adoptar una de las siguientes decisiones:

- aceptar la hipótesis  $H_0$ ;
- rechazar la hipótesis  $H_0$ ;
- efectuar una extracción suplementaria.

En las pruebas secuenciales la extensión total de la muestra a inspeccionar es una variable aleatoria, cuyo

valor medio es siempre inferior al efectivo de la muestra que se precisaría en el caso de una prueba por muestreo simple o múltiple que garantizase los mismos niveles de protección, es decir, que tuviese la misma curva de eficacia.

Las pruebas secuenciales están basadas en la teoría de Wald, la cual pasamos a exponer de forma sumaria.

Sea  $x$  una variable aleatoria de función densidad de probabilidad  $f(x, \theta)$ , cuyo parámetro desconocido  $\theta$  supondremos igual a  $\theta_0$  bajo la hipótesis  $H_0$  e igual a  $\theta_1$  bajo la hipótesis  $H_1$ , y  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  una muestra aleatoria de extensión  $n$  de la citada variable.

Las probabilidades de obtener dicha muestra bajo las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  serán, respectivamente:

$$P_{0, n} = f(x_1, \theta_0)f(x_2, \theta_0) \dots f(x_n, \theta_0)dx_1dx_2 \dots dx_n$$

y

$$P_{1, n} = f(x_1, \theta_1)f(x_2, \theta_1) \dots f(x_n, \theta_1)dx_1dx_2 \dots dx_n$$

o lo que es lo mismo

$$P_{0, n} = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_0)dM = L_{0, n}dM$$

y

$$P_{1, n} = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1)dM = L_{1, n}dM$$

siendo  $L_{0, n}$  y  $L_{1, n}$  las verosimilitudes de la muestra  $M$  bajo las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  respectivamente.

La idea fundamental de las pruebas secuenciales consiste en formar en cada etapa de las extracciones la razón de las probabilidades  $P_{1, n}/P_{0, n}$ , o lo que es lo mismo, la razón de las verosimilitudes  $L_{1, n}/L_{0, n}$ . Si este cociente es muy grande, querrá decir que  $H_1$  da a la muestra una probabilidad mucho mayor que  $H_0$  y, en consecuencia, que  $H_0$  deberá ser rechazada. Por el contrario, si el cociente es muy pequeño, querrá decir que  $H_0$  da a la muestra una probabilidad mucho mayor que  $H_1$  y, en consecuencia,  $H_0$  deberá ser aceptada. Si el cociente está comprendido entre ciertos límites, no será posible decidir la aceptación o el rechazo de  $H_0$  por carecer de información suficiente y, en consecuencia, será preciso efectuar una observación suplementaria.

Así pues, una prueba secuencial consistirá en formar al término de cada extracción unitaria la razón  $L_{1, n}/L_{0, n}$  y comparar luego el valor de esta razón con dos números  $A$  y  $B$  (siendo  $B < A$ ). Entonces:

— si  $(L_{1, n}/L_{0, n}) \geq A$ ; se rechaza  $H_0$ ;

— si  $(L_{1, n}/L_{0, n}) \leq B$ , se acepta  $H_0$ ;

— si  $B < (L_{1, n}/L_{0, n}) < A$ , se procede a la realización de la observación  $n + 1$  y se aplica la misma regla al nuevo cociente

$$\frac{L_{1, n+1}}{L_{0, n+1}}$$

En la práctica, suele ser más cómodo considerar el logaritmo de la razón de verosimilitudes

$$\begin{aligned} \log \frac{L_{1, n}}{L_{0, n}} &= \log \frac{f(x_1, \theta_1)}{f(x_1, \theta_0)} + \log \frac{f(x_2, \theta_1)}{f(x_2, \theta_0)} + \dots + \\ &+ \log \frac{f(x_n, \theta_1)}{f(x_n, \theta_0)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned}$$

En estas condiciones, la regla de decisión será:

— si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq \log A$ , rechazar  $H_0$ ;

— si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq \log B$ , aceptar  $H_0$ ;

— si  $\log B < \sum_{i=1}^n \lambda_i < \log A$ , efectuar una extracción

suplementaria y aplicar la misma regla de decisión al nuevo sumatorio

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$$

Para determinar los parámetros A y B basta fijar los riesgos  $\alpha$  y  $\beta$  asociados a las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$ , es decir, basta fijar dos puntos  $(\theta_0, 1 - \alpha)$  y  $(\theta_1, \beta)$  de la curva de eficacia de la prueba.

Sea  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una muestra aleatoria tal que

$$B < (L_{1, n-1}/L_{0, n-1}) < A$$

$$(L_{1, n}/L_{0, n}) \leq B$$

es decir, una muestra que conduce a la aceptación de la hipótesis  $H_0$ . De tal muestra diremos que es de tipo 0.

Sea, análogamente,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una muestra aleatoria tal que

$$B < (L_{1, n-1}/L_{0, n-1}) < A$$

$$(L_{1, n}/L_{0, n}) \geq A$$

es decir, una muestra que conduce al rechazo de la hipótesis  $H_0$  y, en consecuencia, a la aceptación de la hipótesis  $H_1$ . De tal muestra diremos que es de tipo 1.

Evidentemente, para cualquier muestra de tipo 1 se verifica que la probabilidad de obtenerla bajo la hipótesis  $H_1$  es al menos A veces superior a la probabilidad de obtenerla bajo la hipótesis  $H_0$ . Ahora bien, la probabilidad de que la prueba secuencial termine con la aceptación de  $H_1$  debe ser, por definición,  $\alpha$  bajo la hipótesis  $H_0$  y  $1 - \beta$  bajo la hipótesis  $H_1$ . En consecuencia, debe cumplirse necesariamente que

$$1 - \beta \geq A\alpha$$

o lo que es lo mismo

$$A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

De forma análoga, razonando sobre una muestra de tipo 0, es decir, una muestra que conduce a la aceptación de la hipótesis  $H_0$ , se obtendría la condición

$$B \geq \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

Así pues  $(1 - \beta)/\alpha$  y  $\beta/(1 - \alpha)$  son los límites superior e inferior de los verdaderos valores de A y B respectivamente.

La determinación exacta de A y B en función de  $\alpha$  y  $\beta$  es bastante complicada y carece de interés. Wald ha demostrado que tomando

$$A \approx \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

y

$$B \approx \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

se obtiene prácticamente la misma protección contra las decisiones erróneas que tomando los valores exactos de A y B, con un pequeñísimo aumento del número de observaciones a efectuar.

Evidentemente, la extensión de la muestra en una prueba secuencial es una variable aleatoria. Si a una población determinada se le aplica repetidas veces un mismo plan de inspección secuencial, las decisiones en torno a la validez de la hipótesis  $H_0$  se tomarán tras el examen de un número de piezas que, en general, será distinto para cada una de las repeticiones efectuadas.

De cara a establecer comparaciones con otras pruebas y prever el coste esperado de un plan de inspección secuencial, es interesante estudiar el valor medio de la ex-

tensión de la muestra para cada valor posible del parámetro desconocido,  $\bar{n}(\theta)$ .

Se demuestra que dicho valor medio puede calcularse en la práctica, de forma muy aproximada, a partir de la expresión

$$\bar{n}(\theta) = \frac{\log \frac{1 - \beta}{\alpha} - P(\theta) \left[ \log \frac{1 - \beta}{\alpha} + \log \frac{1 - \alpha}{R} \right]}{\lambda(\theta)}$$

en la que  $P(\theta)$  es el valor de la función de eficacia de la prueba, es decir, la ordenada de la curva de eficacia, correspondiente a la abscisa  $\theta$ , y  $\bar{\lambda}(\theta)$  el valor medio del logaritmo de la razón de verosimilitudes cuando el verdadero valor del parámetro desconocido es  $\theta$ .

Expuesta de forma esquemática la teoría general de Wald, pasemos a estudiar su aplicación concreta al caso de un plan de control cualitativo, con las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$ .

Supongamos que se desea inspeccionar una serie de lotes de piezas de forma que exista una probabilidad  $\alpha$  de rechazar aquellos lotes cuya proporción de desechos sea igual a  $\omega_0$ , y una probabilidad  $\beta$  de aceptar aquellos lotes cuya proporción de desechos sea igual a  $\omega_1$ .

Sea  $x_i$  el resultado de una extracción unitaria. Los posibles valores de  $x_i$  serán

$$\begin{aligned} x &= 0 \text{ si la pieza es buena, y} \\ x &= 1 \text{ si la pieza es mala.} \end{aligned}$$

De esta forma, al cabo de  $n$  extracciones unitarias no exhaustivas, el número total de piezas defectuosas encontrado será

$$c_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

Si  $\omega$  es la proporción real de desechos contenida en

un lote, la probabilidad de obtener los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en el orden indicado será

$$\omega^{c_n}(1 - \omega)^{n-c_n}$$

En consecuencia, para las hipótesis  $H_0: \omega = \omega_0$  y  $H_1: \omega = \omega_1$ , será posible escribir

$$P_{0, n} = \omega_0^{c_n}(1 - \omega_0)^{n-c_n}$$

$$P_{1, n} = \omega_1^{c_n}(1 - \omega_1)^{n-c_n}$$

y la razón de verosimilitudes será

$$\frac{P_{1, n}}{P_{0, n}} = \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^{c_n} \left( \frac{1 - \omega_1}{1 - \omega_0} \right)^{n-c_n}$$

Así pues, un plan de inspección cualitativa por muestreo secuencial podrá ser caracterizado de la forma siguiente:

Sea  $c_{n-1}$  el número de desechos encontrado al cabo de la extracción de  $n - 1$  piezas tras cuyo examen se ha tomado siempre la decisión de proceder a la extracción de una pieza suplementaria, es decir, para las cuales siempre se ha verificado que

$$\frac{\beta}{1 - \alpha} < \frac{P_{1, i}}{P_{0, i}} < \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (1 \leq i \leq n - 1)$$

Sea  $c_n$  el número total de desechos encontrado tras la extracción de la pieza número  $n$  ( $c_n$  puede ser igual a  $c_{n-1}$  ó a  $c_{n-1} + 1$ ).

En estas ecuaciones:

— si

$$\left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^{c_n} \left( \frac{1 - \omega_1}{1 - \omega_0} \right)^{n-c_n} \geq \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

el lote debe ser rechazado;

$$- \text{ si } \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^{c_n} \left( \frac{1 - \omega_1}{1 - \omega_0} \right)^{n - c_n} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

el lote debe ser aceptado;

$$- \text{ si } \frac{\beta}{1 - \alpha} < \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^{c_n} \left( \frac{1 - \omega_1}{1 - \omega_0} \right)^{n - c_n} < \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

debe procederse a la extracción de una pieza suplementaria.

Es mucho más cómodo establecer la prueba en función del logaritmo de la razón de verosimilitudes. En efecto, por transformación logarítmica, las tres desigualdades precedentes pueden escribirse en la forma:

$$c_n \geq \frac{\log \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}} + \frac{\log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}} n = h_2 + sn$$

$$c_n \leq - \frac{\log \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}} + \frac{\log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}} n = -h_1 + sn$$

$$-h_1 + sn < c_n < h_2 + sn$$

donde

$$h_1 = \frac{\log \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}}$$

$$h_2 = \frac{\log \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}}$$

$$s = \frac{\log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}}$$

La regla de decisión podrá, pues, ser enunciada en la forma siguiente:

— aceptar el lote si  $c_n$  es igual o inferior a

$$c_{An} = -h_1 + sn$$

— rechazar el lote si  $c_n$  es igual o superior a

$$c_{Rn} = h_2 + sn$$

— efectuar una extracción suplementaria si

$$c_{An} < c_n < c_{Rn}$$

Un plan de inspección por muestreo secuencial puede ser representado gráficamente mediante dos rectas paralelas (ver fig. 8.16), la recta de aceptación  $c_{An} = -h_1 + sn$  y la recta de rechazo  $c_{Rn} = h_2 + sn$ .

$c_n$                        $h_2$                        $-h_1$                        $h_1/S$                        $n$

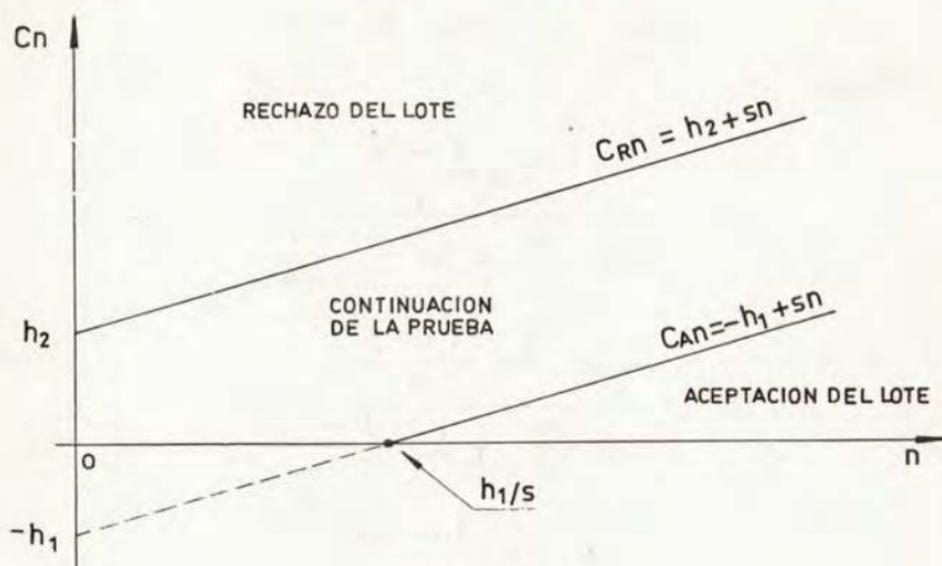


Fig. 8.16

El trazado de estas rectas se facilita mucho determinando el punto de corte de la recta de aceptación con el eje horizontal. La abscisa de dicho punto se halla a una distancia

$$\frac{h_1}{s} = \frac{\log \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}}$$

del origen y tiene un significado muy claro; es el número de extracciones a efectuar antes de poder decidir la aceptación de un lote cuya proporción de piezas defectuosas sea realmente nula.

Determinado el valor  $h_1/s$ , para representar gráficamente la prueba basta trazar una recta que pase por los puntos  $(0, -h_1)$  y  $(h_1/s, 0)$  y otra recta paralela a ella que pase por el punto  $(0, h_2)$ . Dado que  $n$  y  $c_n$  son de órdenes de magnitud muy diferentes, conviene usar distintas escalas para los ejes de abscisas y de ordenadas.

En cada etapa de las extracciones bastará dibujar sobre el gráfico de rectas inclinadas el punto  $(n, c_n)$  representativo de todas las observaciones efectuadas hasta el momento. Si dicho punto sobrepasa la recta  $c_{Rn}$ , el lote será rechazado; si se sitúa bajo la recta  $c_{An}$ , el lote será aceptado y si queda comprendido entre  $c_{Rn}$  y  $c_{An}$ , deberá efectuarse una extracción suplementaria.

Los gráficos de rectas inclinadas, aunque tienen la indudable ventaja de dar en todo momento una imagen de la marcha del muestreo, son de construcción y manipulación molestas. A veces resulta más práctico representar la regla de decisión en forma de una tabla que dé numéricamente los valores del par  $(n, c_n)$  que autorizan al rechazado o a la aceptación del lote. Para el establecimiento de dicha tabla, lo más cómodo es despejar  $n$  de las ecuaciones de las rectas de rechazo y aceptación

$$n = \frac{c_n - h_2}{s} \quad (\text{Rechazo})$$

$$n = \frac{c_n - h_1}{s} \quad (\text{Aceptación})$$

Dando a  $c_n$  los valores 0, 1, 2, ..., se obtienen los correspondientes valores de  $n$  a partir de los cuales se puede rechazar o aceptar el lote.

Otra manera de evitar las dificultades que supone el manejo de las rectas inclinadas, es convertirlas en horizontales mediante un cambio en la forma de representar los puntos muestrales. En efecto, en los gráficos de rectas inclinadas, por cada pieza buena hay que avanzar una unidad según el eje horizontal y por cada pieza mala hay que avanzar una unidad según el eje horizontal y subir otra unidad según el eje vertical. Por otra parte, las rectas suben  $s$  unidades en sentido vertical por cada unidad avanzada en sentido horizontal. En consecuencia, si tales rectas se dibujasen horizontales, las reglas de representación de los puntos deberían ser las siguientes:

— pieza buena: avanzar una unidad y bajar  $s$  unidades;

— pieza mala: avanzar una unidad y subir 1 — s unidades.

Torrens<sup>1</sup> propone simplificar el trazado de los gráficos de rectas horizontales escogiendo como medio de dibujo el papel milimetrado y adoptando como escala de ordenadas  $m = 1/s$  milímetros por unidad, redondeando el resultado al entero más próximo. Entonces las rectas horizontales deben trazarse a distancias del origen medidas en milímetros

$$\begin{aligned} H &= mh_1 \\ H &= mh_2 \end{aligned}$$

Cada pieza buena hará bajar un milímetro y cada pieza mala subir  $m - 1$  milímetros.

No existen fórmulas simples que permitan obtener la probabilidad de aceptación del lote para los distintos valores posibles de la proporción de desechos. En general, debe recurrirse al empleo de ecuaciones paramétricas de cálculo muy enojoso. En efecto, de las expresiones matemáticas de  $h_1$ ,  $h_2$ , y  $s$  se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha}{\beta} &= \left[ \frac{\omega_1(1 - \omega_0)}{\omega_c(1 - \omega_1)} \right]^{h_1} \\ \frac{1 - \beta}{\alpha} &= \left[ \frac{\omega_1(1 - \omega_0)}{\omega_c(1 - \omega_1)} \right]^{h_2} \\ \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1} &= \left[ \frac{\omega_1(1 - \omega_0)}{\omega_c(1 - \omega_1)} \right]^s \end{aligned}$$

Para una proporción de desechos  $\omega$ , las expresiones anteriores deberán ser escritas en la forma:

$$\frac{1 - \alpha}{P(\omega)} = \left[ \frac{\omega(1 - \omega_0)}{\omega_c(1 - \omega)} \right]^{h_1}$$

<sup>1</sup> J. Mothes y J. Torrens-Ibern: *Estadística Aplicada a la Ingeniería*, Editorial Ariel, pág. 197.

$$\frac{1 - P(\omega)}{\alpha} = \left[ \frac{\omega(1 - \omega_0)}{\omega_0(1 - \omega)} \right]^{h_2}$$

$$\frac{1 - \omega_0}{1 - \omega} = \left[ \frac{\omega(1 - \omega_0)}{\omega_0(1 - \omega)} \right]^s$$

Efectuando el cambio de variable

$$x = \frac{\omega_0(1 - \omega)}{\omega(1 - \omega_0)}$$

las tres ecuaciones precedentes se reducen al sistema

$$\omega = \frac{x^s - 1}{x - 1}$$

$$P(\omega) = \frac{x^{h_1+h_2} - x^{h_1}}{x^{h_1+h_2} - 1}$$

que es la representación paramétrica de la función de eficacia. Dando valores al parámetro  $x$ , pueden obtenerse parejas de valores  $[\omega, P(\omega)]$  que permiten el trazado por puntos de la curva de eficacia. Dado que  $\omega$  puede variar entre 1 y 0, el parámetro  $x$  puede variar entre 0 e  $\infty$ .

Puede obtenerse una idea bastante aproximada de la forma de la curva de eficacia representando tan sólo los cinco puntos siguientes (ver fig. 8.17)

$\omega = 0$	$P(0) = 1$
$\omega = \omega_0$	$P(\omega_0) = 1 - \alpha$
$\omega = s$	$P(s) = h_2/(h_1 + h_2)$
$\omega = \omega_1$	$P(\omega_1) = \beta$
$\omega = 1$	$P(1) = 0$

El punto  $[s, h_2/(h_1 + h_2)]$  es el correspondiente a  $x = 1$ . Para comprobarlo basta calcular el límite de las funciones  $P(\omega)$  y  $\omega$  cuando  $x$  tiende a 1, aplicando la regla de L'Hôpital para eliminar la indeterminación 0/0. En efecto

$$\begin{aligned}
 P(\omega) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{h_1+h_2} - x^{h_1}}{x^{h_1+h_2} - 1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(h_1 + h_2)x^{h_1+h_2-1} - h_1x^{h_1-1}}{(h_1 + h_2)x^{h_1+h_2-1}} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}
 \end{aligned}$$

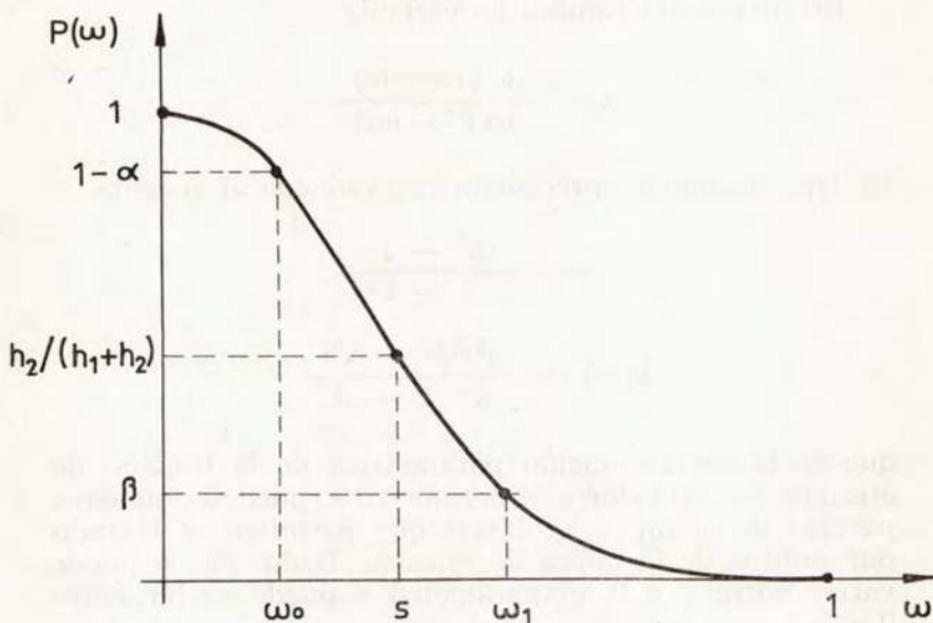


Fig. 8.17

$$\omega = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^s - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} sx^{s-1} = s$$

La ecuación de la función de eficacia sólo puede escribirse en forma explícita cuando  $\alpha = \beta$  y en consecuencia  $h_1 = h_2 = h$ . Es fácil demostrar que en este caso se tiene

$$\omega = \frac{\left[ \frac{P(\omega)}{1 - P(\omega)} \right]^{s/h} - 1}{\left[ \frac{P(\omega)}{1 - P(\omega)} \right]^{1/h} - 1}$$

Una vez obtenida la curva de eficacia, el trazado de la curva AOQ no presenta ningún problema.

Para calcular la extensión media de la muestra a controlar en función de la proporción de desechos contenida en el lote, basta tener en cuenta que, en este caso

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\omega) &= \frac{1}{n} \left[ c_n \log \frac{\omega_1}{\omega_0} + (n - c_n) \log \frac{1 - \omega_1}{1 - \omega_0} \right] = \\ &= \omega \log \frac{\omega_1}{\omega_0} + (1 - \omega) \log \frac{1 - \omega_1}{1 - \omega_0} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\bar{n}(\omega) = \frac{\log \frac{1 - \beta}{\alpha} - P(\omega) \left[ \log \frac{1 - \beta}{\alpha} + \log \frac{1 - \alpha}{\rho} \right]}{\omega \left[ \log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1} \right] - \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}}$$

o lo que es lo mismo

$$\bar{n}(\omega) = \frac{(h_1 + h_2)P(\omega) - h_2}{s - \omega}$$

A partir de esta expresión es posible dibujar por puntos la curva de extracciones medias del plan de inspección. Puede obtenerse una idea bastante aproximada de su forma representando tan sólo los cinco puntos siguientes (ver fig. 8.18)

$$\omega = 0 \quad \bar{n}(0) = \frac{h_1}{s}$$

$$\omega = \omega_0 \quad \bar{n}(\omega_0) = \frac{h_1 - \alpha(h_1 + h_2)}{s - \omega_0}$$

$$\omega = s \quad \bar{n}(s) = \frac{h_1 h_2}{s(1 - s)} = \bar{n}(0)\bar{n}(1)$$

$$\omega = \omega_1 \quad \bar{n}(\omega_1) = \frac{h_2 - \beta(h_1 + h_2)}{\omega_1 - s}$$

$$\omega = 1 \quad \bar{n}(1) = \frac{h_2}{1 - s}$$

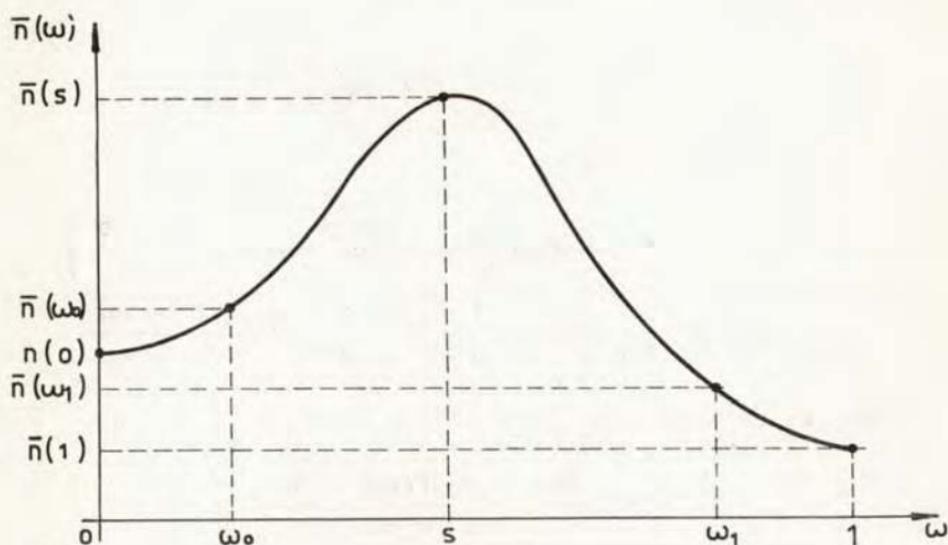


Fig. 8.18

Según ya se indicó anteriormente, la extensión media de la muestra a examinar en un plan de inspección por muestreo secuencial es siempre inferior al efectivo de la muestra que se precisaría caso de recurrirse a una prueba por muestreo simple o múltiple que garantizase los mismos niveles de protección. Esto conduce a estimables economías de dinero y tiempo, tanto más importantes cuanto más costoso sea cada ensayo (por ejemplo, en el caso de ensayos destructivos) y cuanto más cerca se hallen de la verdad las hipótesis de partida  $H_0$  y  $H_1$ . En particular, cuando el lote no contiene ningún desecho, o bien la totalidad de sus piezas son defectuosas, la decisión de aceptación o rechazo puede tomarse tras el examen de  $h_1/s$  ó  $h_2/(1 - s)$  piezas respectivamente.

Sin embargo, cuando las calidades son intermedias, los planes de control secuencial pueden llegar a exigir en algunos casos extracciones muy importantes sin que los resultados permitan llegar a una decisión de aceptación o rechazo. Dado que la utilización de un plan de inspección por muestreo secuencial sólo tiene sentido en tanto en cuanto permita tomar decisiones con mayor rapidez y menor coste que un plan de inspección por muestreo simple, las extracciones nunca deben prolongarse más allá del límite  $n$  exigido por el mismo. Cuando dicho límite es alcanzado, las extracciones deben interrumpirse. Entonces, si  $c_n$  es igual o inferior al valor  $c_A$  hallado con ayuda de la tabla 18, el lote debe ser aceptado, y en caso contrario rechazado. Este modo de obrar recibe el nombre de truncado de la prueba (ver fig. 8.19).

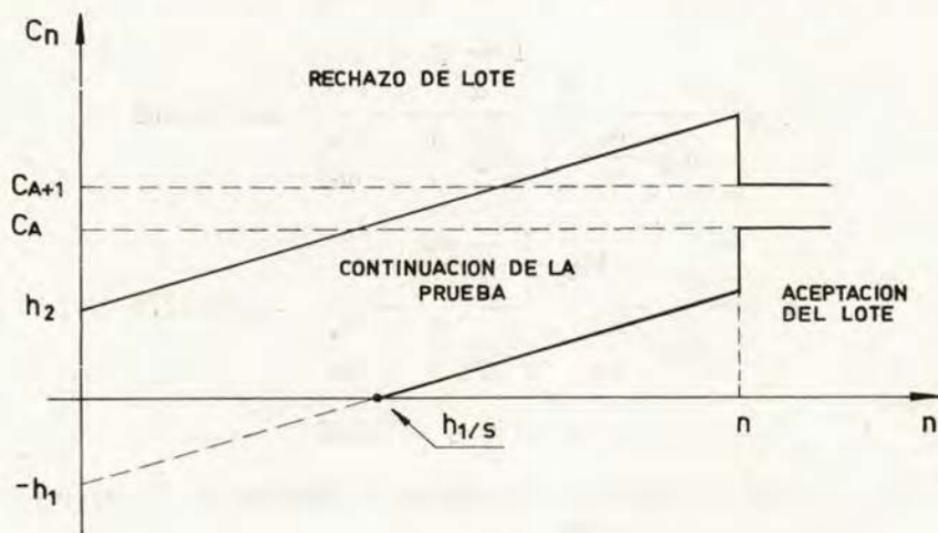


Fig. 8.19

No siempre es posible adoptar en la práctica una prueba de tipo secuencial. En particular, cuando las condiciones prácticas de la inspección conducen a una importante labor preparatoria, el muestreo secuencial debe ser desechado.

Las pruebas secuenciales, aunque de más difícil preparación y ejecución que las pruebas simples o dobles, tienen la ventaja, de carácter puramente psicológico, de conceder a todos los lotes la posibilidad de ser aceptados tras el examen de  $h_1/s$  piezas, lo que constituye un indudable aliciente para el fabricante.

Como aplicación de los conceptos desarrollados en este párrafo, supongamos el siguiente caso particular:  $\omega_0 = 1.9\%$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $\omega_1 = 8\%$ ,  $\beta = 10\%$ .

En este caso se tiene

$$h_1 = \frac{\log \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}} = 1.49908$$

$$h_2 = \frac{\log \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}} = 1.92462$$

$$s = \frac{\log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}}{\log \frac{\omega_1}{\omega_0} + \log \frac{1 - \omega_0}{1 - \omega_1}} = 0.04275$$

$$\bar{n}(0) = h_1/s = 35.07$$

y en consecuencia las ecuaciones de las rectas de aceptación y rechazo serán

$$c_{An} = -h_1 + sn = -1.49908 + 0.04275n$$

$$c_{Rn} = h_2 + sn = 1.92462 + 0.04275n$$

En la figura 8.20 se han representado gráficamente estas rectas y, a título indicativo, los resultados de las observaciones que han conducido a un rechazo tras el

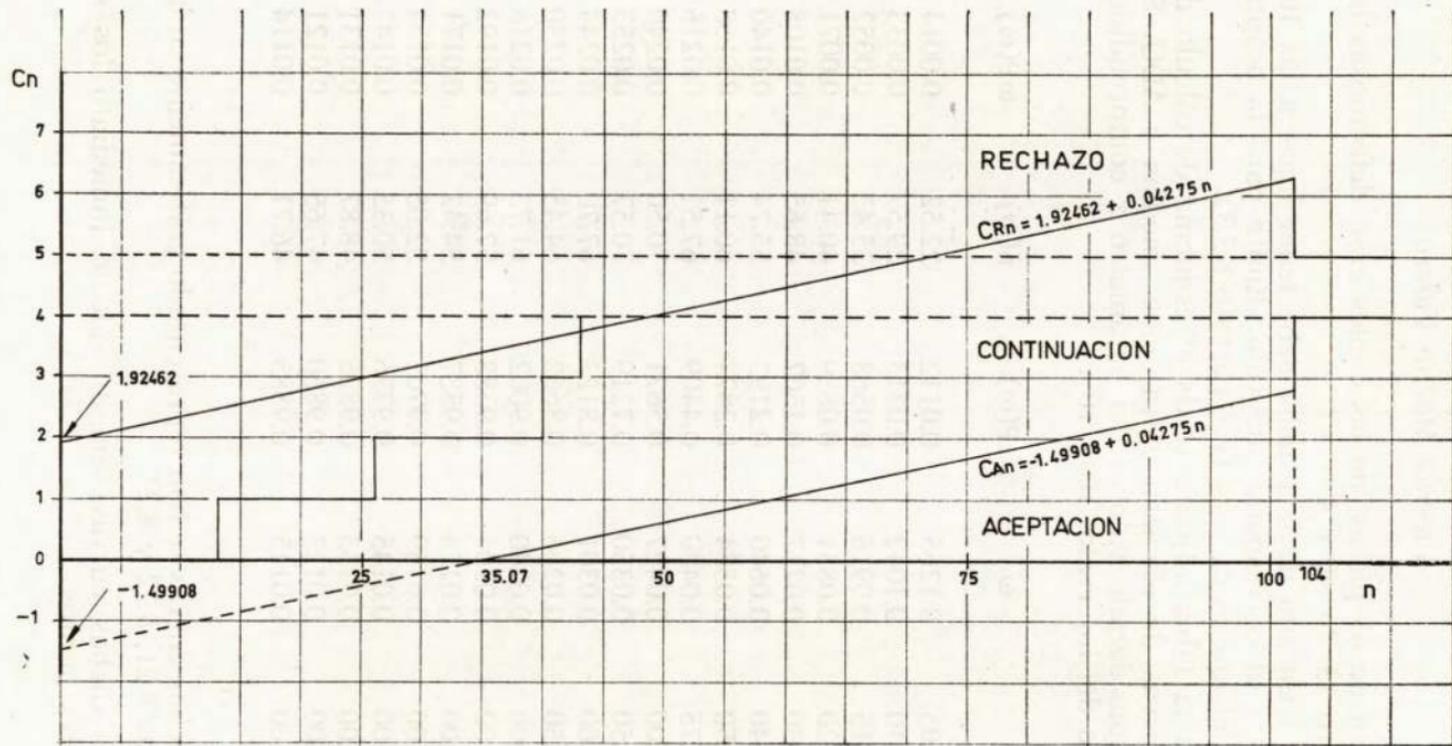


Fig. 8.20

examen de 43 piezas, de las cuales eran defectuosas las número 13, 26, 40 y 43.

El truncado de la prueba debe tener lugar a las 105 piezas y el correspondiente valor límite para la aceptación del lote es  $c_A = 4$  (ver párrafo 8.3.3).

En la tabla adjunta se da el esquema de cálculo de las curvas de eficacia, extracciones medias y AOQ. Se han considerado valores del parámetro  $x$  comprendidos dentro del intervalo  $[0.05, 10]$ .

$x$	$\omega$	$P(\omega)$	$\bar{n}(\omega)$	$\omega P(\omega)$
0.05	0.1265	0.0112	22.52	0.0014
0.10	0.1042	0.0313	29.57	0.0033
0.15	0.0916	0.0568	35.42	0.0052
0.20	0.0831	0.0859	40.41	0.0071
0.30	0.0717	0.1507	48.65	0.0108
0.40	0.0640	0.2193	55.24	0.0140
0.50	0.0584	0.2874	60.11	0.0168
0.75	0.0489	0.4409	67.51	0.0216
1.00	0.0427	0.5621	70.50	0.0240
1.50	0.0350	0.7219	70.57	0.0253
2.00	0.0301	0.8123	67.70	0.0244
2.50	0.0266	0.8662	64.45	0.0230
3.00	0.0240	0.9002	61.73	0.0216
4.00	0.0204	0.9388	57.69	0.0192
5.00	0.0178	0.9587	54.42	0.0171
6.00	0.0159	0.9703	52.05	0.0154
7.00	0.0145	0.9776	50.35	0.0142
8.00	0.0133	0.9825	48.87	0.0131
9.00	0.0123	0.9860	47.65	0.0121
10.00	0.0115	0.9885	46.71	0.0114

Dichas curvas se han representado gráficamente en las figuras 8.21, 8.22 y 8.23.

En dichas curvas, son de cálculo inmediato los siguientes puntos:

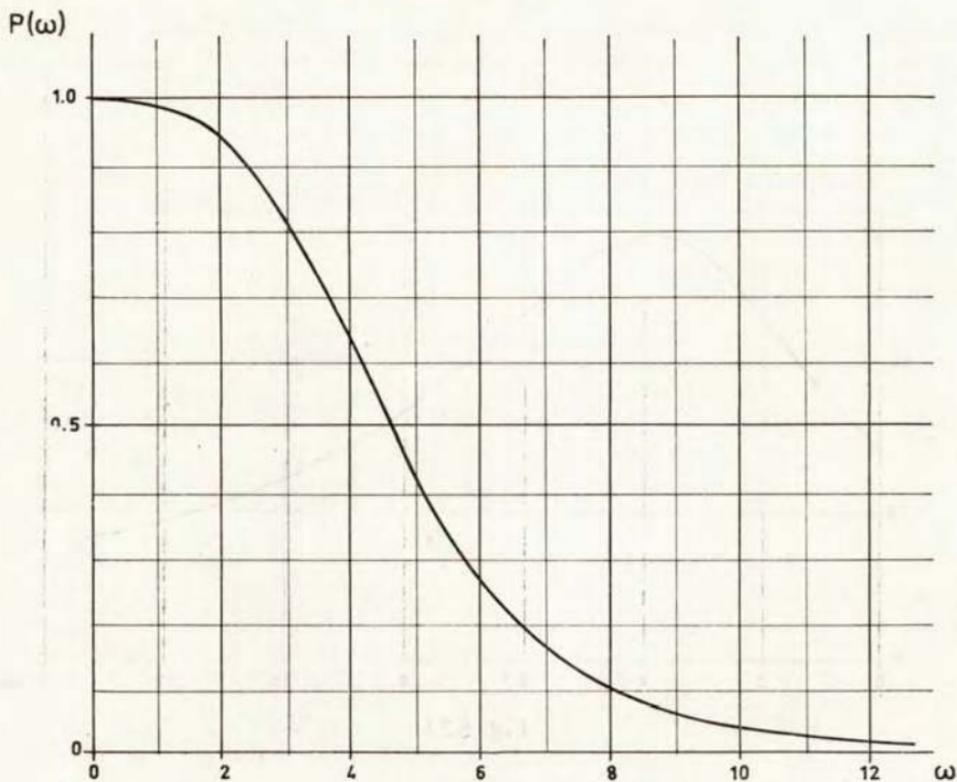


Fig. 8.21

a) Curva de eficacia

$\omega = 0$	$P(0) = 1$
$\omega = 0.019$	$P(\omega_0) = 0.95$
$\omega = 0.04275$	$P(s) = 0.5621$
$\omega = 0.080$	$P(\omega_1) = 0.10$
$\omega = 1$	$P(1) = 0$

b) Curva de extracciones medias

$\omega = 0$	$\bar{n}(0) = 35.07$
$\omega = 0.019$	$\bar{n}(\omega_1) = 55.91$
$\omega = 0.04275$	$\bar{n}(s) = 70.50$
$\omega = 0.080$	$\bar{n}(\omega_1) = 42.48$
$\omega = 1$	$\bar{n}(1) = 2.01$

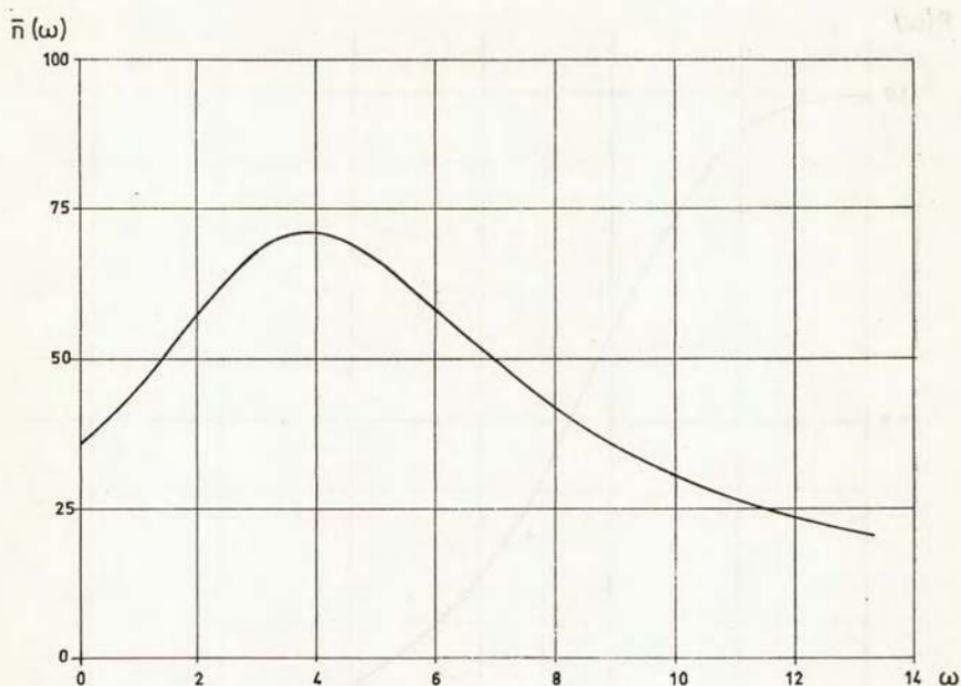


Fig. 8.22

## c) Curva AOQ

$\omega = 0$	AOQ = 0
$\omega = 0.019$	AOQ = 0.018
$\omega = 0.04275$	AOQ = 0.024
$\omega = 0.080$	AOQ = 0.008
$\omega = 1$	AOQ = 0

Para construir la tabla de muestreo, basta dar a  $c_n$  valores consecutivos en las ecuaciones

$$n = \frac{c_n - h_2}{s} = \frac{c_n - 1.92462}{0.04275}$$

$$n = \frac{c_n + h_1}{s} = \frac{c_n + 1.49908}{0.04275}$$

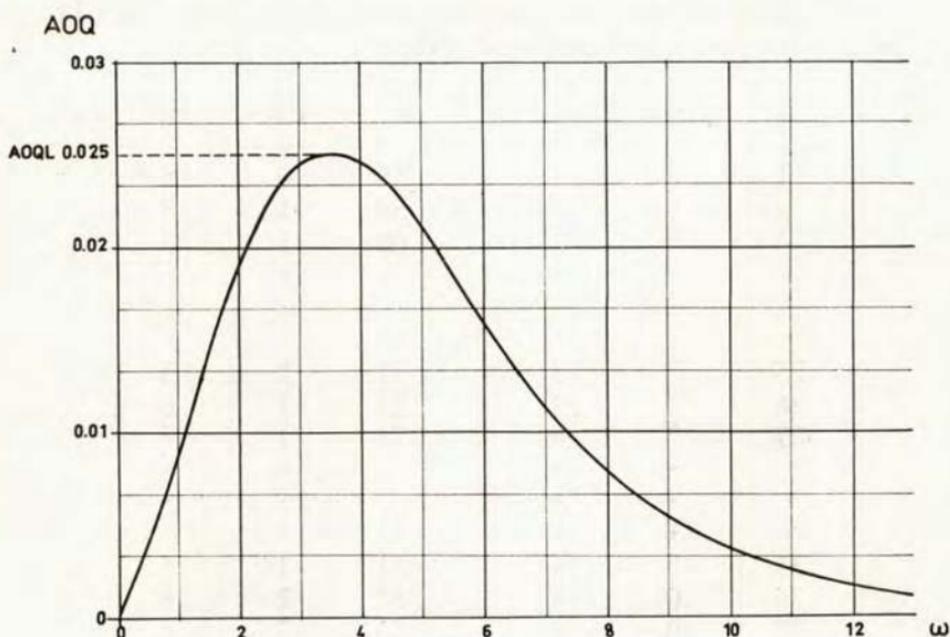


Fig. 8.2<sup>3</sup>

Así, para  $c_n$  variando entre 0 y 8, se obtiene

$c_n$	$n$	
	ACEPTACION	RECHAZO
0	— 45.02	35.07
1	— 21.63	58.46
2	1.76	81.85
3	25.16	105.24
4	48.55	128.63
5	71.94	152.03
6	95.33	175.42
7	118.72	198.81
8	142.11	222.20

La tabla de muestreo deberá, pues, establecerse en la forma que a continuación se indica

$n$	$C_{An}$	$C_{Rn}$	$n$	$C_{An}$	$C_{Rn}$
1	*	*	58	0	5
2	*	*	59	1	5
3	*	3	60	1	5
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
25	*	3	71	1	5
26	*	4	72	1	6
27	*	4	73	1	6
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
35	*	4	81	1	6
36	0	4	82	2	6
37	0	4	83	2	6
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
48	0	4	95	2	6
49	0	5	96	2	7
50	0	5	97	2	7
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
			103	2	7
			104	4	5

El símbolo \* significa que en este caso no puede tomarse ninguna decisión.

### 8.3.5 Planes de control cualitativo por muestreo continuo

Los planes de control cualitativo por muestreo continuo, tal como los describiremos en este párrafo, son

especialmente adecuados para el control final de fabricación que, en muchos casos, es preciso efectuar a fin de garantizar al cliente cierta calidad mínima.

Esta modalidad de control se aplica cuando los productos a controlar no se presentan en lotes, sino que van desfilando de forma continua ante los puestos de control, tal como ocurre, por ejemplo, en las cadenas de fabricación de elementos mecánicos en grandes series (tornillería, embutición, etc.), de las que fluye una producción continua diferenciada. Se entiende por producción diferenciada aquella dentro de la cual es posible distinguir entre piezas buenas y malas y, en consecuencia, existe la posibilidad de dar al control final un carácter rectificativo. No ocurre así en las producciones continuas no diferenciadas, muy frecuentes en la industria química, textil, etc., donde propiamente hablando no hay elementos defectuosos susceptibles de ser sustituidos por elementos buenos equivalentes y que, en consecuencia, no admiten un control rectificativo de final de fabricación.

El plan de control cualitativo por muestreo continuo más simple es el propuesto por Dodge, a partir del cual se han desarrollado todos los demás. Dicho plan de inspección denominado CSP-1 (*Continuous Sampling Plan 1*) puede ser caracterizado de la forma siguiente: al comienzo del proceso se inspeccionan las piezas al 100 %, hasta obtener una ráfaga de  $i$  unidades consecutivas buenas. En este momento se pasa a un control por muestreo aleatorio, extendido a una fracción  $f$  de la producción. Si se encuentra alguna pieza defectuosa se vuelve al control al 100 %, hasta que se obtiene de nuevo una ráfaga de  $i$  piezas consecutivas buenas, y así sucesivamente.

Este tipo de control en el que se pasa de forma alternativa de secuencias de inspección total a secuencias de inspección parcial tiene algunos inconvenientes. En efecto, el paso brusco del control por muestra al control al 100 % puede ser fuente de variaciones tan fuertes en la carga de trabajo que incluso pueden llegar a poner en peligro la estabilidad de toda la cadena de fabricación, y esto puede ocurrir incluso cuando la fabricación es de calidad excelente, toda vez que siempre existirá un cierto número de piezas defectuosas, alguna de las cuales será

extraída más pronto o más tarde al pasar por el puesto de control.

Para eliminar estas dificultades, Dodge y Torrey han propuesto planes de inspección más complejos (CSP-2 y CSP-3) que retrasan la vuelta al control al 100 %. En el CSP-2 se comienza como en el CSP-1 por un control al 100 %, hasta que sean encontradas  $i$  piezas consecutivas buenas. Entonces entra en escena el control sobre una muestra. La vuelta al control al 100 % no se realiza al encontrar una pieza mala, sino que es preciso encontrar dos unidades malas espaciadas en menos de  $k$  unidades buenas. El plan CSP-3 es análogo al CSP-1 con la única diferencia de que, cuando se encuentra una pieza mala, se controlan las cuatro piezas siguientes y, caso de aparecer algún nuevo desecho, se vuelve al control al 100 %.

Una variante del método de Dodge consiste en establecer varios niveles de inspección. De esta forma se obtiene un control más adecuado para fabricaciones de alta calidad. En el plan MLP (*Multi-Level Continuous Sampling Plan*), propuesto por Lieberman y Solomon, se empieza por un control al 100 % hasta encontrar una ráfaga de  $i$  piezas consecutivas buenas. Entonces se pasa al primer nivel de inspección parcial, en el cual se controla una fracción  $f$  de la producción escogida al azar. Si se encuentra alguna pieza mala, se vuelve a la inspección al 100 %, pero si llega a obtenerse una ráfaga de  $i$  piezas consecutivas buenas, se pasa a un segundo nivel de inspección en el que sólo se controla una fracción  $f^2$  de la producción. Si se encuentra una pieza mala, se vuelve al primer nivel de inspección, mientras que si se obtiene una ráfaga de  $i$  piezas consecutivas buenas, se pasa a un tercer nivel de inspección en el que sólo se controla una fracción  $f^3$  de la producción. Se sigue así hasta llegar al nivel de inspección  $k$ , en el que se controla una fracción  $f^k$  de la producción y por debajo del cual ya no se desciende.

Así pues, en un plan a varios niveles, encontrar una pieza defectuosa implica pasar al nivel precedente, pero no al control al 100 %, contrariamente a lo que ocurre al CSP-1, que no es sino un plan a un solo nivel.

Un plan de inspección de este tipo muy utilizado por

el ejército de los E.E.U.U. es el siguiente: se empieza por un control al 100 % hasta encontrar  $i$  piezas consecutivas buenas. En este momento se pasa al primer nivel de inspección por muestra, en el que se controla una fracción  $f$  de la producción. Si se encuentran  $i$  piezas consecutivas buenas, se pasa al segundo nivel de inspección en el que sólo se controla una fracción  $f^2$  de la producción. Si en un determinado nivel de inspección parcial se detecta una pieza mala antes de obtener  $i$  consecutivas buenas, la regla para decidir si se continúa en el mismo nivel de inspección o por el contrario es preciso pasar al nivel precedente (más severo) es la siguiente: inmediatamente después de haber encontrado la pieza defectuosa, se controlan las cuatro unidades siguientes. Si ninguna de ellas es defectuosa, se continúa con la inspección en el mismo nivel, y si las  $i - 4$  siguientes resultan ser todas buenas, se pasa al nivel siguiente. Por el contrario, si se encuentra una pieza mala entre las cuatro primeras unidades o entre las  $i - 4$  siguientes, se vuelve al nivel de control precedente, comenzando por extraer una serie de cuatro piezas sucesivas.

Con los planes a varios niveles se consigue una casi seguridad de que la detección, por puro azar, de una pieza defectuosa no obligará a cambios bruscos en la marcha de la inspección. Por el contrario si la aparición de la pieza defectuosa no es fruto del azar sino consecuencia de un desarreglo en el proceso de fabricación, esta circunstancia podrá ser detectada con gran rapidez y subsanada en consecuencia.

Expuestos de forma sumaria los planes de inspección por muestreo continuo más utilizados, nos limitaremos a estudiar, siguiendo a Torrens<sup>2</sup>, el CSP-1.

Supongamos una fabricación continua de piezas caracterizadas por una proporción  $\omega$  de desechos. En estas condiciones, la probabilidad de obtener una ráfaga de  $i$

<sup>2</sup> J. Torrens-Ibern: *Los métodos estadísticos de control en los procesos industriales continuos*, «Cuadernos de Estadística Aplicada e Investigación Operativa», vol. II, fasc. 4-1963.

piezas consecutivas buenas, sea cual fuere la calidad de la pieza siguiente, es

$$(1 - \omega)^i$$

y la probabilidad de no lograrlo

$$1 - (1 - \omega)^i$$

Sea  $F$  la fracción de la producción que efectivamente ha sido controlada al cabo de un cierto tiempo de implantación del plan de inspección,  $u$  el número medio de piezas fabricadas y controladas durante las secuencias de inspección total y  $v$  el número medio de piezas fabricadas durante las secuencias de inspección parcial. Evidentemente se cumplirá que

$$F = \frac{u + fv}{u + v}$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{fv} &= \frac{P_r\{\text{Secuencia de inspección total}\}}{P_r\{\text{Secuencia de inspección parcial}\}} = \\ &= \frac{1 - (1 - \omega)^i}{(1 - \omega)^i} \end{aligned}$$

De estas relaciones se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned} F &= \frac{f}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i} \\ 1 - F &= \frac{(1 - f)(1 - \omega)^i}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i} \end{aligned}$$

expresiones que ponen de manifiesto la relación existente entre las fracciones controlada y no controlada de la fabricación, la calidad de la misma y los parámetros fundamentales del plan de inspección.

Dado que el control es rectificativo, la proporción media de piezas defectuosas que pasarán inadvertidas, es decir, la calidad saliente o AOQ será

$$AOQ = (1 - F)\omega = \frac{(1 - f)(1 - \omega)^i}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i} \omega$$

Para determinar el AOQL o calidad mínima que puede garantizarse tras someter a la producción al plan de inspección CSP-1, basta igualar a cero la derivada con respecto a  $\omega$  de AOQ, es decir, basta hacer

$$\frac{d(AOQ)}{d\omega} = 0$$

lo que lleva a la ecuación

$$\frac{\omega(1 - f)(1 - \omega)^i}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i} = \frac{\omega(i + 1) - 1}{i}$$

de la que es posible deducir el valor  $\omega^*$  de la proporción de desechos de la fabricación para la cual se obtiene el AOQL (ver fig. 8.24).

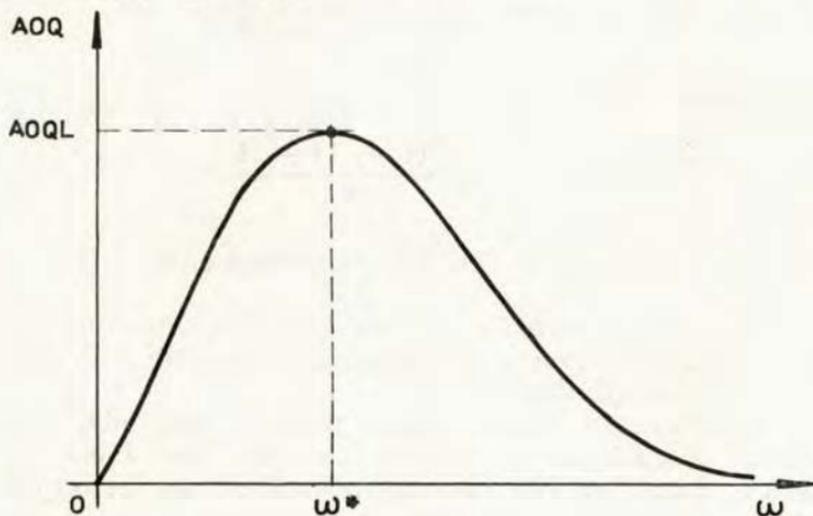


Fig. 8.24

Por otra parte, dado que el primer miembro de dicha ecuación es precisamente el AOQ correspondiente a  $\omega^*$ , es decir, el AOQL, es posible escribir

$$\text{AOQL} = \frac{\omega^*(i + 1) - 1}{i}$$

Además, como  $\text{AOQL} = (1 - F^*)\omega^*$ , resulta que la fracción de piezas controladas cuando la producción tiene una proporción de desechos  $\omega^*$  es

$$F^* = \frac{1 - (\text{AOQL})}{1 + (\text{AOQL})^i}$$

Además, como por otra parte

$$F^* = \frac{f}{f + (1 - f)(1 - \omega^*)^i}$$

resulta finalmente

$$f = \frac{(1 - \omega^*)^{i+1}}{(1 - \omega^*)^{i+1} + (\text{AOQL})^i}$$

ecuación que junto con

$$\text{AOQL} = \frac{\omega^*(i + 1) - 1}{i}$$

permiten encontrar la relación funcional entre  $f$ ,  $i$  y el AOQL.

Dodge ha construido a partir de esta relación unas curvas que permiten determinar gráficamente  $f$  e  $i$  en función del AOQL deseado.

Este camino no parece desde luego el más adecuado para la elección de los valores característicos  $f$  e  $i$  del plan de inspección. Murphy ha puesto de manifiesto que, además del AOQL, debe fijarse la fracción  $F$  de piezas que se desea controlar realmente ya que, en último térmi-

no, es esta fracción la que determina la economía del plan de inspección. Torrens ha desarrollado esta idea de Murphy y propone el siguiente método de determinación de los valores característicos del plan de inspección: si los valores de  $f$  y de  $i$  se suponen dados, de la división de las expresiones analíticas de  $F$  y  $1 - F$  se deduce inmediatamente la ecuación

$$\frac{f}{1 - f} = \frac{F(\omega)}{1 - F(\omega)} (1 - \omega)^i$$

en la que debe escribirse  $F(\omega)$  en vez de  $F$ , para poner de manifiesto el hecho de que, para unos valores dados de  $i$  y de  $f$ , la fracción de la producción que será examinada es función exclusiva de la proporción de desechos  $\omega$ .

Dado que la relación precedente se cumple cualquiera que sea el valor de la proporción de desechos, se verificará la relación

$$\frac{F(\omega)}{1 - F(\omega)} (1 - \omega)^i = \frac{F(\omega^*)}{1 - F(\omega^*)} (1 - \omega^*)^i$$

siendo  $\omega$  la proporción real de desechos de la fabricación y  $\omega^*$  la que correspondería al AOQL.

Ahora bien

$$AOQL = \frac{\omega^*(i + 1) - 1}{i}$$

y

$$F^* = \frac{1 - (AOQL)}{1 + (AOQL)^i}$$

En consecuencia, después de algunas transformaciones será posible escribir

$$\begin{aligned} \frac{[1 - (AOQL)][1 - F(\omega)]}{(AOQL)F(\omega)} \left[ \frac{1 - (AOQL)}{1 - \omega} \right]^i &= \\ &= \frac{(i + 1)^{i+1}}{i^i} \end{aligned}$$

y tomando logaritmos

$$\log \frac{[1 - (\text{AOQL})][1 - F(\omega)]}{(\text{AOQL})F(\omega)} -$$

$$- i \log \left[ \frac{1 - \omega}{1 - (\text{AOQL})} \right] = (i + 1) \log (i + 1) - i \log i$$

o lo que es lo mismo

$$\psi(i) = -iA + B$$

con

$$\psi(i) = (i + 1) \log (i + 1) - i \log i$$

$$A = \log \left[ \frac{1 - \omega}{1 - (\text{AOQL})} \right]$$

$$B = \log \frac{[1 - (\text{AOQL})][1 - F(\omega)]}{(\text{AOQL})F(\omega)}$$

A partir de esta ecuación, es posible determinar el valor de  $i$  correspondiente a unos valores dados de la proporción de desechos,  $\omega$ , de la calidad mínima que se desea garantizar, AOQL, y de la fracción de la producción que se quiere inspeccionar,  $F$ . En efecto, dicha ecuación es la ecuación de una recta en un sistema de ejes coordenados  $i$ ,  $\psi(i)$ . Por otra parte,  $\psi(i)$  es una función creciente de  $i$  (ver fig. 8.25) y por completo independiente de los datos del problema.

La abscisa del punto de corte de ambas líneas, si existe, es la solución del problema.

Una vez determinada  $i$  por el procedimiento gráfico descrito, el valor de  $f$  debe ser deducido a partir de la expresión

$$f = \frac{F(\omega)(1 - \omega)^i}{1 - F(\omega)[1 - (1 - \omega)^i]}$$

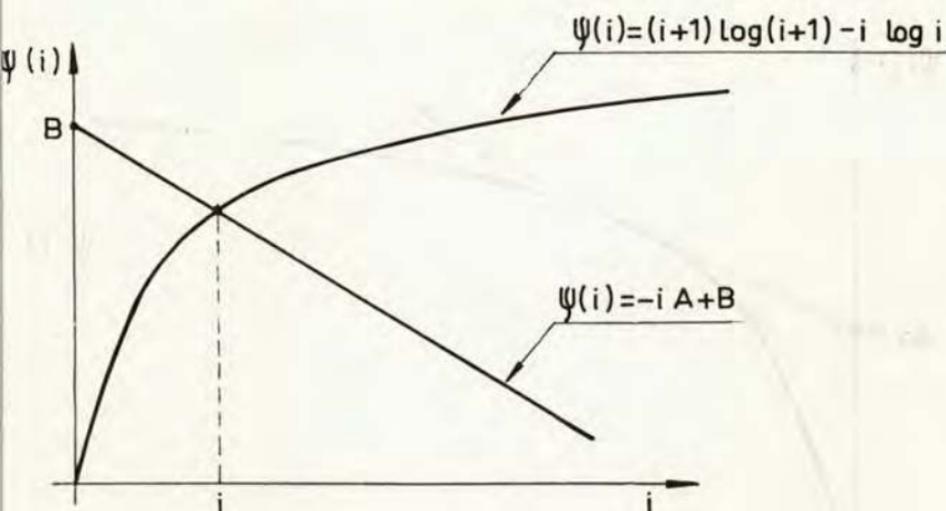


Fig. 8.25

Cuando la calidad que se desea garantizar al cliente es menos buena que la calidad media de la fabricación ( $\omega < \text{AOQL}$ ), la relación  $(1 - \omega)/(1 - \text{AOQL})$  es superior a la unidad, su logaritmo es positivo y la recta es descendente. La solución del problema no ofrece en este caso ninguna dificultad. Por el contrario, si deseamos hacer servir la inspección para mejorar la calidad saliente ( $\omega > \text{AOQL}$ ), la relación  $(1 - \omega)/(1 - \text{AOQL})$  es inferior a la unidad, su logaritmo es negativo y la recta es ascendente. En estas condiciones, para ciertos valores de  $F(\omega)$  puede ocurrir que el problema no tenga solución. De todas formas, el procedimiento descrito puede ser útil para determinar las condiciones óptimas de la inspección, es decir, aquellas que dan un valor mínimo para  $F(\omega)$ . Se obtiene esta solución mediante la tangente a la curva  $\psi(i)$  que tenga una pendiente igual a  $-A$  (ver fig. 8.26).

La ordenada,  $B$ , del punto de corte de dicha tangente con el eje vertical permite la determinación de  $F(\omega)$ . En efecto, como

$$B = \log \frac{[1 - (\text{AOQL})][1 - F(\omega)]}{(\text{AOQL})F(\omega)}$$

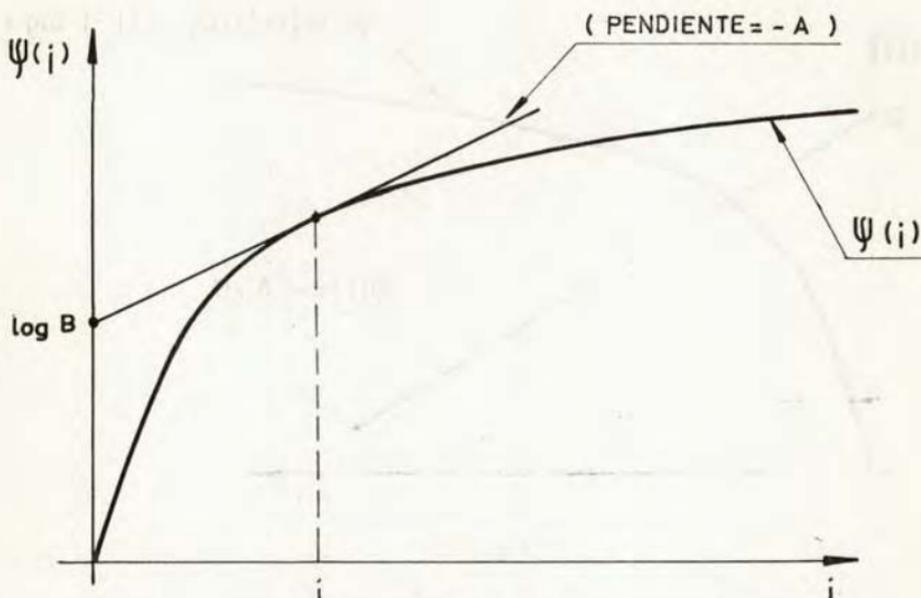


Fig. 8.26

resulta

$$F(\omega) = \frac{1 - (\text{AOQL})}{1 + (\text{AOQL})(\text{antilog } B - 1)}$$

que es el valor mínimo que puede tener  $F(\omega)$  para unos valores dados de  $\omega$  y AOQL.

Si bien el trazado de la tangente permite determinar con precisión suficiente el valor de  $F(\omega)$ , no ocurre lo mismo con el valor de  $i$ , debido a la pequeña curvatura de la curva  $\psi(i)$  en el punto donde suele producirse la tangencia. Para la determinación de  $i$  es preferible recurrir a un método analítico basado en la igualdad de las pendientes de la recta y de la curva  $\psi(i)$  en el punto de tangencia. En efecto, la pendiente de  $\psi(i)$  es

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(i)}{di} &= \frac{1}{\ln 10} \frac{i+1}{i+1} + \log(i+1) - \frac{1}{\ln 10} \frac{i}{i} - \\ &\quad - \log i = \log \frac{i+1}{i} \end{aligned}$$

y la de la recta

$$\log \frac{1 - (\text{AOQL})}{1 - \omega}$$

En consecuencia

$$\frac{i + 1}{i} = \frac{1 - (\text{AOQL})}{1 - \omega}$$

resultando finalmente para  $i$  el valor

$$i = \frac{1 - \omega}{\omega - (\text{AOQL})}$$

Como ejemplo de aplicación del método numérico-gráfico propuesto por Torrens, supongamos una fabricación que, en promedio, contiene un 5 ‰ de piezas defectuosas; se trata de encontrar el plan de control por muestreo continuo, tipo CSP-1, que garantice una calidad saliente media del 1 %, de forma que, cuando la proporción de desechos sea realmente del 5 ‰, no se tenga que controlar más de un 10 ‰ de la producción.

En este caso tendremos

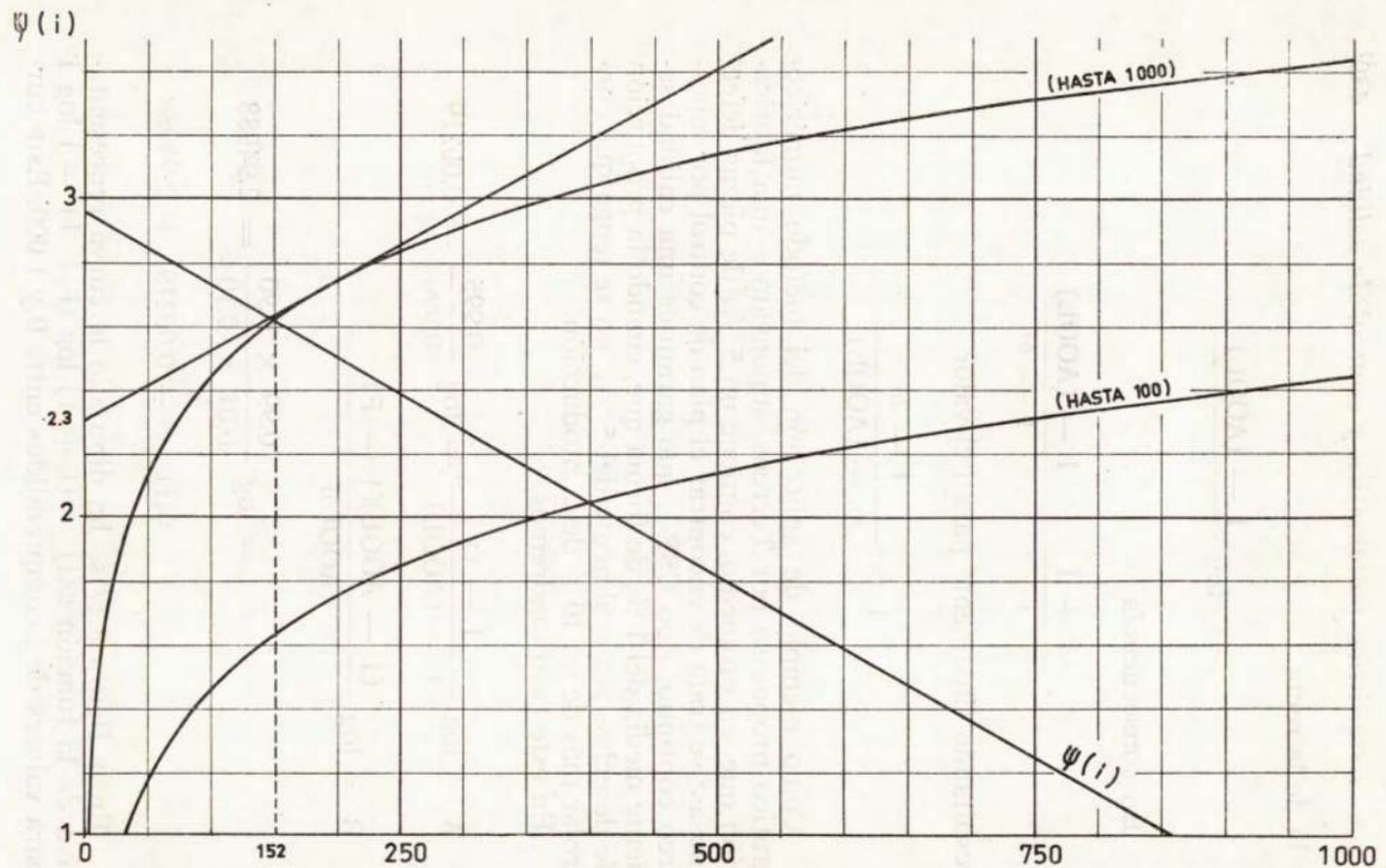
$$A = \log \frac{1 - \omega}{1 - (\text{AOQL})} = \log \frac{0.995}{0.990} = 0.00219$$

$$B = \log \frac{(1 - \text{AOQL})(1 - F)}{(\text{AOQL})F} =$$

$$= \log \frac{0.99 \times 0.90}{0.01 \times 0.10} = 2.94988$$

$$\phi(i) = - 0.00219i + 2.94988$$

En la figura 8.27 se ha dibujado la curva representativa de la función  $\phi(i) = (i + 1) \log (i + 1) - i \log i$  para valores de  $i$  comprendidos entre 0 y 1 000. Esta cur-



Fundación Juan March

Fig. 8.27

va es utilizable en toda clase de problemas relativos al CSP-1, sean cuales fueren los datos de partida.

Sobre el mismo sistema cartesiano se ha dibujado la recta de ecuación  $\psi(i) = -0.00219i + 2.94988$ . La abscisa del punto de corte es

$$i = 152$$

La fracción de la producción que debe inspeccionarse en las secuencias de inspección parcial es

$$f = \frac{F(\omega)(1 - \omega)^i}{1 - F(\omega)[1 - (1 - \omega)^i]} =$$

$$= \frac{0.10 \times \overline{0.99}^{152}}{1 - 0.10[1 - \overline{0.99}^{152}]} = 0.024$$

Así pues, en las secuencias de inspección parcial a las que se llega tras haber encontrado 152 piezas consecutivas buenas, debe inspeccionarse tan sólo un 2.4 % de la producción escogido al azar.

Si aceptásemos controlar un 20 % de la producción, encontraríamos para valores característicos del plan de inspección

$$i = 91$$

$$f = 9 \%$$

Supongamos ahora que la proporción media de desechos contenida en la fabricación es del 1 % y deseamos garantizar una calidad saliente del 5 ‰, controlando un porcentaje mínimo de la producción.

En este caso el valor de  $i$  será

$$i = \frac{1 - \omega}{\omega - (AOQL)} = \frac{0.99}{0.005} = 198$$

Por otra parte

$$A = \log \frac{1 - \omega}{1 - (\text{AOQL})} = \log \frac{0.99}{0.995} = -0.00219$$

Trazando una tangente a la curva  $\psi(i)$  de la figura 8.27 de pendiente igual a 0.00219, se encuentra

$$B = 2.3$$

y como

$$\text{antilog } B = 199.5$$

resulta finalmente

$$F(\omega) = \frac{1 - 0.005}{1 + 0.005(199.5 - 1)} = 0.5$$

y la fracción de piezas a controlar en las secuencias de inspección parcial es

$$f = \frac{0.5(1 - 0.01)^{198}}{1 - 0.5[1 - (1 - 0.01)^{198}]} = 0.12$$

## 8.4 PLANES DE CONTROL CUANTITATIVO. CONTROL POR MEDIDAS

### 8.4.1 *Introducción*

La hipótesis fundamental sobre la que se basan todos los planes de inspección cuantitativa que describiremos en los párrafos siguientes es la normalidad de la distribución estadística de los valores de la variable física objeto de control. Antes de aplicar dichos planes de inspección al caso concreto de la recepción de un suministro de cierto producto, se ha de estar bien seguro de que tal hipótesis es cierta, pues de no ser así se corre el riesgo de co-

meter grandes fallos a la hora de decidir la aceptación o el rechazo de los lotes. Por ello, siempre que no se tenga una información previa, procedente por ejemplo del examen de lotes análogos recibidos con anterioridad, la hipótesis de normalidad debe ser comprobada mediante una prueba estadística adecuada ( $\chi^2$ , Kolmogorov-Smirnov, etcétera), antes de proceder a la implantación de un control por medidas.

#### 8.4.2 *Planes de control cuantitativo por muestreo simple*

A lo largo del capítulo 7, han sido expuestos con todo detalle una serie de planes de inspección cuantitativa por muestreo simple, especialmente aptos para su empleo en el control de recepción.

En los planes de inspección cuantitativa, la aceptación o rechazo del lote no se decide en función del número de desechos encontrado en la muestra, sino en función del resultado de la medición de sus distintas unidades, lo que supone un mejor aprovechamiento de la información en ella contenida.

Se comprende, pues, que un plan de inspección cuantitativa requerirá, para unas mismas condiciones de eficacia, un tamaño de muestra más reducido que un plan equivalente de inspección cualitativa.

El grado de reducción del tamaño de la muestra es, en general, muy considerable.

Supongamos, por ejemplo, que se desea someter a control un lote de piezas mecánicas, cuya dimensión objeto de control se sabe está distribuida según una ley normal de desviación tipo 0.001 mm. Toda pieza cuya dimensión controlada esté fuera del intervalo de especificación  $20 \pm \pm 0.005$  mm se considera defectuosa. Las condiciones de eficacia deseadas son:  $\omega_0 = 1.9\%$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $\omega_1 = 8\%$ ,  $\beta = 10\%$ .

Según ya vimos en el párrafo 8.3.2, la inspección cualitativa de este lote, con los niveles de protección prefijados, exigiría el examen mediante calibres «pasa o no pasa» de 104 piezas extraídas al azar.

Calculemos el efectivo de la muestra que habría que examinar caso de adoptarse un plan de inspección cuantitativa. Como en este caso se cumple que

$$T_s - T_i = 0.01 > 6.18\sigma$$

es aplicable el plan de inspección descrito en el párrafo 7.2.3.

El tamaño de la muestra deberá ser, pues

$$n = \left( \frac{K_\alpha + K_\beta}{K_{\omega_0} - K_{\omega_1}} \right)^2 = \left( \frac{1.645 + 1.282}{2.075 - 1.405} \right)^2 = 19$$

y los límites superior e inferior del intervalo de aceptación del lote

$$\begin{aligned} m_{LS} &= T_s - \sigma \frac{K_{\omega_1}K_\alpha + K_{\omega_0}K_\beta}{K_\alpha + K_\beta} = 20.005 - \\ &- 0.001 \frac{1.405 \times 1.645 + 2.075 \times 1.282}{1.645 + 1.282} = 20.0033 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{LI} &= T_i + \sigma \frac{K_{\omega_1}K_\alpha + K_{\omega_0}K_\beta}{K_\alpha + K_\beta} = 19.995 + \\ &+ 0.001 \frac{1.405 \times 1.645 + 2.075 \times 1.282}{1.645 + 1.282} = 19.9967 \end{aligned}$$

La regla de decisión consistirá, pues, en:

- extraer al azar una muestra de 19 piezas;
- medir las 19 piezas una a una y calcular la correspondiente media muestral  $\bar{x}$  ( $\bar{x} = \Sigma x_i/n$ );
- si la media muestral  $\bar{x}$  obtenida está comprendida dentro del intervalo 19.9967, 20.0033, aceptar el lote; en caso contrario, proceder a su rechazo.

Así pues, en el caso concreto estudiado, la inspección cuantitativa exige el examen de una muestra de tamaño 5.5 (104/19) veces inferior que la inspección cualitativa.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que el coste total atribuible a la medida de una pieza,  $C'$ , es siempre superior al coste total de su examen cualitativo,  $C''$ . De todas formas, en el caso estudiado haría falta que  $C'$  fuese 5.5 veces superior a  $C''$  para que los respectivos costes de muestreo se igualasen. En general, la relación  $C'/C''$  no es nunca tan elevada, por lo que el control por medidas suele ser muy ventajoso desde el punto de vista económico.

Todos los planes de inspección descritos en el capítulo 7 están basados en la adopción de la media muestral,  $\bar{x}$ , como función discriminante. De esta forma se logra un aprovechamiento óptimo de la información contenida en la muestra. Sin embargo, en algunos casos mejor que referirse a la media muestral,  $\bar{x}$ , conviene referirse a la mediana muestral  $y_{s+1}$ .

La adopción de la mediana muestral  $y_{s+1}$  como función discriminante, no supone complicación alguna en el cálculo del tamaño de la muestra y de los límites de la región de aceptación.

Basta tener en cuenta que la distribución de dicha variable aleatoria es, aproximadamente, normal de variancia  $\pi/2$  veces superior a la de la distribución de las medias.

Por ejemplo, en el caso concreto de una especificación definida por un límite inferior  $T_1$ , la prueba podrá ser caracterizada a partir del siguiente sistema de ecuaciones (ver fig. 8.28)

$$m_0 = T_1 + K_{\omega_0} \sigma$$

$$m_1 = T_1 + K_{\omega_1} \sigma$$

$$m_L = m_0 + K_{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$m_L = m_1 + K_{\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

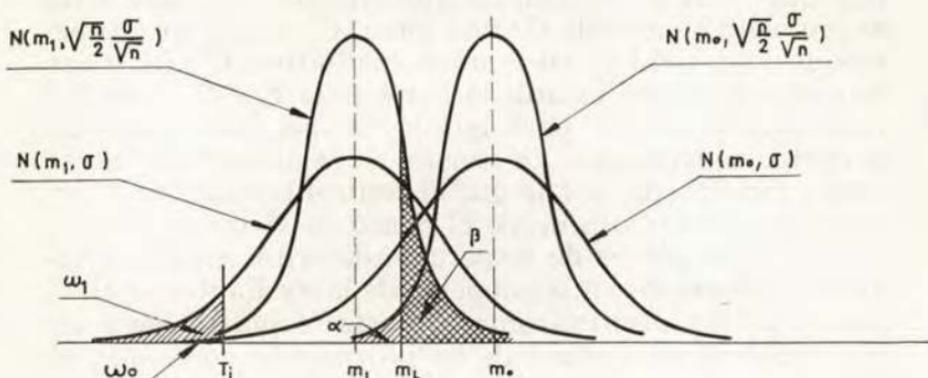


Fig. 8.28

En consecuencia, el tamaño de la muestra,  $n$ , y el valor límite,  $m_L$ , vendrán dados en este caso por las expresiones

$$n = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{K_\alpha + K_\beta}{K_{\omega_0} - K_{\omega_1}} \right]^2$$

$$m_L = T_i + \sigma \frac{K_{\omega_1} K_\alpha + K_{\omega_0} K_\beta}{K_\alpha + K_\beta}$$

Es de observar que, en este caso, la inspección por mediana exige un tamaño de muestra  $\pi/2$  veces superior que la inspección por media. Por el contrario, el valor límite  $m_L$  es idéntico en ambos casos.

A la vista de estos resultados, la inspección por media parece ser mucho más ventajosa desde el punto de vista económico.

Sin embargo, la mediana de una muestra es de determinación mucho más sencilla que la media correspondiente. Esta circunstancia hace que, en algunos casos, resulte preferible referirse a las medianas. Por ejemplo, cuando la variable física objeto de control es una duración (horas de vida de una lámpara eléctrica, ciclos de trabajo de una pieza antes de sufrir rotura por fatiga,

etcétera), un control por medias puede llegar a resultar muy costoso. En efecto, si para cumplir con las condiciones de eficacia preestablecidas debe procederse al examen de una muestra de extensión  $n$ , el control por medias consistirá en poner en funcionamiento simultáneamente los  $n$  elementos e ir anotando sus duraciones a medida que vayan quedando fuera de servicio. Una vez se haya producido el fallo del último elemento, bastará proceder a la determinación de la duración media. Ahora bien, como en toda distribución existen colas que, según sea el valor de la desviación tipo, pueden llegar a estar muy distanciadas del valor medio, puede ocurrir que, debido a la aleatoriedad del muestreo, el control se prolongue durante un tiempo desmesurado, con la consiguiente repercusión en el coste.

Sin embargo, si se adopta un plan de inspección por medianas, con los mismos niveles de protección, la muestra a examinar será de

$$\frac{\pi}{2} n = 1.571n = 2s + 1$$

elementos y el control consistirá en poner simultáneamente en funcionamiento los  $2s + 1$  elementos y medir única y exclusivamente la duración de elemento que quede fuera de servicio en lugar  $s + 1$  (mediana de la distribución de duración). Dado que

$$s + 1 = (1.571n + 1)/2 \approx 0.78n$$

la decisión podrá ser tomada mucho antes que el control por medias y el coste del control se reducirá considerablemente.

#### 8.4.3 *Planes de control cuantitativo por muestreo progresivo o secuencial*

Supongamos que se desea inspeccionar una serie de lotes de piezas de forma que exista una probabilidad  $\alpha$  de rechazar aquellos lotes cuya proporción de desechos

sea igual a  $\omega_0$ , y una probabilidad  $\beta$  de aceptar aquellos lotes cuya proporción de desechos sea igual a  $\omega_1$ . Si la especificación viene definida por un límite inferior  $T_i$  y la desviación tipo de la distribución de la variable física objeto de control es  $\sigma$ , las medias correspondientes a los riesgos del proveedor ( $\alpha$ ) y del cliente ( $\beta$ ) serán, respectivamente

$$\begin{aligned} m_0 &= T_i + K_{\omega_0}\sigma \\ m_1 &= T_i + K_{\omega_1}\sigma \end{aligned}$$

Si, por el contrario, la especificación viene definida por un límite superior  $T_s$ , los valores de las medias  $m_0$  y  $m_1$  serán

$$\begin{aligned} m_0 &= T_s - K_{\omega_0}\sigma \\ m_1 &= T_s - K_{\omega_1}\sigma \end{aligned}$$

Así pues, para una especificación definida por un solo límite (superior o inferior) el paso de las condiciones de eficacia ( $\omega_0$ ,  $1 - \alpha$ ) y ( $\omega_1$ ,  $\beta$ ) a las condiciones de eficacia equivalentes ( $m_0$ ,  $1 - \alpha$ ) y ( $m_1$ ,  $\beta$ ) es inmediato.

Si  $m$  es la media real de la distribución, la probabilidad de obtener los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en una secuencia de  $n$  observaciones aleatorias será

$$P_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

En consecuencia, para las hipótesis  $H_0: m = m_0$  y  $H_1: m = m_1$  será posible escribir

$$P_{0,n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_0)^2 \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$P_{1,n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2 \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

y el logaritmo neperiano de la razón de verosimilitud será

$$\begin{aligned} \ln \frac{P_{1, n}}{P_{0, n}} &= \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - m_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \left[ n(m_0^2 - m_1^2) + 2(m_1 - m_0) \sum_{i=1}^n x_i \right] \end{aligned}$$

Así pues, de acuerdo con la teoría de Wald, el plan de inspección cuantitativa por muestreo secuencial podrá ser caracterizado de la forma siguiente:

Sea

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

la suma acumulada de los valores muestrales resultantes de la medición de  $n - 1$  piezas, tras cuyo examen se ha tomado siempre la decisión de proceder a la extracción de una pieza suplementaria, es decir, para las cuales siempre se ha verificado que

$$\ln \frac{\beta}{1 - \alpha} < \ln \frac{P_{1, k}}{P_{0, k}} < \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

$$(1 \leq k \leq n - 1)$$

Sea

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

la suma acumulada obtenida tras la extracción de la pieza número  $n$ . En estas condiciones:

— si

$$\ln \frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} \geq \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

la hipótesis  $H_0: m = m_0$  debe ser rechazada;

— si

$$\ln \frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} \leq \ln \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

la hipótesis  $H_0: m = m_0$  debe ser aceptada;

— si

$$\ln \frac{\beta}{1 - \alpha} < \ln \frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} < \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

debe procederse a la extracción de una pieza suplementaria.

Dado que

$$\ln \frac{P_{1,n}}{P_{0,n}} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[ n(m_0^2 - m_1^2) + 2(m_1 - m_0) \sum_{i=1}^n x_i \right]$$

las tres desigualdades precedentes pueden ser escritas en la forma

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{m_1 - m_0} + \frac{m_0 + m_1}{2} n = h_2 + sn$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{m_1 - m_0} + \frac{m_0 + m_1}{2} n = -h_1 + sn$$

$$-h_1 + sn < \sum_{i=1}^n x_i < h_2 + sn$$

cuando la especificación viene definida por un límite superior  $T_s$ , es decir, cuando  $m_1 > m_0$ , y en la forma

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{m_0 - m_1} + \frac{m_0 + m_1}{2} n = h_2 + sn$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{m_0 - m_1} + \frac{m_0 + m_1}{2} n = -h_1 + sn$$

$$-h_1 + sn > \sum_{i=1}^n x_i > h_2 + sn$$

cuando la especificación viene definida por un límite inferior  $T_i$ , es decir, cuando  $m_0 > m_1$ .

En ambos casos

$$h_1 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{m_1 - m_0}$$

$$h_2 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{m_1 - m_0}$$

$$s = \frac{m_0 + m_1}{2}$$

La regla de decisión podrá, pues, ser enunciada en la forma siguiente:

a) Especificación unilateral superior ( $T_s$ ) (ver figura 8.29):

— aceptar el lote si  $\sum_{i=1}^n x_i$  es igual o inferior a

$$(\sum x_i)_{An} = -h_1 + sn$$

— rechazar el lote si  $\sum_{i=1}^n x_i$  es igual o superior a

$$(\sum x_i)_{Rn} = h_2 + sn$$

— efectuar una extracción suplementaria si

$$(\sum x_i)_{An} < \sum_{i=1}^n x_i < (\sum x_i)_{Rn}$$

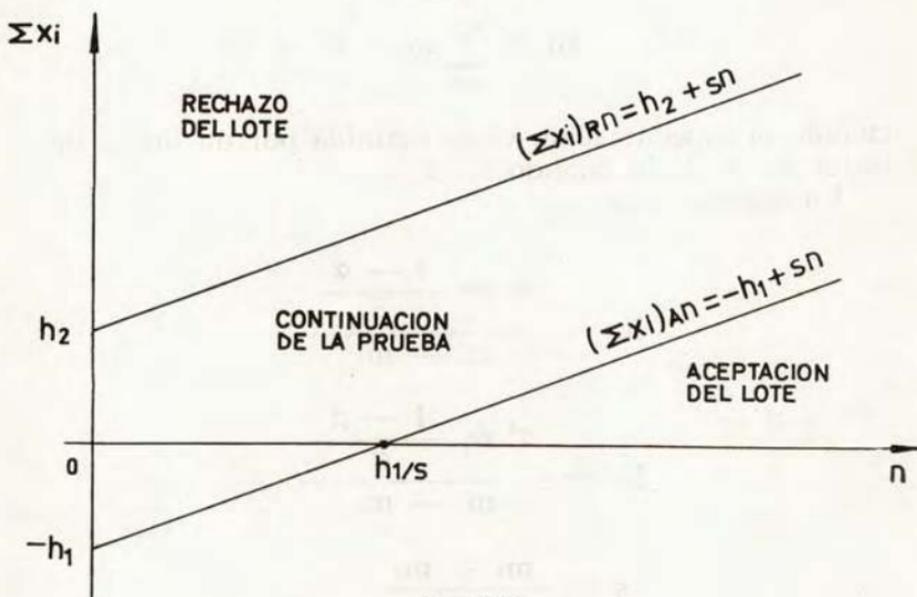


Fig. 8.29

b) Especificación unilateral inferior ( $T_1$ ) (ver figura 8.30):

— aceptar el lote si  $\sum_{i=1}^n x_i$  es igual o superior a

$$(\sum x_i)_{An} = -h_1 + sn$$

— rechazar el lote si  $\sum_{i=1}^n x_i$  es igual o inferior a

$$(\sum x_i)_{Rn} = h_2 + sn$$

— efectuar una extracción suplementaria si

$$(\sum x_i)_{Rn} < \sum_{i=1}^n x_i < (\sum x_i)_{An}$$

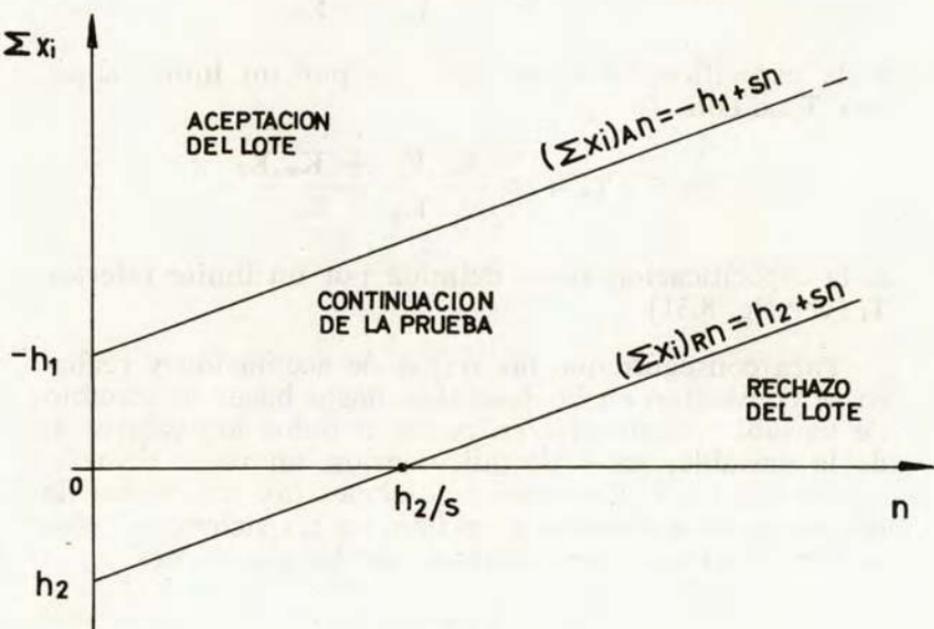


Fig. 8.30

Al igual que ocurría en el control cualitativo, los planes de inspección cuantitativa por muestreo secuencial deben truncarse cuando el efectivo examinado alcanza un valor igual al exigido por un plan de inspección equivalente por muestreo simple, es decir, cuando

$$n = \left( \frac{K_{\alpha} + K_{\beta}}{K_{\omega_0} - K_{\omega_1}} \right)^2$$

Una vez alcanzado este límite, para decidir la aceptación o el rechazo del lote bastará comparar

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

con

$$m_L = T_s - \sigma \frac{K_{\omega_1} K_{\alpha} + K_{\omega_0} K_{\beta}}{K_{\alpha} + K_{\beta}}$$

si la especificación viene definida por un límite superior  $T_s$ , o con

$$m_L = T_i + \sigma \frac{K_{\omega_1} K_{\alpha} + K_{\omega_0} K_{\beta}}{K_{\alpha} + K_{\beta}}$$

si la especificación viene definida por un límite inferior  $T_i$  (ver fig. 8.31).

Para conseguir que las rectas de aceptación y rechazo se conviertan en horizontales, basta hacer un cambio de variable consistente en restar a todos los valores  $x_i$  de la variable, antes de adicionarlos, un valor de referencia igual a  $s$ . En estas condiciones las ecuaciones de las rectas de aceptación y rechazo en un sistema de ejes  $n$ ,  $\Sigma(x_i - s)$  vendrán definidas por las ecuaciones

$$[\Sigma(x_i - s)]_{An} = -h_1$$

$$[\Sigma(x_i - s)]_{Rn} = h_2$$

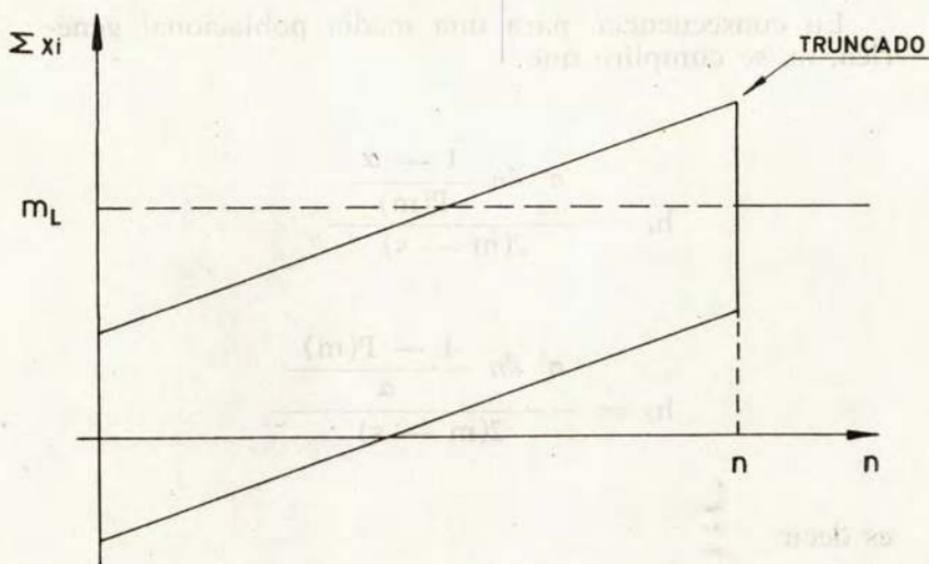


Fig. 8.31

La función de eficacia de la prueba, es decir, la probabilidad  $P(m)$  de aceptar un lote en función del valor real  $m$  de su media poblacional, puede ser deducida de forma muy simple. En efecto, como

$$s = \frac{m_0 + m_1}{2}$$

es decir, como

$$m_1 - m_0 = 2(m_1 - s)$$

la expresiones analíticas de  $h_1$  y  $h_2$  podrán ser escritas en la forma

$$h_1 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{2(m_1 - s)}$$

$$h_2 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{2(m_1 - s)}$$

En consecuencia, para una media poblacional genérica,  $m$ , se cumplirá que

$$h_1 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \alpha}{P(m)}}{2(m - s)}$$

$$h_2 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - P(m)}{\alpha}}{2(m - s)}$$

es decir

$$\frac{1 - \alpha}{P(m)} = \exp \frac{2h_1(m - s)}{\sigma^2}$$

$$\frac{1 - P(m)}{\alpha} = \exp \frac{2h_2(m - s)}{\sigma^2}$$

Eliminando  $\alpha$  resulta, finalmente

$$P(m) = \frac{1 - \exp [2h_2(m - s)/\sigma^2]}{1 - \exp [2(h_1 + h_2)(m - s)/\sigma^2]}$$

A partir de esta ecuación es posible dibujar por puntos la curva de eficacia del plan de inspección. Puede obtenerse una idea bastante aproximada de la forma de la curva de eficacia representando tan sólo los cinco puntos especificados en la tabla siguiente:

### Especificación unilateral superior

$m$	$P(m)$
$-\infty$	1
$m_0$	$1 - \alpha$
$s = \frac{m_0 + m_1}{2}$	$\frac{h_2}{h_1 + h_2}$
$m_1$	$\beta$
$+\infty$	0

### Especificación unilateral inferior

$m$	$P(m)$
$-\infty$	0
$m_1$	$\beta$
$s = \frac{m_0 + m_1}{2}$	$\frac{h_2}{h_1 + h_2}$
$m_0$	$1 - \alpha$
$+\infty$	1

Para comprobar la igualdad

$$P(s) = \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$

basta calcular el límite de la función  $P(m)$  cuando  $m$  tiende a  $s$ , haciendo uso de la regla de L'Hôpital para eliminar la indeterminación  $0/0$ .

Para calcular la extensión media de la muestra a controlar en función del valor de la media poblacional basta tener en cuenta que, en este caso

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(m) &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} \left[ n(m_0^2 - m_1^2) + 2(m_1 - m_0)nm \right] \right\} = \\ &= \frac{m_0^2 - m_1^2}{2\sigma^2} + \frac{m(m_1 - m_0)}{\sigma^2} = \frac{m_1 - m_0}{\sigma^2} (m - s) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \bar{n}(m) &= \frac{\ln \frac{1 - \beta}{\alpha} - P(m) \left[ \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} + \ln \frac{1 - \alpha}{\beta} \right]}{\frac{m_1 - m_0}{\sigma^2} (m - s)} \\ &= \frac{h_2 - P(m)(h_1 + h_2)}{m - s} \end{aligned}$$

A partir de esta expresión es posible dibujar por puntos la curva de extracciones medias del plan de inspección. Puede obtenerse una idea bastante aproximada de su forma representando tan sólo los cinco puntos especificados en la tabla siguiente:

### Especificación unilateral inferior

$m$	$\bar{n}(m)$
$-\infty$	$1^{(*)}$
$m_0$	$\frac{\alpha(h_1 + h_2) - h_1}{m_0 - s}$

$$s = \frac{m_0 + m_1}{2} \qquad \frac{h_1 h_2}{\sigma^2}$$

$m_1$	$\frac{h_2 - \beta(h_1 + h_2)}{m_1 - s}$
$+\infty$	$1^{(*)}$

### Especificación unilateral superior

$m$	$\bar{n}(m)$
$-\infty$	$1^{(*)}$

$m_1$	$\frac{h_2 - \beta(h_1 + h_2)}{m_1 - s}$
-------	--

$$s = \frac{m_0 + m_1}{2} \qquad \frac{h_1 h_2}{s}$$

$m_0$	$\frac{\alpha(h_1 + h_2) - h_1}{m_0 - s}$
$+\infty$	$1^{(*)}$

Cuando la especificación viene definida por dos límites, uno superior,  $T_s$ , y otro inferior,  $T_i$ , el plan de inspección secuencial debe ser planteado de forma ligeramente distinta. Nos referiremos exclusivamente al caso en que, por los métodos descritos en el párrafo 7.2.3, las condiciones de eficacia  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  pueden ser expresadas en la forma  $(m_0, 1 - \alpha)$ ,  $(m_{1s}, \beta)$  y  $(m_{1i}, \beta)$ , siendo  $m_0$  una media de aceptación situada en el centro del intervalo de especificación y  $m_{1s}$  y  $m_{1i}$  dos medias de rechazo superior e inferior, respectivamente (ver fig. 8.32).

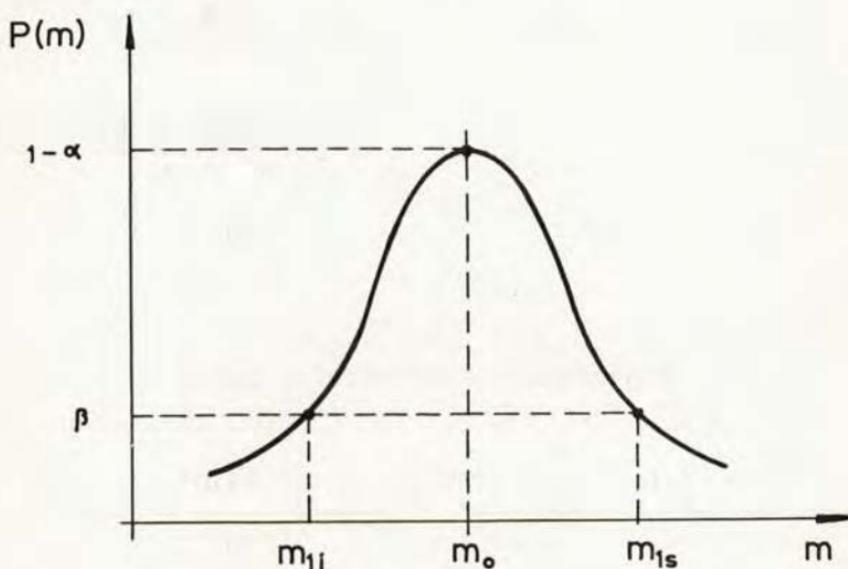


Fig. 8.32

En este caso deben plantearse, en principio, dos planes de inspección con especificación unilateral (superior o inferior) y un riesgo de primera especie igual a  $\alpha/2$ . De su posterior combinación surge el plan de inspección con especificación bilateral y un riesgo de primera especie igual a  $\alpha$ .

Consideremos en primer lugar el límite superior de especificación. El plan de inspección secuencial con las

condiciones de eficacia  $(m_0, 1 - \alpha/2)$  y  $(m_{1s}, \beta)$  vendrá caracterizado por las siguientes rectas límites:

$$(\Sigma X_i)_{An} = -h'_1 + s'n$$

$$(\Sigma X_i)_{Rn} = h'_2 + s'n$$

siendo

$$h'_1 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \alpha/2}{\beta}}{m_{1s} - m_0}$$

$$h'_2 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha/2}}{m_{1s} - m_0}$$

$$s' = \frac{m_0 + m_{1s}}{2}$$

Si en lugar de adoptar como función discriminante el estadístico  $\Sigma X_i$ , utilizamos el estadístico  $\Sigma(x_i - m_0)$ , las ecuaciones de las rectas límites serán (ver fig. 8.33)

$$[\Sigma(x_i - m_0)]_{An} = -h'_1 + (s' - m_0)n = -h'_1 + s^*n$$

$$[\Sigma(x_i - m_0)]_{Rn} = h'_2 + (s' - m_0)n = h'_2 + s^*n$$

siendo

$$s^* = s' - m_0 = \frac{m_{1s} - m_{1l}}{4}$$

Si consideramos ahora el límite inferior de especificación, el correspondiente plan de inspección secuencial

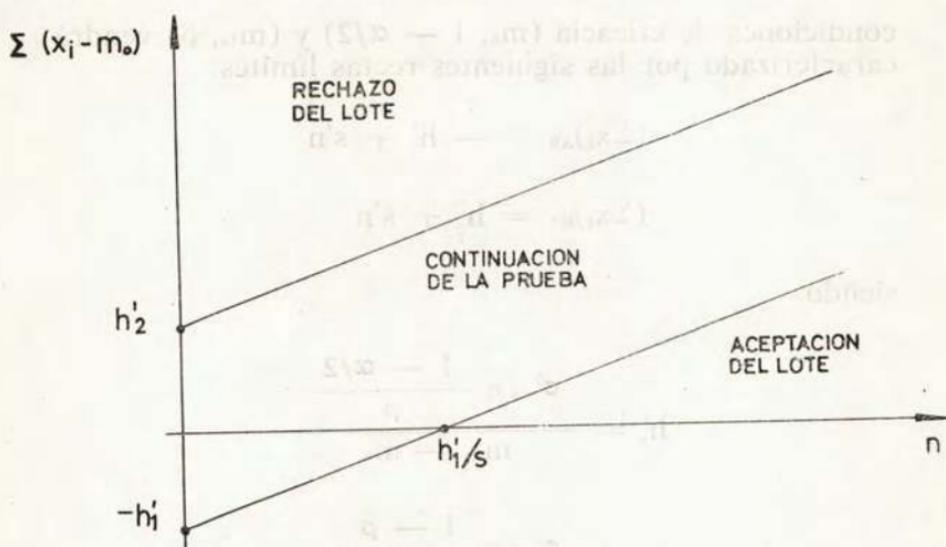


Fig. 8.33

con las condiciones de eficacia  $(m_0, 1 - \alpha/2)$  y  $(m_{11}, \beta)$  vendrá caracterizado por las siguientes rectas límites

$$(\Sigma X_i)_{An} = -h'_1 + s''n$$

$$(\Sigma X_i)_{Rn} = h'_2 + s''n$$

siendo

$$h'_1 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \alpha/2}{\beta}}{m_{11} - m_0} = -h'_1$$

$$h'_2 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha/2}}{m_{11} - m_0} = -h'_2$$

$$s'' = \frac{m_{11} + m_0}{2}$$

y adoptando como función discriminante el estadístico  $\Sigma(x_i - m_0)$ , las ecuaciones de las rectas límites serán (ver fig. 8.34)

$$[\Sigma(x_i - m_0)]_{An} = -h'_1 + (s'' - m_0)n = h'_1 - s^*n$$

$$[\Sigma(x_i - m_0)]_{Rn} = h'_2 + (s'' - m_0)n = -h'_2 - s^*n$$

toda vez que

$$s'' - m_0 = \frac{m_{11} + m_0}{2} - m_0 = \frac{m_{11} - m_{1s}}{4} = -s^*$$

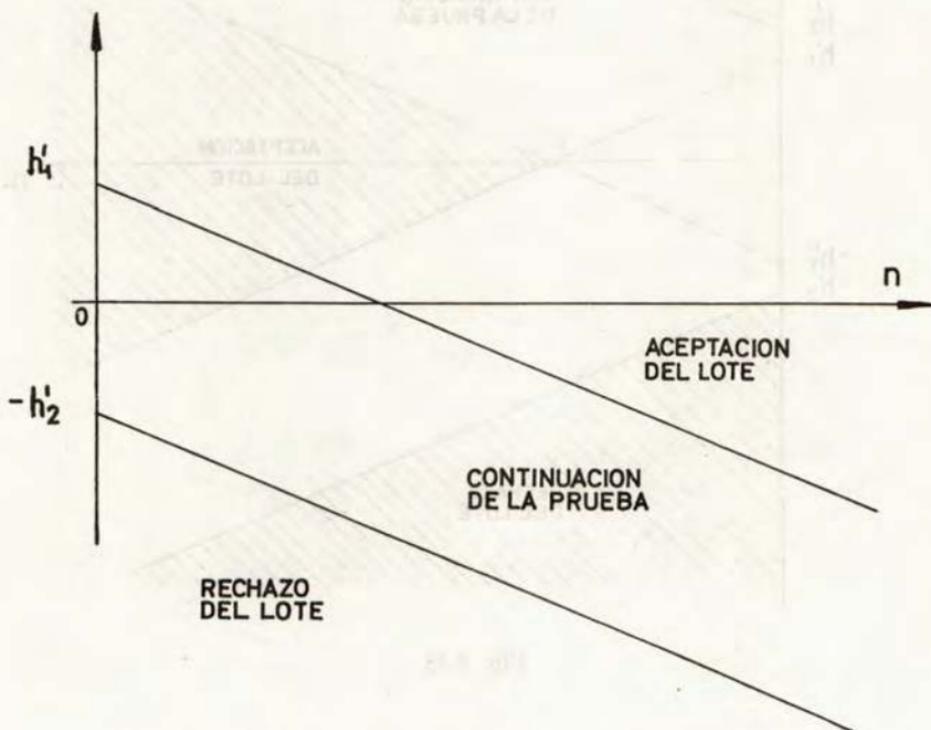


Fig. 8.34

De la fusión de las figuras 8.33 y 8.34 resulta la figura 8.35, que es la representación gráfica del plan de ins-

pección con especificación bilateral y un riesgo de primera especie igual a  $\alpha$ .

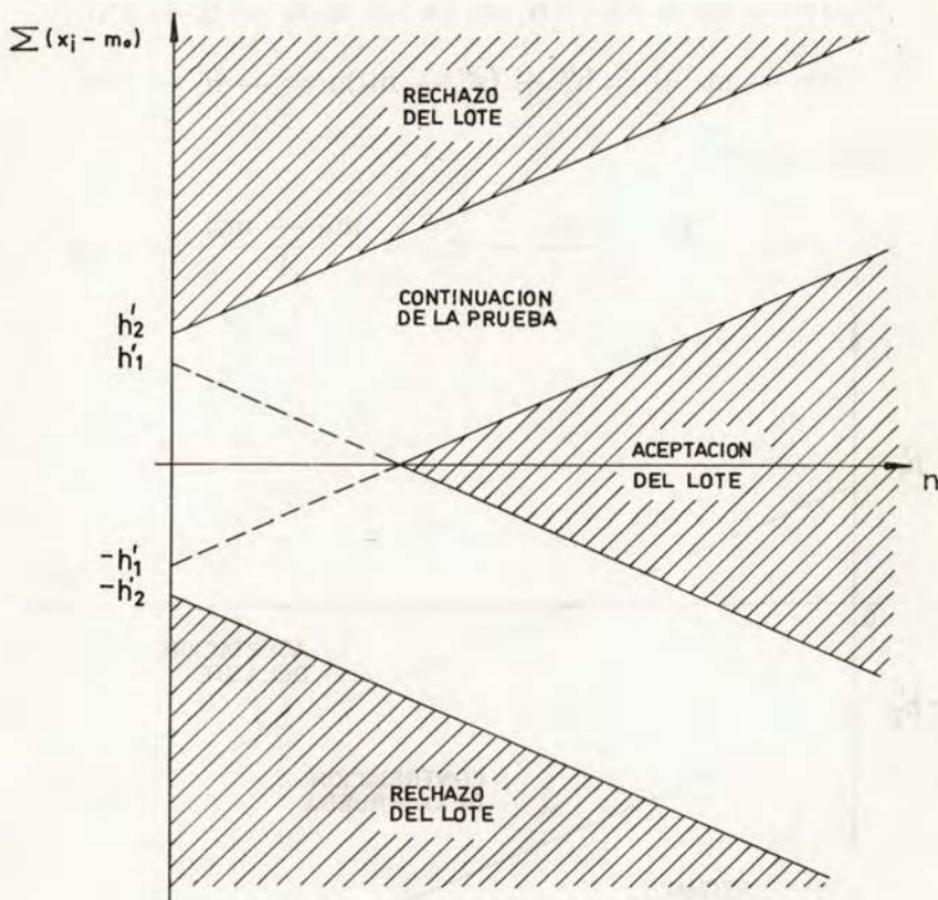


Fig. 8.35

Como aplicación de los conceptos desarrollados en este párrafo, supongamos el siguiente caso particular:  $T_1 = 200$ ,  $\sigma = 20$ ,  $\omega_0 = 5\%$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $\omega_1 = 5\%$ ,  $\beta = 10\%$ .

En este caso se tiene

$$m_0 = T_i + K_{\omega_0} \sigma = 200 + 2.575 \times 20 = 251.5$$

$$m_1 = T_i + K_{\omega_1} \sigma = 200 + 1.645 \times 20 = 232.9$$

$$s = \frac{m_0 + m_1}{2} = 242.2$$

$$h_1 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{m_1 - m_0} = \frac{20^2 \ln \frac{0.95}{0.10}}{232.9 - 251.5} = -48.415$$

$$h_2 = \frac{\sigma^2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{m_1 - m_0} = \frac{20^2 \ln \frac{0.90}{0.05}}{232.9 - 251.5} = -62.159$$

y, en consecuencia, las ecuaciones de las rectas de aceptación y rechazo serán:

$$(\Sigma X_i)_{An} = 48.415 + 242.2n$$

$$(\Sigma X_i)_{Rn} = -62.159 + 242.2n$$

En la tabla adjunta se dan una serie de valores que permiten el trazado de las curvas de eficacia y de extracciones medias. Dichas curvas se han representado gráficamente en las figuras 8.36 y 8.37.

m	P(m)	$\bar{n}(m)$
228	0.0318	4.13
230	0.0511	4.63
232	0.0814	5.21
232.9	0.1000	5.49
234	0.1280	5.85
236	0.1969	6.51
238	0.2924	7.10
240	0.4132	7.49
242	0.5485	7.54
242.2	0.5622	7.52
244	0.6797	7.22
246	0.7896	6.62
248	0.8704	5.88
250	0.9238	5.13
251.5	0.9500	4.61
252	0.9567	4.45
254	0.9759	3.88
256	0.9868	3.40

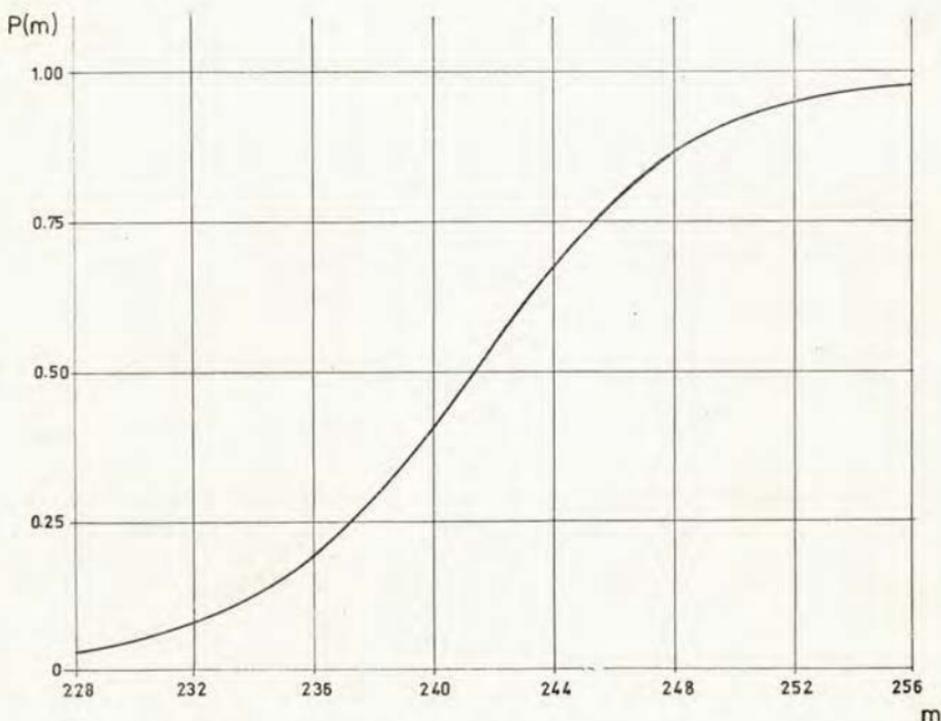


Fig. 8.36

Puede observarse que, para un lote de media igual a 232.9 (calidad rechazable), la decisión se toma, en promedio, después de 5.49 observaciones, mientras que, para un lote de media 251.5 (calidad aceptable), bastan, en promedio, 4.61 observaciones. El máximo valor del número medio de extracciones es aproximadamente 7.54. Si el control se realizase mediante un plan de muestreo simple, el tamaño de la muestra a examinar sería

$$n = \left( \frac{K_\alpha + K_\beta}{K_{\omega_0} - K_{\omega_1}} \right)^2 = \left( \frac{1.645 + 1.282}{2.575 - 1.645} \right)^2 = 10$$

es decir, un 25 % más grande, aproximadamente, que el valor máximo 7.54.

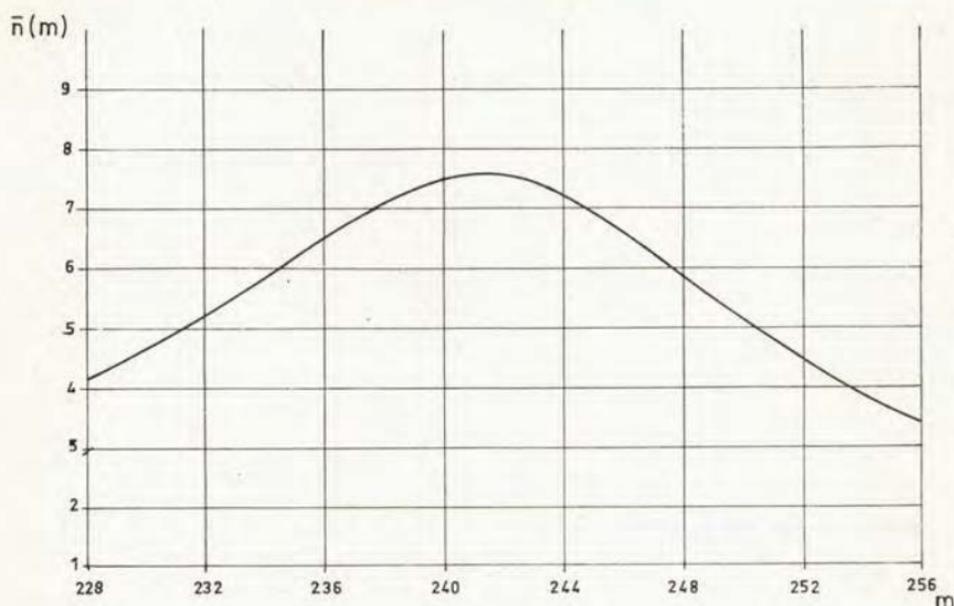


Fig. 8.37

#### 8.4.4 Control de la media y de la dispersión de un suministro

En algunas ocasiones, las condiciones de eficacia no vienen dadas en función de la proporción de desechos, sino en función de un parámetro de la distribución de la variable física objeto de control (media o desviación tipo).

Para el control de la media o de la desviación tipo de un suministro, por muestreo simple, puede seguirse cualquiera de los métodos expuestos en el capítulo 6.

Para el control de la media por muestreo progresivo o secuencial puede aplicarse el plan de inspección descrito en el párrafo precedente.

Para el control de la desviación tipo por muestreo progresivo o secuencial puede seguirse el método que a continuación pasamos a describir.

En este caso se trata de probar la hipótesis  $H_0: \sigma \leq \sigma_0$  contra la hipótesis  $H_1: \sigma > \sigma_0$ . Se desea que, cuando la desviación tipo de la variable física objeto de control sea  $\sigma_0$  (calidad aceptable), el riesgo de rechazar el suministro sea igual a  $\alpha$ , mientras que cuando la desviación tipo sea  $\sigma_1$  (calidad rechazable), el riesgo de aceptar el suministro sea  $\beta$ .

Supongamos en primer lugar que la media  $m$  de la distribución sea conocida. La probabilidad de obtener los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en una secuencia de  $n$  observaciones aleatorias será:

$$P_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

En consecuencia para las hipótesis  $H_0$  y  $H_1$  será posible escribir

$$P_{0, n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_0^n} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$P_{1, n} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1^n} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

y el logaritmo neperiano de la razón de verosimilitudes será

$$\begin{aligned} \ln \frac{P_{1, n}}{P_{0, n}} = & -n \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \end{aligned}$$

Así pues, de acuerdo con la teoría de Wald, el plan de inspección cuantitativa por muestreo secuencial podrá ser caracterizado de la forma siguiente:

Sea

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - m)$$

la suma acumulada de las desviaciones respecto de la media de los valores muestrales resultantes de la medición de  $n - 1$  piezas, tras cuyo examen se ha tomado siempre la decisión de proceder a la extracción de una pieza suplementaria, es decir, para las cuales siempre se ha verificado que

$$\ln \frac{\beta}{1 - \alpha} < \ln \frac{P_{1, k}}{P_{0, n}} < \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

$$(1 \leq k \leq n - 1)$$

Sea

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)$$

la suma acumulada tras la extracción de la pieza número  $n$ . En estas condiciones

— si

$$\ln \frac{P_{1, n}}{P_{0, n}} \geq \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

la hipótesis  $H_0$  debe ser aceptada;

— si

$$\ln \frac{P_{1, n}}{P_{0, n}} \leq \ln \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

la hipótesis  $H_0$  debe ser rechazada;

— si

$$\ln \frac{\beta}{1 - \alpha} < \ln \frac{P_{1, n}}{P_{0, n}} < \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

debe procederse a la extracción de una pieza suplementaria.

Dado que

$$\begin{aligned} \ln \frac{P_{1, n}}{P_{0, n}} = & -n \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \end{aligned}$$

las tres desigualdades precedentes pueden ser escritas en la forma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \leq & \frac{2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} + \frac{2 \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} n = \\ & = h_2 + sn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \geq & \frac{-2 \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} + \frac{2 \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} n = \\ & = -h_1 + sn \end{aligned}$$

$$-h_1 + sn < \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 < h_2 + sn$$

siendo

$$h_1 = \frac{2 \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}$$

$$h_2 = \frac{2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}$$

$$s = \frac{2 \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}}$$

Así, el plan de inspección por muestreo secuencial puede ser representado gráficamente en este caso mediante dos rectas paralelas, la recta de aceptación

$$[\Sigma(x_i - m)^2]_{An} = -h_1 + sn$$

y la recta de rechazo

$$[\Sigma(x_i - m)^2]_{Rn} = h_1 + sn$$

La determinación de la función de eficacia del plan de inspección puede realizarse a partir de las expresiones analíticas de los parámetros  $h_1$ ,  $h_2$  y  $s$ , las cuales, para un valor genérico  $\sigma$  de la desviación tipo, se escriben en la forma

$$h_1 = \frac{\ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right)}$$

$$h_2 = \frac{\ln \frac{1 - P}{\alpha}}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right)}$$

$$s = \frac{\ln \frac{\sigma}{\sigma_0}}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right)}$$

Efectuando el cambio de variable

$$x = - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right)$$

las tres ecuaciones precedentes se reducen al sistema

$$\lambda^2 = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{1 - \exp(-2xs)}{2x}$$

$$P(\lambda^2) = \frac{\exp[(h_1 + h_2)x] - \exp(h_1x)}{\exp[(h_1 + h_2)x] - 1}$$

que es la representación paramétrica de la función de eficacia. Dando valores al parámetro  $x$  pueden obtenerse parejas de valores  $[\lambda^2, P(\lambda^2)]$  que permiten el trazado por puntos de la curva de eficacia. El parámetro  $x$  puede variar entre  $-\infty$  e  $\infty$ .

Puede obtenerse una idea bastante aproximada de la curva de eficacia, representando tan sólo los cinco puntos siguientes

$$\sigma = 0 \ (\lambda^2 = 0) \qquad P(0) = 1$$

$$\sigma = \sigma_0 \ (\lambda^2 = 1) \qquad P(\sigma_0) = 1 - \alpha$$

$$\sigma = \sqrt{s} \ (\lambda^2 = s/\sigma_0^2) \qquad P(\sqrt{s}) = \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$

$$\sigma = \sigma_1 \quad (\lambda^2 = \sigma_1^2/\sigma_0^2) \quad P(\sigma_1) = \beta$$

$$\sigma = \infty \quad (\lambda^2 = \infty) \quad P(\infty) = 0$$

El punto  $[s/\sigma_0^2, h_2/(h_1 + h_2)]$  es el correspondiente a  $x = 0$ . Para comprobarlo basta calcular el límite de las funciones  $\lambda^2$  y  $P(\lambda^2)$  cuando  $x$  tiende a cero, aplicando la regla de L'Hôpital para eliminar la indeterminación  $0/0$ .

Para calcular la extensión media de la muestra a controlar en función del parámetro  $\lambda^2$ , basta tener en cuenta que, en este caso

$$\begin{aligned} \bar{(\lambda^2)} &= \frac{1}{n} \left[ -n \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) n \sigma^2 \right] = \\ &= -\ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \sigma^2 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \bar{n}(\lambda^2) &= \\ &= \frac{\ln \frac{1 - \beta}{\alpha} - P(\lambda^2) \left[ \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} + \ln \frac{1 - \alpha}{\beta} \right]}{-\ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) \sigma^2} = \\ &= \frac{h_2 - P(\lambda^2)(h_1 + h_2)}{\sigma_0^2 \lambda^2 - s} \end{aligned}$$

A partir de esta expresión es posible dibujar por puntos la curva de extracciones medias del plan de inspección. Puede obtenerse una idea bastante aproximada de su forma representando los cinco puntos siguientes

$$\sigma = 0 \ (\lambda^2 = 0) \quad \bar{n}(0) = h_1/s$$

$$\sigma = \sigma_0 \ (\lambda^2 = 1) \quad \bar{n}(\sigma_0) = \frac{\alpha(h_1 + h_2) - h_1}{\sigma_0^2 - s}$$

$$\sigma = \sqrt{s} \ (\lambda^2 = s/\sigma_0^2) \quad \bar{n}(\sqrt{s}) = h_1 h_2 / 2s^2$$

$$\sigma = \sigma_1 \ (\lambda^2 = \sigma_1^2/\sigma_0^2) \quad \bar{n}(\sigma_1) = \frac{h_2 - \beta(h_1 + h_2)}{\sigma_1^2 - s}$$

$$\sigma = \infty \ (\lambda^2 = \infty) \quad \bar{n}(\infty) = 0$$

Cuando la media de la distribución de la variable física objeto de control es desconocida, Girschick<sup>3</sup> y Stein han demostrado que se puede reemplazar  $m$  por su estimación  $\bar{x}$  debiendo tomarse como nuevas rectas límites

$$[\Sigma(x_i - \bar{x})^2]_{An} = -h_1 + s(n-1)$$

$$[\Sigma(x_i - \bar{x})^2]_{Rn} = h_2 + s(n-1)$$

Los parámetros  $h_1$ ,  $h_2$  y  $s$  tienen las expresiones analíticas ya obtenidas en el caso de media poblacional conocida.

Así pues, en este caso, se tratará de determinar en cada etapa del muestreo el valor de

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}$$

La función de eficacia no sufre ninguna modificación y la extensión media de la muestra a controlar aumenta en una unidad, es decir

$$\bar{n}(\lambda^2) = \frac{h_2 - P(\lambda^2)(h_1 + h_2)}{\sigma_0^2 \lambda^2 - s} + 1$$

<sup>3</sup> *The Annals of Mathematical Statistics*, junio, 1946.

Tanto si la media es conocida como si no lo es, las rectas límites inclinadas pueden convertirse en horizontales mediante un cambio de variable adecuado.

Cuando la media es conocida basta restar de cada sumando el valor  $s$ , con lo que, al cabo de la extracción número  $n$ , se tendrá

$$\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 - sn$$

Cuando la media es desconocida basta restar de cada sumando, excepto del primero, el valor  $s$ , con lo que, al cabo de la extracción número  $n$ , se tendrá

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - s(n-1) = x_1^2 + \sum_{i=2}^n (x_i^2 - s) - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}$$

Como ejemplo de aplicación, supongamos el siguiente caso particular:  $\sigma_0^2 = 150$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $\sigma_1^2 = 300$ ,  $\beta = 10\%$ ,  $m = 1000$ .

En este caso se tiene

$$h_1 = \frac{2 \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} = \frac{2 \ln \frac{0.95}{0.10}}{\frac{1}{150} - \frac{1}{300}} = 1350.775$$

$$h_2 = \frac{2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} = \frac{2 \ln \frac{0.90}{0.10}}{\frac{1}{150} - \frac{1}{300}} = 1734.223$$

$$s = \frac{\ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2}{\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}} = \frac{\ln \frac{300}{150}}{\frac{1}{150} - \frac{1}{300}} = 207.944$$

y, en consecuencia, las ecuaciones de las rectas de aceptación y rechazo serán

$$[\Sigma(x_i - 1\,000)^2]_{An} = -1\,350.775 + 207.944n$$

$$[\Sigma(x_i - 1\,000)^2]_{Rn} = 1\,734.223 + 207.944n$$

En la tabla adjunta se muestra el esquema de cálculo de una serie de valores que permiten el trazado por puntos de las curvas de eficacia y de extracciones medias. Dichas curvas se han representado gráficamente en las figuras 8.38 y 8.39

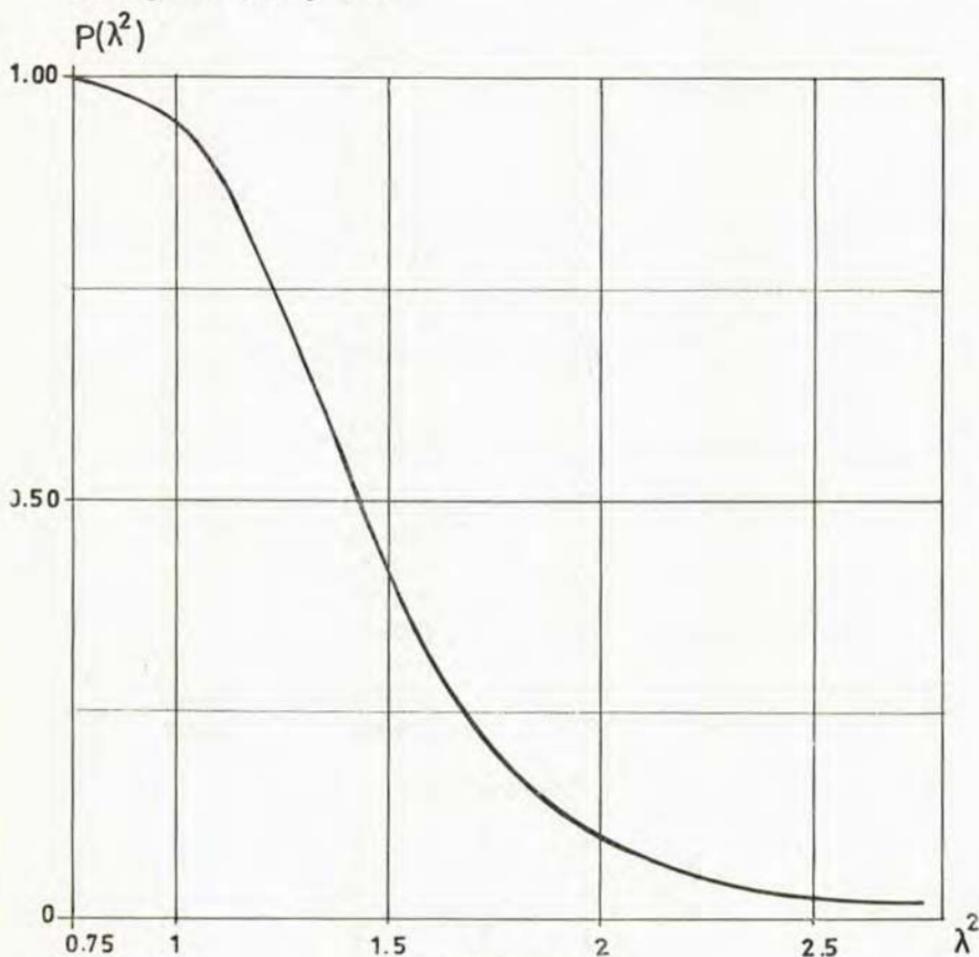


Fig. 8.38

x	$\lambda^2$	$P(\lambda^2)$	$\bar{n}(\lambda^2)$
— 0.0050	4.67	0.0012	3.52
— 0.0040	3.57	0.0045	5.26
— 0.0030	2.76	0.0173	8.17
— 0.0020	2.16	0.0651	13.17
— 0.0018	2.06	0.0844	14.52
* — 0.0016	2.00	0.1000	15.49
— 0.0016	1.97	0.1088	15.99
— 0.0014	1.88	0.1395	17.57
— 0.0012	1.80	0.1774	19.23
— 0.0010	1.72	0.2235	20.93
— 0.0008	1.64	0.2782	22.59
— 0.0006	1.57	0.3412	24.14
— 0.0004	1.51	0.4111	25.46
— 0.0002	1.45	0.4858	26.47
* 0.0000	1.39	0.5621	27.09
0.0002	1.33	0.6365	27.28
0.0004	1.28	0.7057	27.05
0.0006	1.23	0.7673	26.46
0.0008	1.18	0.8197	25.59
0.0010	1.13	0.8629	24.53
0.0012	1.09	0.8973	23.38
0.0014	1.05	0.9241	22.19
0.0016	1.01	0.9444	21.03
* 0.0016	1.00	0.9500	20.65
0.0018	0.98	0.9596	19.92
0.0020	0.94	0.9709	18.89
0.0022	0.91	0.9791	17.93
0.0024	0.88	0.9850	17.08
0.0026	0.85	0.9893	16.30
0.0028	0.82	0.9924	15.60
0.0030	0.79	0.9946	14.97

Observaciones

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right)$$

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$$

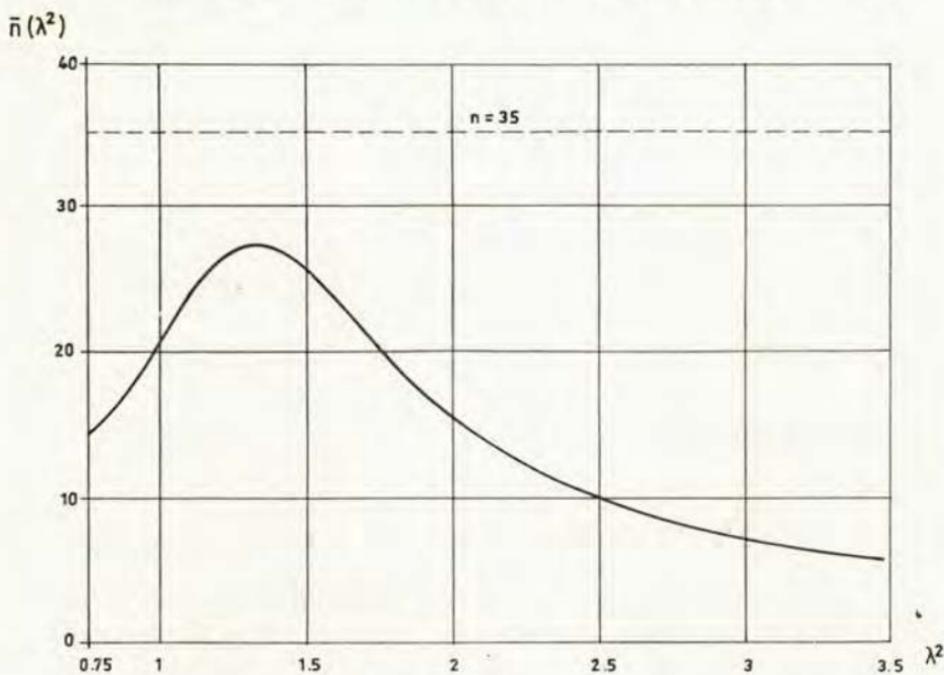


Fig. 8.39

Puede observarse que, para un lote de variancia igual a 150 (calidad aceptable), la decisión se toma, en promedio, tras el examen de 15.49 piezas, mientras que, para un lote de variancia 300 (calidad rechazable), bastan, en promedio, 20.65 observaciones. El valor máximo del número medio de extracciones es, aproximadamente, 27.28.

Si el control se realizase mediante un plan de muestreo simple, el tamaño de la muestra a examinar sería de 35 piezas, según puede deducirse fácilmente entrando en la tabla 13 con

$$\lambda_{\beta}^2 = \left( \frac{\tau}{\sigma_0} \right)^2 = 2$$

en la columna correspondiente a los riesgos de error  $\alpha = 5\%$  y  $\beta = 10\%$ . Así pues, en el peor de los casos, la economía lograda con el plan de muestreo secuencial es, aproximadamente, del 22%.

## CAPITULO 9

### *CONTROL EN CURSO DE FABRICACION*

#### 9.1 INTRODUCCION

##### 9.1.1 *Variabilidad de las fabricaciones*

Según ya tuvimos ocasión de comentar en los párrafos 1.1 y 8.1, todo proceso de fabricación y de control incorpora un cierto sistema de causas de fluctuación. A la intervención de estas fuentes de perturbación, incontroladas unas e incontrolables otras, se debe la variabilidad de las fabricaciones, es decir, la existencia para cualquier magnitud física común a las distintas unidades de la fabricación de una distribución de las medidas en torno a un determinado valor medio.

Para reducir al mínimo el número de elementos fuera de especificación generados en un proceso productivo, debe procurarse reducir dentro de lo posible el campo de acción de la variabilidad, mediante el empleo de técnicas adecuadas de control.

El primero en aplicar los métodos de la estadística matemática al control de la calidad de las fabricaciones fue el ingeniero Walter A. Shewhart, de la Bell Telephone Company, quien en un memorándum publicado en 1924 estableció los principios de la teoría de los gráficos de control.

La base de esta teoría es la diferenciación entre causas de fluctuación «aleatorias» y causas de fluctuación «asignables».

Se llaman causas aleatorias aquellas que se comportan de forma aleatoria, es decir, que dan lugar a variabilidades en las que no es posible apreciar ráfagas<sup>1</sup>, ciclos o cualquier otro modelo de variación determinista.

Siguiendo a Shewhart, diremos que una fabricación se halla «bajo control estadístico» cuando la distribución obtenida para las medidas de la variable física común a las distintas piezas de la fabricación puede considerarse como una población en el sentido estadístico de la palabra, es decir, cuando es posible determinar la probabilidad de que las medidas de las piezas que el proceso productivo va generando de forma continua se sitúen dentro de unos límites dados.

La variabilidad de una fabricación bajo control puede ser caracterizada, en consecuencia, mediante una ley de probabilidad perfectamente determinada. Si  $f(x)$  es la función de densidad de probabilidad de dicha ley, la fabricación se hallará bajo control mientras se cumpla la condición

$$\begin{aligned}
 P_r\{L_1 \leq x \leq L_2\} &= \int_{L_1}^{L_2} f(x)dx = \\
 &= \{\text{Cte. a lo largo del proceso de fabricación}\}
 \end{aligned}$$

Al sistema de causas de fluctuación correspondientes a una fabricación bajo control se le denomina sistema estable de causas aleatorias.

Dado que, en general, las causas aleatorias de fluctuación son muy numerosas, de pequeña importancia individual y de efectos aditivos, se comprende que en la mayoría de los casos prácticos sea posible adoptar para la variabilidad un modelo normal  $N(m, \sigma)$ .

Cuando la variabilidad observada en la fabricación no puede ser explicada de forma razonable por un modelo aleatorio, se dice que dicha fabricación está perturba-

<sup>1</sup> Sucesión de observaciones de la misma clase.

da por una o más causas de fluctuación «asignables» y que, en consecuencia, se halla «fuera de control».

Pueden ser causas asignables el desgaste de las máquinas, la falta de homogeneidad en la calidad de los materiales a lo largo del proceso de fabricación, las diferencias entre máquinas cuando son varias las máquinas del mismo tipo que contribuyen a la producción global, las diferencias entre trabajadores cuando la mano de obra que interviene en el proceso no es homogénea en lo que al grado de formación profesional se refiere, etcétera.

Las causas asignables pueden dar lugar en general a dos tipos distintos de modificación de la variabilidad:

- modificación por descentrado (fig. 9.1a), y
- modificación por aumento de la dispersión (figura 9.1b).

Las modificaciones del primer tipo se observan sobre todo en procesos de fabricación automáticos, mientras que en los procesos de fabricación semiautomáticos son más frecuentes las modificaciones del segundo tipo.

En la práctica ambos tipos de modificaciones se mezclan y confunden, dando lugar en cualquier caso a un incremento del número de piezas fuera de especificación.

Si bien es imposible luchar contra las causas aleatorias de fluctuación en un proceso de fabricación determinado que funcione bajo condiciones esencialmente invariables, no ocurre lo mismo con las causas asignables, las cuales son siempre detectables y susceptibles de corrección.

Las técnicas de control en curso de fabricación tienen por objeto mantener a la fabricación en estado de control estadístico, es decir, mantener estable la variabilidad propia del proceso, y detectar con la mayor eficacia posible la aparición de causas asignables de fluctuación.

De todas formas, la rigidez con la que debe vigilarse la estabilidad de la variabilidad depende mucho del grado de aptitud del proceso productivo para el trabajo que se le confía.

En efecto, cuando el proceso es poco o justamente apto para el trabajo que se le confía, es decir, cuando el intervalo de especificación ( $T_s - T_i$ ) es igual o menor

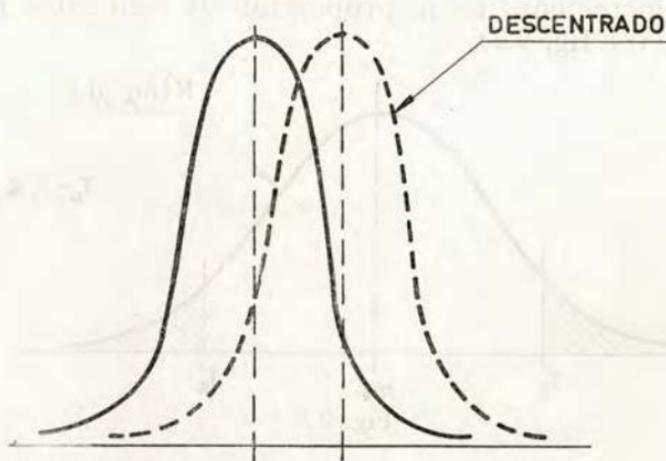


Fig. 9.1a

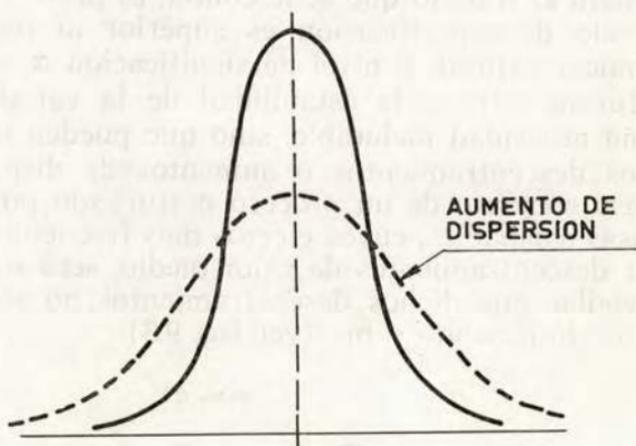
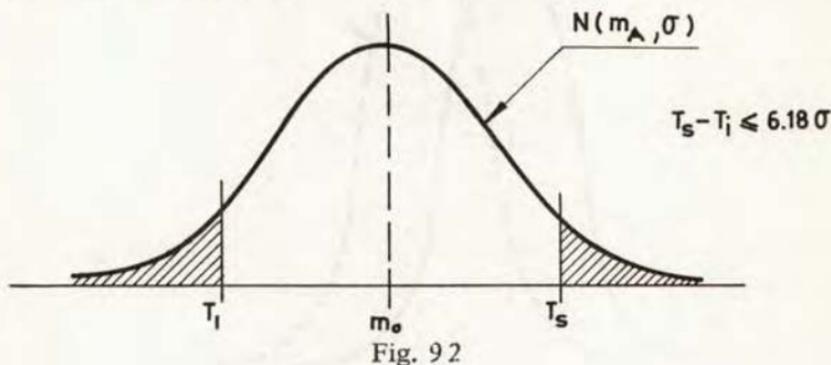


Fig. 9.1b

que el intervalo de tolerancia natural ( $2K_{\alpha/2}\sigma$ ) de la variabilidad propia del proceso, a un nivel de significación  $\alpha$  suficientemente bajo (generalmente se considera  $\alpha = 0.002$ ), debe vigilarse de forma estricta la estabilidad de la variabilidad toda vez que cualquier descentramiento o aumento de la dispersión se traduce necesariamente

en un incremento de la proporción de elementos defectuosos (ver fig. 9.2).



Por el contrario, cuando el proceso es sobradamente preciso para el trabajo que se le confía, es decir, cuando el intervalo de especificación es superior al intervalo de tolerancia natural al nivel de significación  $\alpha$ , el vigilar de forma estricta la estabilidad de la variabilidad no es una necesidad ineludible, sino que pueden tolerarse ciertos descentramientos o aumentos de dispersión. En el caso concreto de un proceso perturbado por posibles causas asignables, cuyos efectos más frecuentes sean provocar descentramientos de valor medio, será suficiente con vigilar que dichos descentramientos no sobrepasen ciertos límites  $m_{o1}$  y  $m_{o2}$  (ver fig. 9.3).

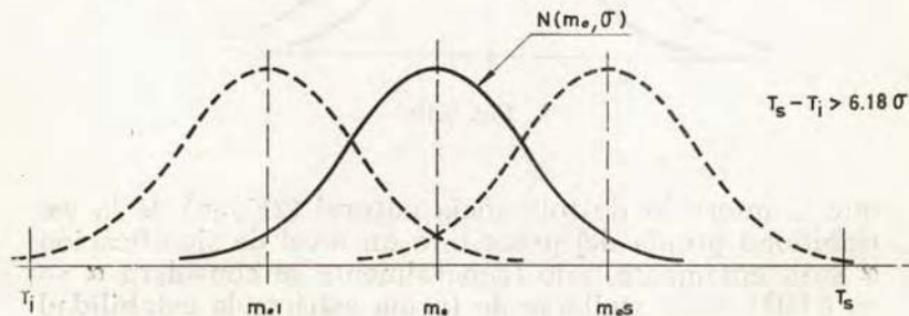


Fig. 9.3

### 9.1.2 Teoría de los gráficos de control

Un gráfico de control es una herramienta matemática que permite:

- caracterizar de forma concreta lo que se entiende por estado de control estadístico;
- alcanzar dicho estado, partiendo de un estado inicial en el que el proceso se halla fuera de control;
- comprobar la estabilidad del estado de control a lo largo del proceso de fabricación.

Supongamos un proceso de fabricación determinado, de cuya producción extraemos, a intervalos de tiempo regulares, muestras aleatorias de idéntica extensión. Si para cada muestra determinamos la media muestral  $\bar{x}$ , no obtendremos un valor fijo sino una distribución de valores. Si el proceso no se halla perturbado por ninguna causa asignable, las fluctuaciones muestrales de  $\bar{x}$  se distribuirán de acuerdo con una ley normal, o asintóticamente normal cuando la variabilidad del proceso siga cualquier otro tipo de ley, conocida o no.

Si el número de observaciones aleatorias efectuado es suficientemente grande, se podrá proceder a la estimación de los parámetros  $m$  y  $\sigma$  de la variabilidad de la fabricación y, en consecuencia, de los parámetros  $m$  y  $\sigma/\sqrt{n}$  de la ley de distribución de las medias muestrales. En efecto, si  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$  son las medias muestrales correspondientes a las  $k$  muestras extraídas, y  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_k$  son las correspondientes desviaciones tipo muestrales determinadas de acuerdo con la expresión

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\sum^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n}}$$

los estadísticos

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i}{k}$$

$$\sigma^* = \frac{\sum_{i=1}^k \sigma'_i}{kb_n}$$

serán estimadores absolutamente correctos de la media  $m$  y de la desviación tipo  $\sigma$  de la variabilidad poblacional, respectivamente.

Estimados estos parámetros, siempre será posible encontrar dos límites situados uno por encima y otro por debajo de la media y tales que la probabilidad de que cualquier media muestral  $\bar{x}$  se sitúe entre ellos sea precisamente igual a 0.998.

Dichos límites serán

$$L_{is} = m^* + 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ii} = m^* - 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

Si sobre un sistema cartesiano con el eje vertical graduado en unidades de  $\bar{x}$  y con el eje horizontal graduado con respecto al tiempo o de cualquiera otra manera que permita ir ordenando de forma secuencial los sucesivos valores de  $\bar{x}$ , dibujamos tres rectas horizontales de ordenadas en el origen respectivamente iguales a  $L_{ii}$ ,  $m^*$  y  $L_{is}$ , se obtiene un gráfico de control para la media muestral  $\bar{x}$  (ver fig. 9.4). Las dos rectas extremas reciben el nombre de límites superior e inferior de control, respectivamente.

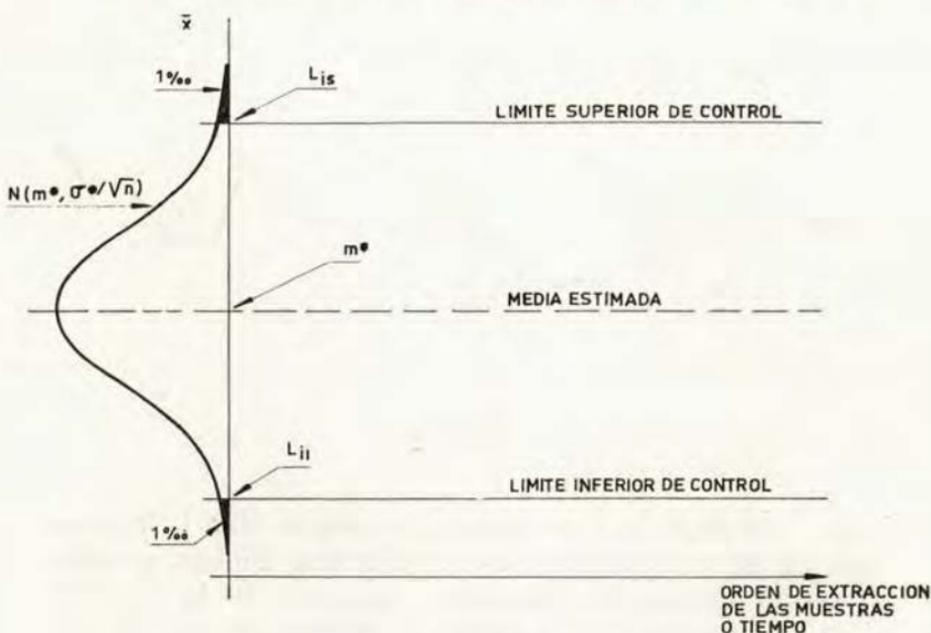


Fig. 9.4

Si, dibujados sobre este gráfico los puntos representativos de las distintas medias muestrales obtenidas, todos ellos caen dentro de los límites de control y no se aprecian ciclos, ráfagas de puntos por encima o por debajo de la media o ráfagas crecientes o decrecientes que hagan pensar en una falta de aleatoriedad, se dice entonces que el proceso se halla en un estado de control estadístico al nivel de significación del 2‰, queriendo indicar con ello que existe tan sólo una probabilidad del 2‰ de obtener un punto fuera de las rectas límites cuando el proceso se halla efectivamente bajo control (ver fig. 9.5).

Así pues, el gráfico de control permite caracterizar de forma explícita lo que se entiende por estado de control estadístico.

Naturalmente, para poder decidir si los ciclos o ráfagas observados son o no compatibles con la hipótesis de aleatoriedad, no basta realizar una simple inspección

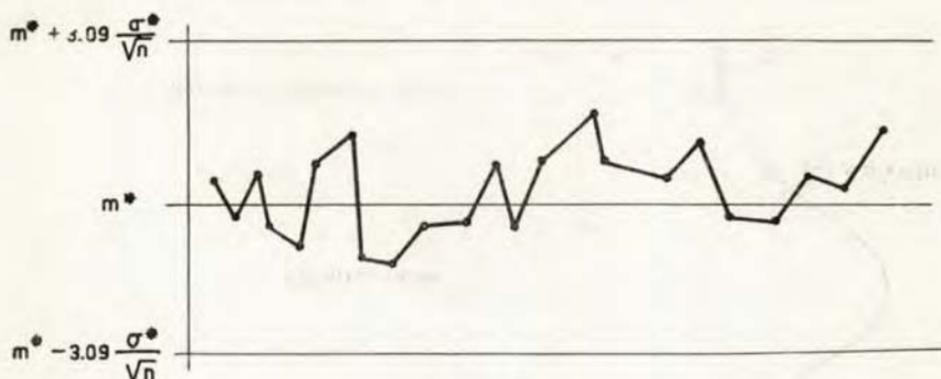


Fig. 9.5

visual del gráfico, sino que es imprescindible la realización de pruebas estadísticas adecuadas. Dichas pruebas se basan en las distribuciones teóricas de la variable aleatoria longitud de la ráfaga o número de ráfagas observadas en series aleatorias puras. Swed y Eisenhart han elaborado tablas<sup>2</sup> de muy fácil manejo que permiten decidir sobre la aleatoriedad o no aleatoriedad de las agrupaciones observadas en una secuencia de alternativas.

Un gráfico de control también puede ser usado como instrumento para llevar al estado de control estadístico a un proceso inicialmente fuera de control.

En efecto, si al representar sobre el gráfico de control los valores muestrales correspondientes a la serie de muestras previas extraídas de la producción inicial, alguno de ellos sale fuera de los límites  $L_{11}$  y  $L_{18}$  (estimados bajo la hipótesis de intervención exclusiva de causas aleatorias), deberá concluirse que alguna causa asignable perturba el proceso.

Un análisis exhaustivo de las circunstancias que intervienen en la producción en el momento de obtener

<sup>2</sup> S. Swed y C. Eisenhart, «Tables for Testing Randomness of Grouping in a Sequence of Alternatives», en *Annals of Mathematical Statistics*, vol. XIV (1943), págs. 66-82.

las muestras de valor medio anómalo permitirá descubrir algunas de las causas asignables de fluctuación.

Una vez detectadas y corregidas dichas causas asignables, eliminados del conjunto de la información aquellos valores anómalos para los que ha sido posible encontrar una explicación satisfactoria, y vueltos a estimar los valores límites  $L_{li}$  y  $L_{ls}$ , podrán representarse sobre el nuevo gráfico de control los valores muestrales retenidos tras la labor de depuración y otros valores muestrales complementarios correspondientes a muestras extraídas de la producción obtenida bajo las nuevas condiciones de fabricación. Si alguno de los valores cae fuera de los límites de control, deberá proseguirse la investigación de posibles causas asignables no descubiertas en el primer examen.

Obrando de esta forma cuantas veces sea necesario, el proceso podrá ser llevado, por aproximaciones sucesivas, al estado de control estadístico al nivel de significación deseado.

Una vez alcanzado el estado de control estadístico, es decir, una vez obtenida una secuencia significativa de puntos dentro de los límites de control en la cual no se han apreciado ciclos o ráfagas no aleatorias, el gráfico de control puede servir para vigilar la estabilidad de la variabilidad, es decir, para vigilar los desarreglos del proceso provocados por la súbita aparición de causas asignables.

Para ello bastará proceder de forma periódica a la extracción de nuevas muestras aleatorias y a la representación de los correspondientes valores muestrales sobre el gráfico de control establecido al término de la fase de estabilización de la variabilidad. Si ninguno de dichos valores se sitúa fuera de los límites de control, ni se aprecian fluctuaciones no aleatorias dentro del conjunto formado por los nuevos puntos y los ya dibujados en la fase de estabilización, podrá admitirse que el proceso continúa bajo control estadístico.

Así pues, el gráfico de control se utiliza en este caso para probar la hipótesis  $H_0$ : el proceso continúa bajo control, contra la hipótesis  $H_1$ : el proceso se halla fuera de control. Estamos, pues, ante una prueba de hipóte-

sis y, en consecuencia, habrá que tener muy en cuenta, a la hora de tomar las decisiones, la naturaleza y limitaciones propias del razonamiento estadístico. Si ninguno de los puntos se sitúa fuera de los límites de control, ni existe evidencia de variaciones no aleatorias dentro de dichos límites, lo único que puede decirse es que nada se opone a pensar que la variabilidad del proceso es debida a causas puramente aleatorias o, dicho con otras palabras, que la hipótesis de que el proceso continúa bajo control estadístico es una hipótesis defendible. Por el contrario, si el último valor muestral representado se sitúa fuera de los límites de control, se puede elegir entre las dos alternativas siguientes: o el proceso continúa bajo control estadístico y ha ocurrido un fenómeno que *a priori* tenía una pequeña probabilidad de ocurrir (igual a 0.002), o bien el proceso se halla perturbado por la intervención de alguna causa asignable. Como la primera alternativa es poco probable, será preferible pensar que la segunda alternativa es la cierta, es decir, que el proceso se halla fuera de control estadístico y que, en consecuencia, deben tomarse de forma inmediata las oportunas medidas correctoras. El riesgo que se tiene de incurrir en error al proceder a una indebida revisión del proceso es, evidentemente, del 2 ‰.

Un gráfico de control tal como el que acabamos de describir permite controlar la estabilidad del valor medio de la variabilidad del proceso, pero no permite controlar con garantía suficiente la estabilidad de su dispersión, toda vez que una variación de la dispersión provocada por una causa asignable puede quedar enmascarada al tomar como función discriminante la media muestral.

Para detectar con la suficiente garantía las posibles variaciones de la dispersión de la variabilidad del proceso se pueden construir gráficos de control basados en las leyes de distribución en el muestreo de las desviaciones tipo o de las amplitudes muestrales.

Si se adopta como función discriminante para la vigilancia de la dispersión la desviación tipo muestral  $\sigma$ , las rectas límites de los gráficos de control pueden ser determinadas teniendo en cuenta que la variable aleato-

ria  $n\sigma'^2/\sigma^2$  se distribuye de acuerdo con una ley de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad. En efecto, si  $\chi_{0.001, n-1}^2$  y  $\chi_{0.999, n-1}^2$  son respectivamente las cuantilas de orden 0.999 y 0.001 de la ley de  $\chi^2$  de  $n - 1$  grados de libertad, será posible escribir (ver fig. 9.6)

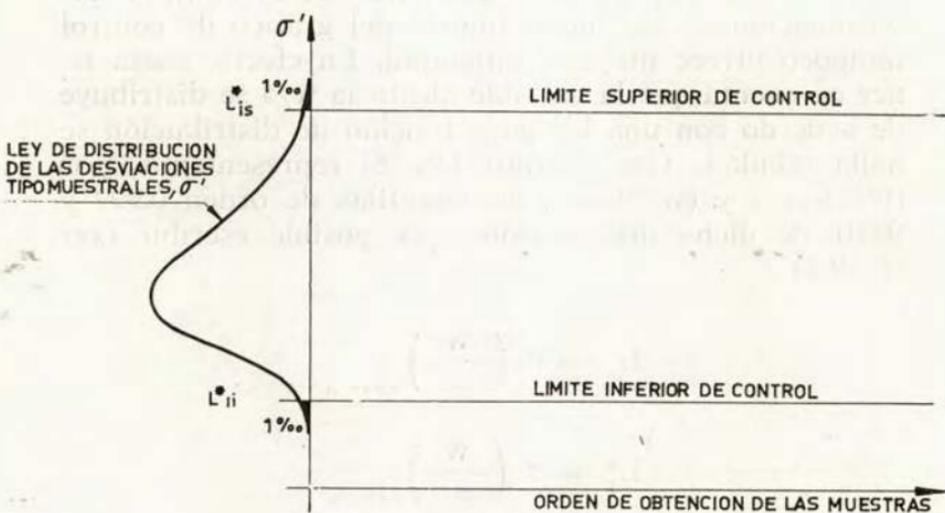


Fig. 9.6

$$L_{is}^* = \sigma \sqrt{\frac{\chi_{0.001, n-1}^2}{n}}$$

$$L_{ii}^* = \sigma \sqrt{\frac{\chi_{0.999, n-1}^2}{n}}$$

o bien

$$L_{is}^* = \sigma^* \sqrt{\frac{\chi_{0.001, n-1}^2}{n}}$$

$$L_{ii}^* = \sigma^* \sqrt{\frac{\chi_{0.999, n-1}^2}{n}}$$

si, como es lo más frecuente, la desviación tipo de la variabilidad del proceso es desconocida y, en consecuencia, debe ser estimada.

Si se adopta como función discriminante para la vigilancia de la dispersión la amplitud muestral  $w$ , la determinación de las líneas límites del gráfico de control tampoco ofrece ninguna dificultad. En efecto, basta tener en cuenta que la variable aleatoria  $w/\sigma$  se distribuye de acuerdo con una ley cuya función de distribución se halla tabulada (ver párrafo 3.9). Si representamos por  $(w/\sigma)_{0.001, n}$  y  $(w/\sigma)_{0.999, n}$  las cuantilas de orden 0.999 y 0.001 de dicha distribución, será posible escribir (ver fig. 9.7)

$$L_{is}^* = \sigma \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.001, n}$$

$$L_{li}^* = \sigma \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.999, n}$$

o bien

$$L_{is}^* = \sigma^* \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.001, n}$$

$$L_{li}^* = \sigma^* \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.999, n}$$

si la desviación tipo de la variabilidad del proceso es desconocida y, en consecuencia, hay que estimarla.

Estableciendo simultáneamente los gráficos de control de la media y de la dispersión de la variabilidad del proceso, puede lograrse una mejor caracterización del estado de control estadístico y una más eficaz vigilancia de su estabilidad. Para cada muestra aleatoria extraída, se procede a la determinación y representación sobre el gráfico de control que corresponda de la media muestral y de la amplitud o desviación tipo muestrales. Un

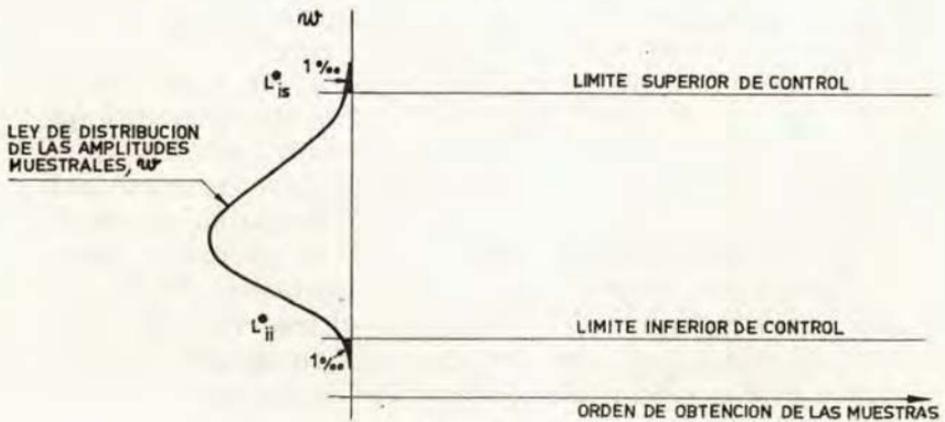


Fig. 9.7

punto fuera de los límites de control en cualquiera de los dos gráficos es signo de desarreglo del proceso.

Los límites de control, al nivel de significación del  $2\text{‰}$ , de los gráficos que acabamos de describir reciben el nombre de «límites de intervención», toda vez que un punto fuera de ellos determina siempre la detención del proceso y la investigación y subsiguiente corrección de las posibles causas asignables que lo perturban.

Ahora bien, en los procesos continuos, los desarreglos graves rara vez se producen de forma súbita, sino que son el resultado de un progresivo deterioro de las condiciones de fabricación. Debido a esta circunstancia, puede darse el caso de que se tarde mucho en detectar mediante los gráficos de control un desarreglo inicialmente suave. Para contribuir a evitar este inconveniente se suelen dibujar sobre los gráficos de control, junto con los límites de intervención, otros límites llamados de atención o alerta, definidos de forma que sea 0.95 la probabilidad de que se sitúe dentro de los mismos cualquier valor muestral de la función discriminante objeto de control, bajo la hipótesis de intervención de causas puramente aleatorias.

La utilidad de los límites de atención es evidente. En efecto, si en la etapa de extracciones periódicas de

muestras aleatorias representativas de la producción se obtiene un punto situado entre un límite de atención y el correspondiente límite de intervención, cabe elegir entre las dos alternativas siguientes: el proceso continúa bajo control estadístico, y ha ocurrido un fenómeno que, *a priori*, sólo tenía una probabilidad de producirse del 2.5 %; o el proceso comienza a estar perturbado por alguna causa asignable. Como la primera opción es poco probable, será preferible pensar que algo sospechoso ocurre y, sin esperar a que transcurra el intervalo de tiempo establecido entre dos extracciones consecutivas, debe procederse a la inmediata obtención de una nueva muestra.

Si alguno de los correspondientes puntos representativos se sitúa fuera de los límites de intervención de los gráficos de control, deberá procederse a un nuevo reglaje del proceso. Si alguno de dichos puntos se sitúa de nuevo entre un límite de atención y su correspondiente límite de intervención, también deberá procederse a un nuevo reglaje del proceso, toda vez que la probabilidad de que dicho acontecimiento ocurra por puro azar es muy pequeña. Por el contrario, si ambos puntos se sitúan dentro de los límites de atención, nada se opondrá a pensar que el primer acontecimiento ha sido puramente fortuito y, en consecuencia, no será necesaria ninguna intervención y la extracción de muestras deberá proseguir a la cadencia normal.

De acuerdo con su definición, los límites de atención correspondientes al gráfico de control de la media de la variabilidad del proceso serán (ver fig. 9.8)

$$L_{as} = m^* + 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{al} = m^* - 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

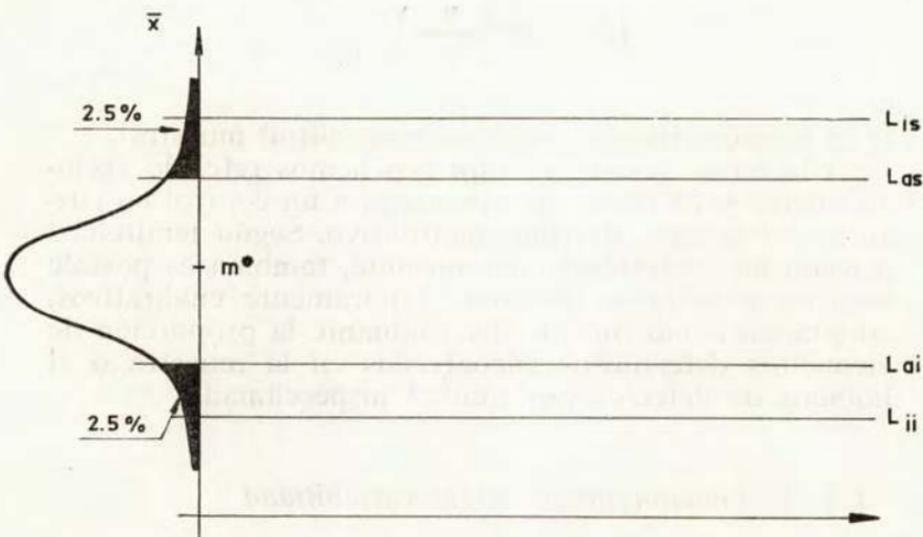


Fig. 9.8

Por su parte, los límites de atención correspondientes a los gráficos de control de la dispersión de la variabilidad del proceso serán

$$L_{as}^* = \sigma^* \sqrt{\frac{\chi_{0.025, n-1}^2}{n}}$$

$$L_{ai}^* = \sigma^* \sqrt{\frac{\chi_{0.975, n-1}^2}{n}}$$

si la función discriminante es la desviación tipo muestral, o

$$L_{as}^* = \sigma^* \left( \frac{W}{\sigma} \right)_{0.025, n}$$

$$L_{al}^* = \sigma^* \left( \frac{W}{\sigma} \right)_{0.975, n}$$

si la función discriminante es la amplitud muestral.

A lo largo de este párrafo nos hemos referido exclusivamente y de forma muy sumaria a un control en curso de fabricación de tipo cuantitativo. Según tendremos ocasión de comprobar más adelante, también es posible recurrir a métodos de control puramente cualitativos, adoptando como función discriminante la proporción de elementos defectuosos encontrados en la muestra o el número de defectos por unidad inspeccionada.

### 9.1.3 *Estimación previa de la variabilidad*

Antes de establecer unos gráficos para la vigilancia del estado de control estadístico de una fabricación, hay que empezar por llevar la fabricación a dicho estado. El camino a seguir, descrito sumariamente en el párrafo anterior, no es otra cosa que un proceso secuencial convergente de estimaciones de parámetros estadísticos y corrección de las causas asignables detectadas. Para que el objetivo perseguido pueda ser alcanzado, es decir, para que pueda tenerse una razonable seguridad de haber aislado del proceso, de forma efectiva, todas las causas asignables y dejado tan sólo las causas aleatorias de fluctuación, deben ser tomadas numerosas precauciones a la hora de elegir la extensión y cadencia de extracción de las muestras previas. En la correcta elección de estos dos parámetros reside en buena parte el éxito del empeño.

Es imprescindible que las muestras sean representativas de subgrupos de la producción lo más homogéneos posible. Un subgrupo natural puede ser la producción de una máquina o de un equipo de obreros.

La necesidad de limitar el muestreo a subgrupos homogéneos de la producción es evidente. Supongamos, por ejemplo, que en una fabricación intervienen varias máquinas del mismo tipo cuyas respectivas producciones se

engloban en la producción total. En este caso, las muestras deberán ser tomadas de la producción de cada una de las máquinas aisladamente consideradas y no de la producción global, pues, caso de existir diferencias significativas entre dichas máquinas, lo cual constituye una causa asignable de fluctuación, dichas diferencias podrían quedar enmascaradas al tomar muestras de la producción global. Por el contrario, si las muestras se toman de la producción de cada una de las máquinas, las diferencias entre máquinas se traducirán en diferencias entre muestras que podrán ser estadísticamente detectadas. Lo mismo puede ocurrir en el caso de que la producción global sea el resultado de la intervención de varios equipos de trabajadores.

También es imprescindible que a lo largo de la extracción de cada una de las muestras individuales no varíen de forma significativa las condiciones de la fabricación. Supongamos, por ejemplo, que se intenta poner bajo control estadístico una máquina de la que se ignora que, debido a la presencia de una causa asignable, sufre frecuentes desarreglos, consistentes en modificaciones bruscas de la media de la variabilidad sin modificación de la dispersión. Si al comenzar la extracción de la muestra la media es  $m_1$ , y antes de concluir la extracción pasa a valer  $m_2$ , se habrán obtenido, sin saberlo, dos muestras representativas de dos poblaciones normales distintas. Dado que la mezcla de dos poblaciones normales  $N(m_1, \sigma)$  y  $N(m_2, \sigma)$  de igual número total de individuos es otra población no normal de media

$$\frac{m_1 + m_2}{2}$$

y de variancia

$$\sigma^2 + \frac{1}{4} (m_1 - m_2)^2$$

se llegará en este caso a la conclusión errónea de que la variabilidad del proceso no es normal y tiene una dis-

persión superior a la real, mientras que las bruscas modificaciones de la media quedarán enmascaradas.

En general, la bondad de la estimación de la variabilidad de un proceso disminuye a medida que aumenta el tamaño de cada muestra individual. En efecto, para tener una razonable seguridad de que las condiciones de la fabricación permanecen sustancialmente idénticas durante la extracción de cada muestra, es necesario que las muestras sean de tamaño reducido. Sólo de esta forma será posible detectar las causas asignables analizando las diferencias entre muestras. Se comprende que, en el caso de un proceso automático de gran cadencia de producción y que sufre desarreglos poco frecuentes, el tamaño de las muestras a extraer de forma periódica podrá ser mayor que en el caso de un proceso no automático de cadencia de producción relativamente lenta y que sufre desarreglos con mayor frecuencia.

Pero el tamaño de la muestra tampoco puede ser tan pequeño que dé lugar a que las causas aleatorias de fluctuación inherentes al proceso puedan llegar a tener una excesiva influencia en los resultados, dando lugar a valores muestrales muy dispersos, es decir, a estimaciones con un intervalo de confianza muy amplio y, en consecuencia, de muy pequeña precisión.

Todas estas advertencias deben ser tenidas muy en cuenta si se quiere obtener una estimación válida de la variabilidad de un proceso.

Duncan, en su obra *Quality Control and Industrial Statistics*, afirma que «nada es tan importante para el establecimiento de un gráfico de control como la cuidadosa determinación de los subgrupos homogéneos de producción».

Cavé, por su parte, también insiste sobre esta cuestión en su obra *Le controle statistique des fabrications* y propone el siguiente método de estimación de la desviación tipo de la variabilidad del proceso:

a) Efectuar una primera estimación rápida de  $\sigma$  a base de  $r$  extracciones de  $n$  piezas, escogiendo

$n = 5$  para cadencias del orden de 10 piezas/hora  
 $n = 10$  para cadencias del orden de 1 pieza /minuto  
 $n = 30$  para cadencias del orden de 10 piezas/minuto  
 y determinando después  $r$ , de forma que

$$nr = 100 \div 200$$

Para cada una de las  $r$  muestras deberán determinarse los estadísticos muestrales

$$\bar{x}_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}/n$$

$$\sigma_j'^2 = \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2/n$$

En estas condiciones, una estimación aproximada de la desviación tipo de la variabilidad vendrá dada por la expresión

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{n}{n-1} \frac{\sum_{j=1}^r \sigma_j'^2}{r}}$$

Si se sabe por experiencia de fabricaciones anteriores que la variabilidad es normal, podrá utilizarse como estimación aproximada de  $\sigma$  el estadístico

$$\sigma^* = \frac{1}{b_n} \frac{\sum_{j=1}^r \sigma_j'}{r} = \frac{\bar{\sigma}'}{b_n}$$

siendo  $b_n$  un coeficiente dado por la tabla 4.

b) Efectuar una segunda estimación más precisa de  $\sigma$ , procediendo a la extracción de otras  $r'$  muestras de  $n$  piezas, debiendo cumplirse la condición

$$n(r + r') = 200 \div 300$$

es decir,  $r' \approx r$ .

De esta forma puede obtenerse una estimación de  $\sigma$  suficientemente buena, de la que prácticamente queda excluida la influencia de las posibles variaciones de la media.

Conviene insistir en el hecho de que el estadístico

$$\sqrt{\frac{n}{n-1} \frac{\sum_{j=1}^r \sigma_j^2}{r}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^r S_j^2}{r}}$$

sólo puede ser considerado como una estimación de la desviación tipo de la variabilidad bajo la hipótesis de que, a lo largo de la extracción de las  $r$  muestras de  $n$  piezas, no se ha producido ninguna modificación de dicha desviación tipo, aun cuando hayan podido producirse modificaciones de la media al pasar de una muestra a otra. Esta hipótesis puede ser comprobada aplicando las técnicas del análisis de la variancia al conjunto de los resultados muestrales obtenidos.

Shewhart insiste mucho sobre el hecho de que un estado de control estadístico no puede ser alcanzado «en un día». Según este autor, no puede afirmarse en general que un proceso de producción repetida se halla bajo control estadístico hasta que se hayan obtenido, bajo condiciones presumiblemente iguales, un mínimo de 25 muestras de 4 piezas cuyos puntos representativos se hallen dentro de los límites de control.

#### 9.1.4 *Curva de eficacia de un gráfico de control*

Una vez alcanzado el estado de control estadístico, adecuadamente estimada la desviación tipo  $\sigma_0$  de la variabilidad del proceso y fijada la media  $m_0$  más adecuada de acuerdo con los objetivos de la fabricación, el gráfico de control pasa a convertirse pura y simplemente en un instrumento que permite someter a prueba la hipótesis de que el proceso continúa bajo control. De acuerdo con la teoría general de las pruebas de hipótesis, a todo gráfico de control corresponde una función de eficacia, la cual expresa la probabilidad de que la hipótesis de que el proceso continúa bajo control sea aceptada como buena, es decir, la probabilidad de obtener un punto dentro de los límites de intervención, en función de algún parámetro o parámetros que permiten caracterizar las condiciones reales de la fabricación (proporción de desechos, desviación de la media o de la variancia de la variabilidad respecto de las condiciones ideales, etc.).

En el caso concreto de un gráfico de control de la media de la variabilidad de un proceso, tal como el descrito en el párrafo 9.1.2, cuando el proceso funciona correctamente, es decir, cuando la media y la desviación tipo de la variabilidad son iguales a los valores  $m_0$  y  $\sigma_0$  especificados al final del período de estabilización de la variabilidad, existe una probabilidad 0.998 de que un punto muestral se sitúe entre los límites de intervención y tan sólo una probabilidad 0.002 de que dicho punto salga fuera de los límites provocando una inadecuada detención de la fabricación (ver fig. 9.9.a). La probabilidad de decidir la detención de la fabricación, cuando en realidad ésta se halla bajo control estadístico, corresponde a lo que en la teoría general de las pruebas de las hipótesis se denomina riesgo de error de primera especie.

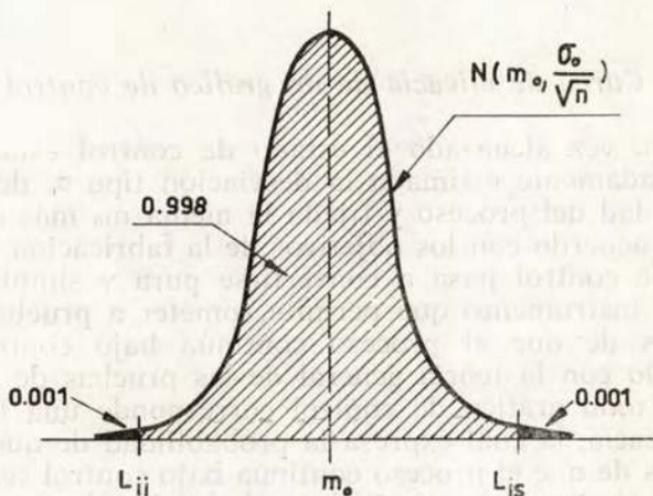


Fig. 9.9a

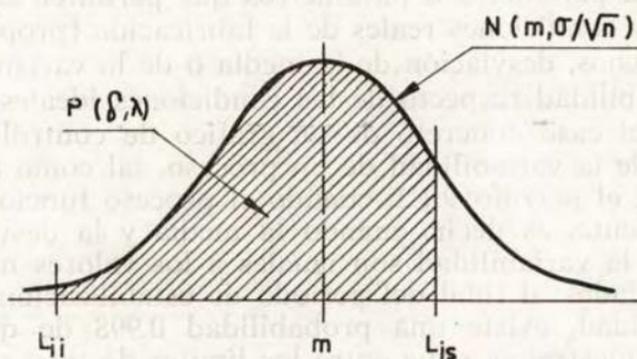


Fig. 9.9b

Por otra parte, cuando el proceso sufre un desarreglo consistente, por ejemplo, en una modificación de la media y de la desviación tipo de la variabilidad del proceso cuyos valores pasan a ser  $m$  y  $\sigma$ , es decir, cuando se produce un descentramiento reducido igual a

$$\delta = \frac{m_0 - m}{\sigma_n}$$

y una variación de  $\sigma_0$  caracterizada por la relación

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

existirá una probabilidad

$$P(\delta, \lambda) = P_r\{L_{11} < \bar{x} < L_{1s} \mid \delta, \lambda\}$$

de que un punto muestral se sitúe dentro de los límites de intervención y, en consecuencia, el desarreglo del proceso sea detectado (ver fig. 9.9b). La probabilidad de aceptar como buena la hipótesis de que el proceso continúa bajo control cuando en realidad se ha producido un desarreglo, corresponde a lo que en la teoría general de las pruebas de hipótesis se denomina riesgo de error de segunda especie.

Evidentemente, en el caso de un gráfico de control tal como el descrito, la representación geométrica de la función de eficacia no es una curva, sino una superficie. La representación de esta superficie exige la adopción de un sistema de planos acotados, es decir, un sistema similar al utilizado en el dibujo de los mapas geográficos<sup>3</sup>. El manejo de tal representación geométrica resulta bastante enojoso, por lo que la mayoría de los autores prefieren analizar de forma aislada las consecuencias de las modificaciones en la media y en la desviación tipo. De esta forma es posible obtener funciones de eficacia de la forma  $P(\delta)$  o  $P(\lambda)$ , cuya representación geométrica es en ambos casos una curva plana, intersección de la superficie representativa de la función  $P(\delta, \lambda)$  con los planos  $\delta = 0$  y  $\lambda = 1$ , respectivamente.

A partir de la noción de función de eficacia, es posible establecer gráficos de control que satisfagan unas condiciones de eficacia preestablecidas, es decir, determinar el tamaño de la muestra a extraer a intervalos periódicos y las rectas límites de los gráficos de control,

<sup>3</sup> A. J. Duncan, *Quality Control and Industrial Statistics*, capítulo XXII, págs. 396-402.

con la condición de que, cuando la fabricación se halle en el estado de control estadístico, caracterizado por un valor  $\theta_0$  del parámetro  $\theta$  elegido para especificar las condiciones reales de la fabricación, exista tan sólo una probabilidad  $\alpha$  de llegar a la conclusión de que el proceso ha experimentado un desarreglo, mientras que cuando la fabricación se halle en unas condiciones fuera de control, caracterizadas por un valor  $\theta_1$  del parámetro  $\theta$ , se tenga tan sólo una probabilidad  $\beta$  de llegar a la conclusión de que el proceso funciona correctamente (ver figura 9.10).

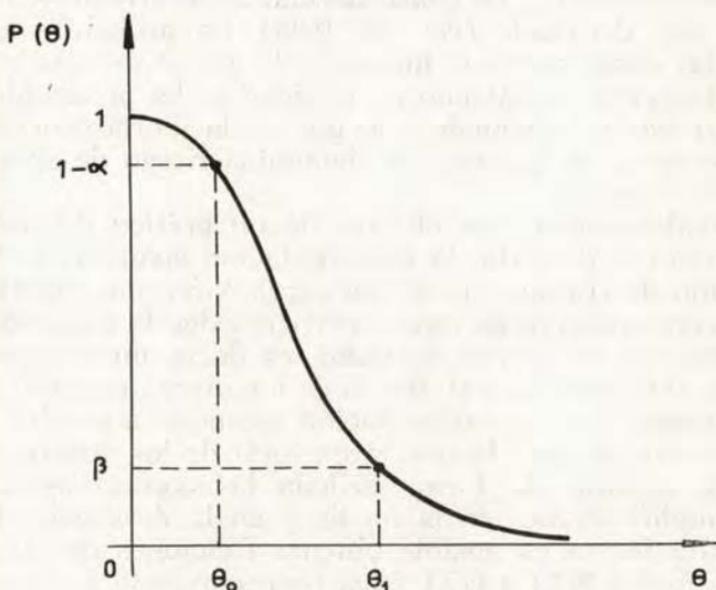


Fig. 9.10

Este método de establecer un gráfico de control es mucho más realista que el método clásico descrito por la mayoría de los autores y que consiste en adoptar *a priori* un tamaño de muestra y determinar *a posteriori* las líneas límites del gráfico.

De todas formas, con la determinación del tamaño de la muestra y de las líneas límites del gráfico de con-

trol, a partir de unas condiciones de eficacia preestablecidas, el plan de control en curso de fabricación no queda especificado por completo. Es preciso, además, fijar la periodicidad del muestreo. La periodicidad del muestreo no puede fijarse *a priori*, sino que debe basarse en un estudio técnico-económico en el que deben ser tenidos en cuenta:

- el coste de control propiamente dicho;
- el coste de la inspección al 100 % de las piezas fabricadas durante el período entre controles inmediatamente anterior a la detención de la fabricación;
- el coste del arreglo de las piezas defectuosas recuperables producidas durante dicho período y el coste de las piezas defectuosas irre recuperables;
- la rapidez con que el proceso pierde el estado de control estadístico, o mejor, la ley de probabilidad de sus desarreglos.

La periodicidad óptima será aquella que haga mínimo el coste total del control.

Cavé, en su obra *Le controle statistique des fabrications*, propone un método aproximado de determinación de la periodicidad óptima del muestreo, que a continuación pasamos a describir:

Si  $N$  es el número de piezas fabricadas entre dos extracciones,  $M$  el número medio de piezas fabricadas entre dos desarreglos, y si se acepta el control al 100 % de las  $N$  piezas fabricadas desde el último control cuando el gráfico señala un desarreglo, la proporción óptima,  $q = n/N$ , de piezas que realmente deberán ser controladas viene dada por la expresión

$$q \approx \sqrt{\frac{11}{M}}$$

Si la cadencia de la fabricación es de  $c$  piezas por hora, habrá que efectuar una extracción de  $n$  piezas de cada  $N = n/q = \sqrt{11M}$  piezas, es decir, cada  $\sqrt{11M} 60/c$  minutos.

Por ejemplo, si la cadencia de fabricación es de 600 piezas/hora, el tamaño de la muestra es de 10 piezas y, de la experiencia acumulada en fabricaciones análogas, se sabe que el número medio de piezas fabricadas entre dos desarreglos es del orden de 4 000, la periodicidad óptima del muestreo será de 10 piezas cada

$$\sqrt{10 \times 4\,000} \frac{60}{600} = 20 \text{ minutos}$$

La eficacia de un plan de control en curso de fabricación también puede medirse a partir de la «longitud de ráfaga media» (*average run length*),  $\bar{R}$ , que se define como el número medio de muestras consecutivas de  $n$  piezas que se extraerán bajo unas condiciones de fabricación determinadas e invariables, hasta llegar a una que provoque el arreglo del proceso.

Entre la longitud de ráfaga media y la función de eficacia existe una relación muy simple. Sea, en efecto,  $\theta$  el parámetro elegido para especificar las condiciones reales de la fabricación (proporción de desechos,  $\omega$ ; descentramiento reducido de la media,  $\delta$ ; tanto por uno de variación de la desviación tipo,  $\lambda$ ; etc.) y  $P(\theta)$  la función de eficacia del gráfico de control (ver fig. 9.11). En las condiciones de fabricación especificadas por  $\theta$ , supuestas invariables a lo largo del tiempo, la probabilidad de que un punto muestral aisladamente considerado se sitúe entre los límites de intervención será evidentemente igual a  $P(\theta)$ , y la probabilidad de que se sitúe fuera de los mismos y provoque el arreglo del proceso será  $1 - P(\theta) = Q(\theta)$ . En consecuencia, la probabilidad de que sea necesaria una ráfaga de  $R$  extracciones de  $n$  piezas antes de decidir el arreglo del proceso será, en virtud del teorema de las probabilidades compuestas

$$[P(\theta)]^{R-1}Q(\theta)$$

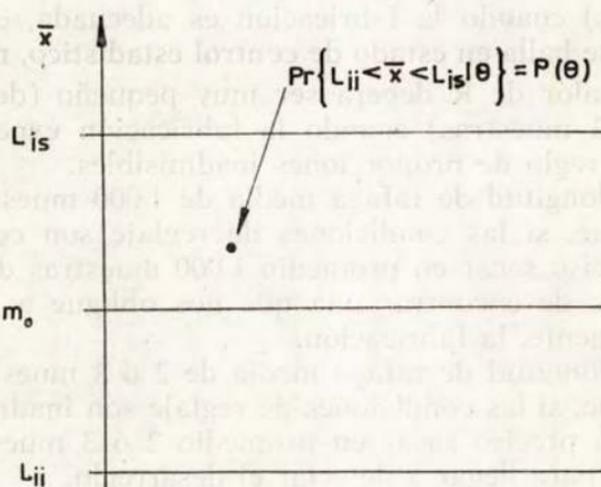
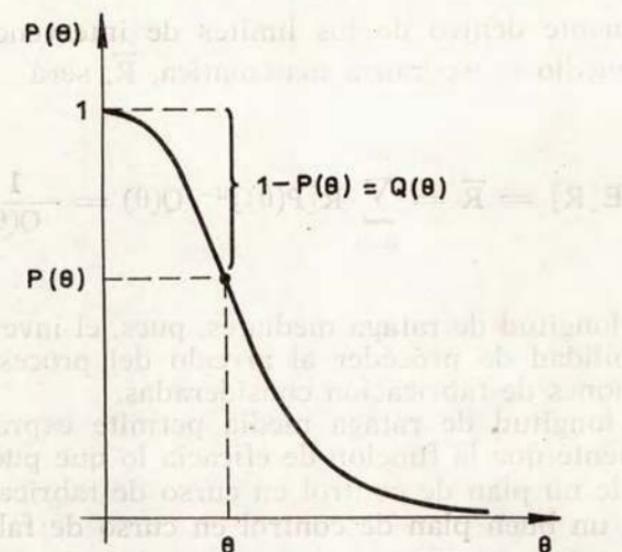


Fig. 9.11

La longitud de la ráfaga,  $R$ , es una variable aleatoria que puede adoptar cualquier valor entero, desde 1 (el primer punto muestral sale fuera de los límites de intervención) hasta  $\infty$  (los puntos muestrales se sitúan inde-

finidamente dentro de los límites de intervención). Su valor medio o esperanza matemática,  $\bar{R}$ , será

$$E[R] = \bar{R} = \sum_{R=1}^{\infty} R[P(\theta)]^{R-1}Q(\theta) = \frac{1}{Q(\theta)}$$

La longitud de ráfaga media es, pues, el inverso de la probabilidad de proceder al arreglo del proceso en las condiciones de fabricación consideradas.

La longitud de ráfaga media permite expresar más claramente que la función de eficacia lo que puede esperarse de un plan de control en curso de fabricación. En efecto, un buen plan de control en curso de fabricación deberá tener una  $\bar{R}$  muy grande (del orden de unas 1 000 muestras) cuando la fabricación es adecuada, es decir, cuando se halla en estado de control estadístico, mientras que el valor de  $\bar{R}$  deberá ser muy pequeño (del orden de 2 ó 3 muestras) cuando la fabricación experimente un desarreglo de proporciones inadmisibles.

Una longitud de ráfaga media de 1 000 muestras significa que, si las condiciones de reglaje son correctas, será preciso sacar en promedio 1 000 muestras de  $n$  piezas antes de encontrar una que nos obligue a detener, erróneamente, la fabricación.

Una longitud de ráfaga media de 2 ó 3 muestras significa que, si las condiciones de reglaje son inadmisibles, sólo será preciso sacar en promedio 2 ó 3 muestras de  $n$  piezas para llegar a detectar el desarreglo.

Entre las longitudes de ráfaga media correspondientes a las condiciones de fabricación óptimas e inadmisibles y los riesgos de error de primera y segunda especie existen las relaciones evidentes.

$$\bar{R}_0 = \frac{1}{\alpha} \qquad \bar{R}_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

En consecuencia, como los valores más frecuentes de  $\bar{R}_0$  y  $\bar{R}_1$  son 1 000 y 2 ó 3, los valores que con mayor frecuencia habrá que adoptar para  $\alpha$  y  $\beta$  serán respectivamente 0.001 y 0.5 ó 0.6. El simple examen de los valores de estos riesgos muestra la diferencia radical que existe entre las condiciones de eficacia normales en un plan de control de recepción y las condiciones de eficacia normales en un plan de control en curso de fabricación. En efecto, en un plan de control de recepción un valor corriente de  $\alpha$  es 0.05. Si adoptásemos tal valor en un plan de control en curso de fabricación, resultaría que, en promedio, tendríamos que proceder a un innecesario reglaje del proceso cada 20 muestras de  $n$  piezas lo que, evidentemente, resulta inadmisibles. De igual forma, en un plan de control de recepción un valor corriente de  $\beta$  es 0.10. Si adoptásemos tal valor en un plan de control en curso de fabricación, las condiciones inadmisibles de reglaje ligadas a dicho riesgo serían detectadas en promedio al cabo de la extracción de 1.1 muestras de  $n$  piezas, es decir, prácticamente a la primera muestra. Una eficacia tan grande tiene la desventaja de que exige el examen de un tamaño de muestra muy considerable. En la práctica, se considera preferible, en general, tener una menor protección contra las calidades de fabricación inadmisibles ( $\bar{R}_1 = 2$  ó  $3$ ) a cambio de una reducción en el tamaño de la muestra a examinar, es decir, a cambio de una reducción en el coste del control.

La representación gráfica de la función

$$\bar{R} = \frac{1}{Q(\theta)}$$

es una curva tal como la representada en la figura 9.12. Esta curva suministra la misma información sobre el plan de control que la curva de eficacia.

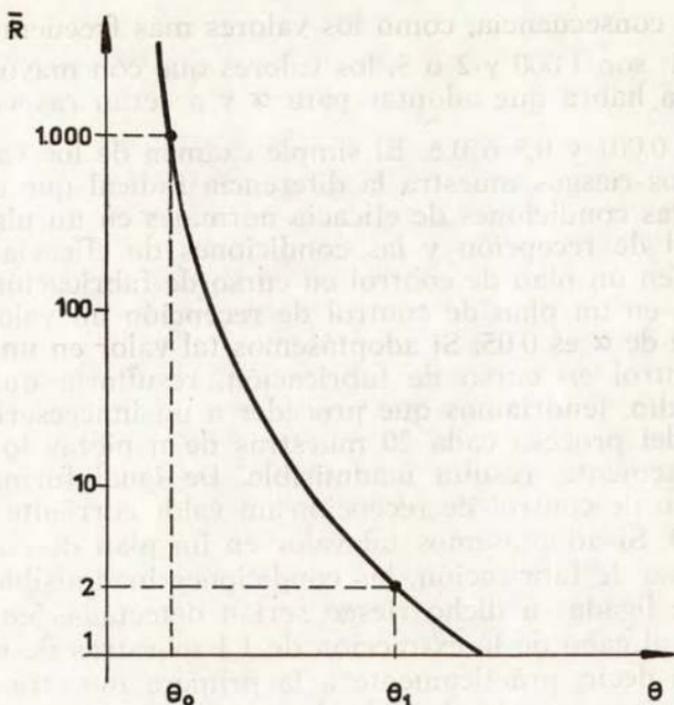


Fig. 9.12

## 9.2 CONTROL CUANTITATIVO. GRAFICOS DE CONTROL CLASICOS POR MEDIDAS

### 9.2.1 *Gráficos de control clásicos con tamaño de muestra prefijado para la vigilancia de un proceso no apto o justamente apto para el trabajo que se le confía*

Una vez alcanzado el estado de control estadístico y estimada de forma satisfactoria la desviación tipo de la variabilidad del proceso, para establecer por el método

clásico unos gráficos de control que permitan vigilar los desarreglos de la fabricación a lo largo del tiempo, hay que empezar por elegir un tamaño de muestra adecuado y decidir el valor  $m_0$  en el que interesa centrar la variabilidad, a fin de que los objetivos de la fabricación puedan ser alcanzados.

El tamaño de las muestras suele oscilar generalmente entre 2 y 30 unidades. Con frecuencia se prefiere limitar a 12 como máximo el número de elementos de cada muestra, a fin de poder utilizar como función discriminante para la vigilancia de la dispersión de la variabilidad el estadístico amplitud muestral, de determinación muy sencilla y económica.

En lo que a  $m_0$  se refiere, el valor a adoptar depende sustancialmente del grado de aptitud del proceso de fabricación para cumplir con las especificaciones. Si el proceso no es apto o es justamente apto para el trabajo que se le confía, es decir, cuando en las condiciones óptimas de reglaje la proporción mínima de desechos es del 2‰ ( $T_s - T_i \leq 6.18\sigma^*$ ), tiene en general interés tomar como valor de consigna  $m_0$  el centro del intervalo de especificación, es decir

$$m_0 = (T_s + T_i)/2$$

toda vez que, de este modo, se consigue minimizar la proporción de piezas defectuosas fabricadas.

De acuerdo con la teoría general de los gráficos de control expuesta en el párrafo 9.1.2, una vez estimado el valor de  $\sigma_0$ , elegido el tamaño  $n$  de la muestra y fijado el valor de consigna  $m_0$ , los límites de atención e intervención del gráfico de control de la media de la variabilidad podrán calcularse a partir de las expresiones siguientes (ver fig. 9.13)

$$L_{is} = m_0 + 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

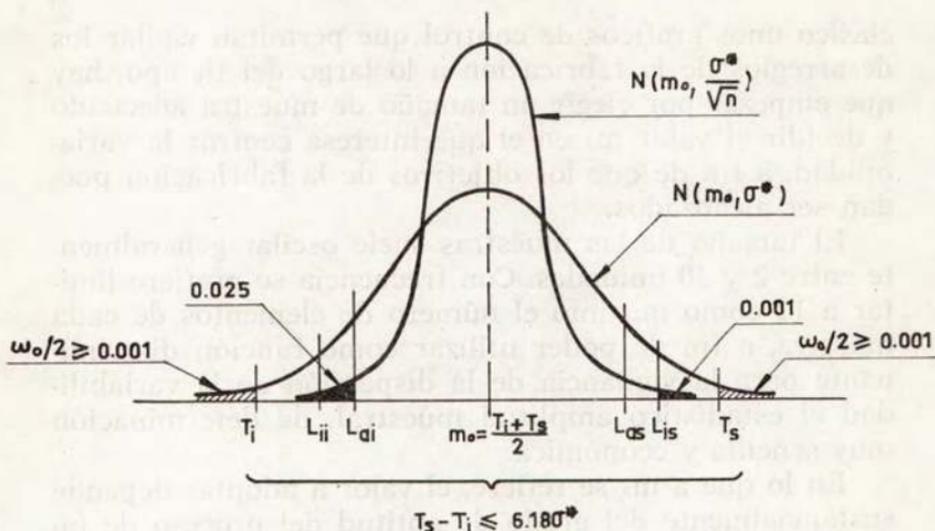


Fig. 9.13

$$L_{ii} = m_0 - 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{as} = m_0 + 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ai} = m_0 - 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$m_0 = \frac{T_i + T_s}{2}$$

Representando estas rectas sobre un sistema de ejes coordenados  $\bar{x}$ , tiempo, se obtendrá el correspondiente gráfico de control de las medias o gráfico  $\bar{x}$  (ver fig. 9.14).

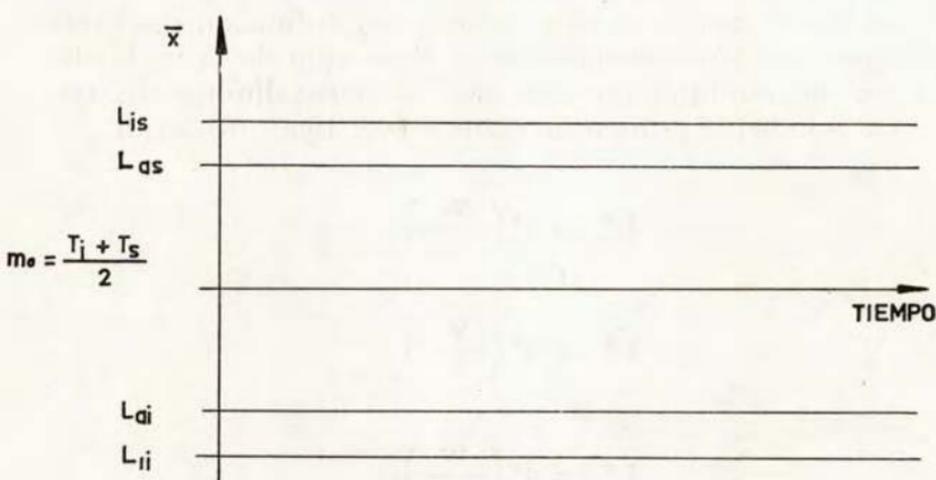


Fig. 9.14

Si se adopta como función discriminante para la vigilancia de la dispersión de la variabilidad la desviación tipo muestral  $\sigma'$ , las líneas límites del correspondiente gráfico de control (ver fig. 9.15) deberán determinarse a partir de las expresiones ya conocidas

$$L_{is}^* = \sigma^* \sqrt{\frac{\chi_{0.001, n-1}^2}{n}}$$

$$L_{ii}^* = \sigma^* \sqrt{\frac{\chi_{0.999, n-1}^2}{n}}$$

$$L_{as}^* = \sigma^* \sqrt{\frac{\chi_{0.025, n-1}^2}{n}}$$

$$L_{ai}^* = \sigma^* \sqrt{\frac{\chi_{0.975, n-1}^2}{n}}$$

Por el contrario, si se adopta como función discriminante para la vigilancia de la dispersión de la variabilidad la amplitud muestral  $w$ , las líneas límites del correspondiente gráfico de control (ver fig. 9.16) serán

$$L_{is}^* = \sigma^* \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.001, n}$$

$$L_{il}^* = \sigma^* \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.999, n}$$

$$L_{as}^* = \sigma^* \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.025, n}$$

$$L_{al}^* = \sigma^* \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.975, n}$$

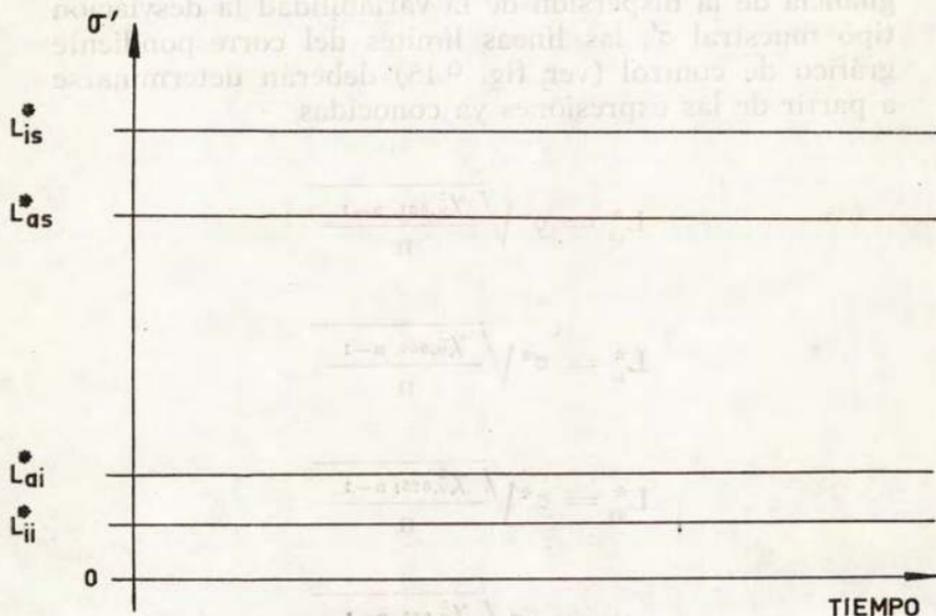


Fig. 9.15

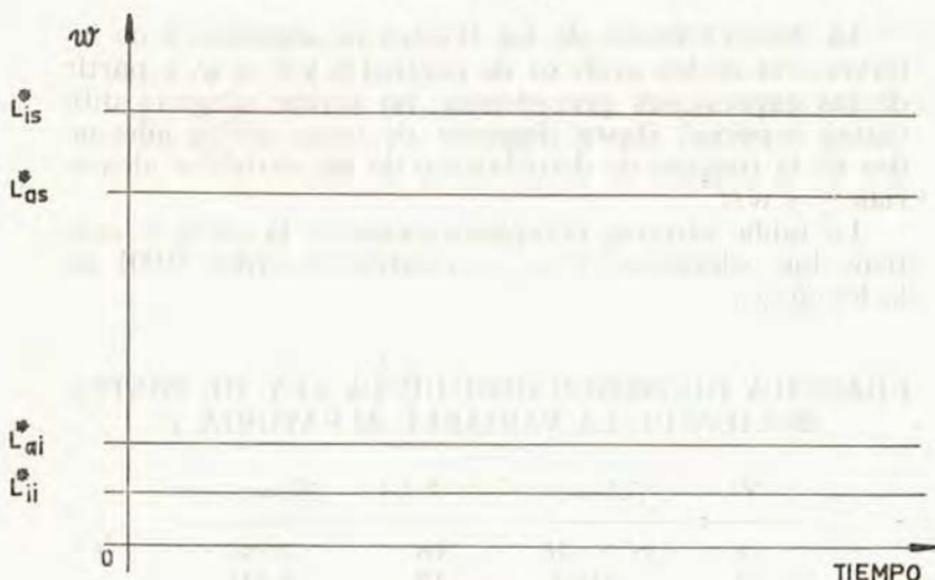


Fig. 9.16

Cuando el tamaño de muestra elegido es superior a 12, se debe recurrir necesariamente al gráfico  $\sigma'$  para vigilar la dispersión de la variabilidad del proceso. Sin embargo, cuando el tamaño de muestra es igual o inferior a 12 puede escogerse entre un gráfico  $\sigma'$  o un gráfico  $w$ . Generalmente se prefiere este último por su mayor simplicidad de manejo.

En la práctica, es frecuente prescindir del trazado de los límites inferiores de atención y de intervención de los gráficos  $\sigma'$  o  $w$ , toda vez que una disminución de la dispersión de la variabilidad del proceso no puede ser considerada como indeseable y, en consecuencia, la observación de un punto muestral fuera del límite de intervención inferior no exige en modo alguno la detención del proceso. Sin embargo, su trazado no está exento en absoluto de interés, pues la obtención de varios puntos muestrales por debajo de dichos límites pondrá de manifiesto al observador una probable mejora de la dispersión del proceso, cuyas razones técnicas será de gran interés investigar.

La determinación de los límites de atención y de intervención de los gráficos de control  $\bar{x}$  y  $\sigma'$  ó  $w$ , a partir de las expresiones precedentes, no ofrece ninguna dificultad especial. Basta disponer de unas tablas adecuadas de la función de distribución de las variables aleatorias  $\chi^2$  y  $w/\sigma$ .

La tabla adjunta, complementaria de la tabla 3, contiene los valores de  $\chi_{0.000, \nu}^2$ , cuantila de orden 0.001 de la ley de  $\chi^2$ .

CUANTILA DE ORDEN 0.001 DE LA LEY DE DISTRIBUCION DE LA VARIABLE ALEATORIA  $\chi^2$

$\nu$	$\chi_{0.000, \nu}^2$	$\nu$	$\chi_{0.000, \nu}^2$
1	$1.6 \times 10^{-6}$	16	3.942
2	0.002	17	4.416
3	0.024	18	4.905
4	0.091	19	5.407
5	0.210	20	5.921
6	0.381	21	6.447
7	0.598	22	6.983
8	0.857	23	7.529
9	1.152	24	8.085
10	1.479	25	8.649
11	1.834	26	9.222
12	2.214	27	9.803
13	2.617	28	10.391
14	3.041	29	10.986
15	3.483	30	11.588

Para reducir al mínimo los cálculos se han preparado tablas a partir de las cuales, conociendo simplemente la desviación tipo muestral media,  $\sigma'$ , o la amplitud muestral media,  $\bar{w}$  de un conjunto de  $K$  muestras de  $n$  piezas, es posible determinar los valores límites de los gráficos de control mediante operaciones elementales.

Dichas tablas se basan en el hecho de que los estadísticos

y

$$\sigma^* = \bar{\sigma}'/b_n$$

$$\sigma^* = \bar{w}/d_n$$

son estimaciones absolutamente correctas y suficientemente buenas de la desviación tipo de la variabilidad del proceso.

Si los estadísticos muestras utilizados son  $\bar{x}$  y  $\sigma'$ , las expresiones analíticas de los límites de atención e intervención de los gráficos de control correspondientes podrán escribirse en la forma

$$L_{is} = m_0 + \frac{3.09}{b_n \sqrt{n}} \bar{\sigma}' = m_0 + A'_i \bar{\sigma}'$$

$$L_{ii} = m_0 - \frac{3.09}{b_n \sqrt{n}} \bar{\sigma}' = m_0 - A'_i \bar{\sigma}'$$

$$L_{as} = m_0 + \frac{1.96}{b_n \sqrt{n}} \bar{\sigma}' = m_0 + A'_a \bar{\sigma}'$$

$$L_{ai} = m_0 - \frac{1.96}{b_n \sqrt{n}} \bar{\sigma}' = m_0 - A'_a \bar{\sigma}'$$

$$L_{is}^* = \frac{1}{b_n} \sqrt{\frac{\chi_{0.001, n-1}^2}{n}} \bar{\sigma}' = B'_{is} \bar{\sigma}'$$

$$L_{ii}^* = \frac{1}{b_n} \sqrt{\frac{\chi_{0.999, n-1}^2}{n}} \bar{\sigma}' = B'_{ii} \bar{\sigma}'$$

$$L_{as}^* = \frac{1}{b_n} \sqrt{\frac{\chi_{0.025, n-1}^2}{n}} \bar{\sigma}' = B'_{as} \bar{\sigma}'$$

$$L_{ai}^* = \frac{1}{b_n} \sqrt{\frac{\chi_{0.975, n-1}^2}{n}} \bar{\sigma}' = B'_{ai} \bar{\sigma}'$$

Si, por el contrario, los estadísticos muestrales utilizados son  $\bar{x}$  y  $w$ , las correspondientes expresiones analíticas de las rectas límites serán

$$L_{is} = m_0 + \frac{3.09}{d_n \sqrt{n}} \bar{w} = m_0 + A''_i \bar{w}$$

$$L_{ii} = m_0 - \frac{3.09}{d_n \sqrt{n}} \bar{w} = m_0 - A''_i \bar{w}$$

$$L_{as} = m_0 + \frac{1.96}{d_n \sqrt{n}} \bar{w} = m_0 + A''_a \bar{w}$$

$$L_{ai} = m_0 - \frac{1.96}{d_n \sqrt{n}} \bar{w} = m_0 - A''_a \bar{w}$$

$$L^*_{is} = \frac{1}{d_n} \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.001, n} \bar{w} = B''_{is} \bar{w}$$

$$L^*_{ii} = \frac{1}{d_n} \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.999, n} \bar{w} = B''_{ii} \bar{w}$$

$$L^*_{as} = \frac{1}{d_n} \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.025, n} \bar{w} = B''_{as} \bar{w}$$

$$L^*_{ai} = \frac{1}{d_n} \left( \frac{w}{\sigma} \right)_{0.975, n} \bar{w} = B''_{ai} \bar{w}$$

Los valores de los coeficientes  $A'_i, A'_a, A''_i, A''_a, B'_{is}, B'_{ii}, B'_{as}, B'_{ai}, B''_{is}, B''_{ii}, B''_{as}$  y  $B''_{ai}$  han sido tabulados por diversos autores<sup>4</sup>. La obtención de estas tablas no ofrece ninguna dificultad.

Por ejemplo, el valor del coeficiente  $B'_{ii}$  correspondiente a  $n = 10$  será

<sup>4</sup> Véase, por ejemplo, la obra de R. Cavé, *Le controle statistique des fabrications*.

$$B'_{ii} = \frac{1}{0.923} \sqrt{\frac{1.152}{10}} = 0.368$$

De igual forma el valor  $B''_{ii}$  correspondiente a  $n = 10$  será

$$B''_{ii} = \frac{1}{3.078} 1.08 = 0.350$$

Una vez establecidos los gráficos de control, la regla de control a adoptar puede ser enunciada de la forma siguiente:

— sacar muestras de  $n$  piezas a intervalos de tiempo regulares;

— determinar tras la extracción de cada muestra los estadísticos  $\bar{x}$  y  $\sigma'$ , o bien los estadísticos  $\bar{x}$  y  $w$ ;

— representar ambos estadísticos sobre los correspondientes gráficos de control (gráficos  $\bar{x}$  y  $\sigma'$ , o bien gráficos  $\bar{x}$  y  $w$ );

— si los dos puntos muestrales resultantes se sitúan dentro de sus correspondientes límites de atención o alerta, decidir que el proceso se desarrolla normalmente;

— si uno cualquiera de los dos puntos muestrales se sitúa fuera de sus correspondientes límites de intervención, parar inmediatamente la fabricación y proceder al reglaje del proceso;

— si uno cualquiera de los dos puntos muestrales se sitúa entre los correspondientes límites de intervención y de atención, proceder a la inmediata extracción de una nueva muestra de  $n$  piezas sin esperar al final del período de tiempo intermuestra. Entonces, si el nuevo punto muestral obtenido vuelve a situarse entre los límites de atención y de intervención, o bien sale fuera de los límites de intervención, parar inmediatamente la fabricación y proceder al reglaje del proceso. Si, por el contrario, el nuevo punto muestral se sitúa entre los límites de atención, decidir que el proceso se desarrolla normalmente.

## 9.2.2 Gráficos de control clásicos con tamaño de muestra prefijado para la vigilancia de un proceso sobradamente apto para el trabajo que se le confía

Cuando el proceso es sobradamente apto para cumplir con las especificaciones, es decir, cuando en las condiciones óptimas de reglaje la proporción de desechos obtenible es inferior al 2 ‰ ( $T_s - T_i > 6.18\sigma^*$ ), no tiene demasiado interés tomar como valor de consigna el centro,  $m_0$ , del intervalo de especificación. De hecho, pueden aceptarse descentramientos de la media de la variabilidad que no impliquen proporciones de desechos superiores al 1 ‰. Así, más que vigilar que la media de la variabilidad se mantenga en  $m_0 = (T_i + T_s)/2$  a lo largo del proceso de fabricación, lo que habrá que vigilar es que dicha media se mantenga dentro del intervalo ( $m_{0i}$ ,  $m_{0s}$ ) de límites (ver fig. 9.17)

$$m_{0s} = T_s - 3.09\sigma^*$$

$$m_{0i} = T_i + 3.09\sigma^*$$

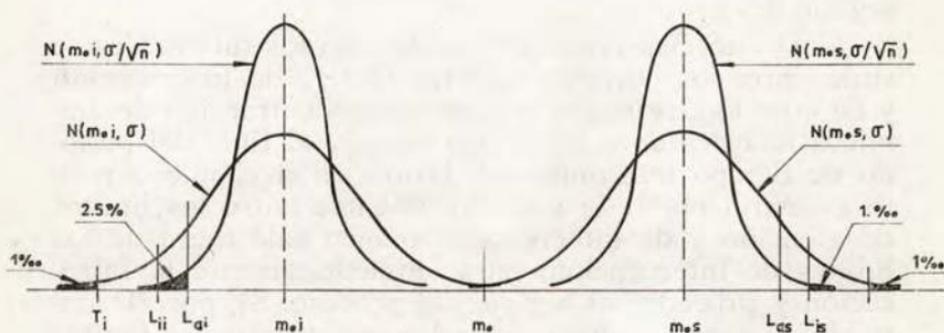


Fig. 9.17

En consecuencia, las líneas límites del gráfico  $\bar{x}$  deberán ser determinadas a partir de las expresiones siguientes:

$$L_{is} = T_s - 3.09\sigma^* + 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ii} = T_i + 3.09\sigma^* - 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{as} = T_s - 3.09\sigma^* + 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ai} = T_i + 3.09\sigma^* - 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

Por lo que a los gráficos  $\sigma'$  o  $w$  se refiere, es aplicable, sin modificación alguna, todo lo expuesto en el párrafo anterior.

Si para la estimación de la desviación tipo de la variabilidad del proceso se utiliza la desviación tipo muestral media,  $\bar{\sigma}'$ , de  $k$  muestras de  $n$  piezas, las expresiones analíticas de los límites de control podrán ser escritas en la forma

$$L_{is} = T_s - \frac{1}{b_n} \left( 3.09 - \frac{3.09}{\sqrt{n}} \right) \bar{\sigma}' = T_s - D'_i \bar{\sigma}'$$

$$L_{ii} = T_i + \frac{1}{b_n} \left( 3.09 - \frac{3.09}{\sqrt{n}} \right) \bar{\sigma}' = T_s - D'_i \bar{\sigma}'$$

$$L_{as} = T_s - \frac{1}{b_n} \left( 3.09 - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \right) \bar{\sigma}' = T_i + D'_a \bar{\sigma}'$$

$$L_{ai} = T_i + \frac{1}{b_n} \left( 3.09 - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \right) \bar{\sigma}' = T_i + D'_a \bar{\sigma}'$$

Si, por el contrario, se utiliza la amplitud media  $\bar{w}$  de  $k$  muestras de  $n$  piezas, las correspondientes expresiones analíticas de los límites de control serán:

$$L_{is} = T_s - \frac{1}{d_n} \left( 3.09 - \frac{3.09}{\sqrt{n}} \right) \bar{w} = T_s - D''_i \bar{w}$$

$$L_{ii} = T_i + \frac{1}{d_n} \left( 3.09 - \frac{3.09}{\sqrt{n}} \right) \bar{w} = T_i + D''_i \bar{w}$$

$$L_{as} = T_s - \frac{1}{d_n} \left( 3.09 - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \right) \bar{w} = T_s - D''_a \bar{w}$$

$$L_{ai} = T_i + \frac{1}{d_n} \left( 3.09 - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \right) \bar{w} = T_i + D''_a \bar{w}$$

Los valores de los coeficientes  $D'_i$ ,  $D_a$ ,  $D''_i$  y  $D''_a$  han sido tabulados, y su empleo permite reducir al mínimo el trabajo de cálculo.

### 9.2.3 *Gráficos de control clásicos con condiciones de eficacia prefijadas*

El método clásico de establecimiento de gráficos de control no resiste una crítica rigurosa.

Un primer punto débil de dicho método es la elección arbitraria del tamaño de la muestra. El hecho de dejar poco menos que al gusto del responsable del servicio de control de calidad la elección del número de piezas a extraer de forma periódica carece desde luego de seriedad científica.

Un segundo punto débil del método clásico es que, para la determinación de las rectas límites, sólo se tiene en cuenta el riesgo  $\alpha$  de proceder a un reglaje indebido del proceso cuando éste funciona correctamente, y se prescinde por completo del riesgo de no proceder al reglaje del proceso cuando las condiciones reales de funcionamiento son inadmisibles.

Ambos defectos tienen un origen común: el prescindir del hecho de que un gráfico de control no es otra cosa que una prueba de la hipótesis de que el proceso continúa bajo control estadístico y que, en consecuencia, existe una función de eficacia ligada al mismo que no debe ser ignorada si se quieren apurar al máximo las posibilidades del modelo matemático adoptado.

En realidad, un gráfico de control debe establecerse del mismo modo que una prueba de hipótesis, es decir, fijando unas condiciones de eficacia y determinando la regla de decisión que las satisfaga de la forma más aproximada posible.

En el caso concreto de un proceso de fabricación sobradamente apto para cumplir con las especificaciones, el correspondiente gráfico  $\bar{x}$  podrá plantearse a partir de las condiciones de eficacia  $(\omega_0, \bar{R}_0)$  y  $(\omega_1, \bar{R}_1)$ . Deducido el tamaño de la muestra y las líneas límites del gráfico  $\bar{x}$  de acuerdo con estas condiciones, se tendrá la seguridad de que, si el proceso marcha normalmente, es decir, si la proporción de piezas defectuosas fabricadas es igual o inferior a  $\omega_0$ , se sacarán en promedio  $\bar{R}_0$  muestras consecutivas de  $n$  piezas antes de encontrar una que provoque el indebido reglaje del proceso, mientras que, si las condiciones de fabricación han llegado a deteriorarse hasta tal punto que la proporción de piezas defectuosas alcanza el valor  $\omega_1$ , tal circunstancia podrá ser detectada, en promedio, tras la extracción de  $\bar{R}_1$  muestras consecutivas de  $n$  piezas.

Lo mismo puede decirse de los gráficos  $\sigma'$  o  $w$ , para cuyo establecimiento podrá partirse de unas condiciones de eficacia  $(\sigma_0, 1 - \alpha)$  y  $(\sigma_1, \beta)$  expresables, en último término, bajo la forma  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$ .

Si el proceso no es apto o es justamente apto para

cumplir con las especificaciones. no tiene sentido fijar  $\omega_0$ , toda vez que en este caso dicha proporción debe ser necesariamente igual a la proporción mínima de desechos,  $\omega^*$ , obtenible en el proceso, la cual puede ser calculada a partir de la expresión

$$\omega^* = 2\phi\left(\frac{T_1 - T_s}{2\sigma}\right)$$

A lo largo de los dos párrafos siguientes describiremos con cierto detalle el establecimiento de un gráfico  $\bar{x}$  a partir de unas condiciones de eficacia prefijadas.

#### 9.2.4 *Gráficos de control clásicos con condiciones de eficacia prefijadas para la vigilancia de un proceso no apto o justamente apto para el trabajo que se le confía*

En este caso los datos suelen ser, en general, los límites de especificación  $T_1$  y  $T_s$ , la calidad rechazable  $\omega_1$ , los riesgos de primera y segunda especie  $\alpha$  y  $\beta$ , o lo que es lo mismo, las longitudes de ráfaga media  $\bar{R}_0$  y  $\bar{R}_1$  correspondientes a las calidades aceptable y rechazable y, finalmente, una estimación  $\sigma^*$  de la desviación tipo de la variabilidad del proceso.

Se trata de determinar el tamaño  $n$  de la muestra y los límites  $L_{1s}$ ,  $L_{1i}$ ,  $L_{2s}$  y  $L_{2i}$  del gráfico  $\bar{x}$ , de forma que la curva de eficacia del mismo pase aproximadamente por los puntos  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$ , siendo

$$\omega_0 = 2\phi[(T_1 - T_s)/2\sigma]$$

Sean  $m_{1s}$  y  $m_{1i}$  los valores de la media en los que tendría que centrarse la variabilidad del proceso para que la proporción de desechos producida fuese en ambos casos justamente igual a  $\omega_1$ , y supongamos que se cumplen las condiciones

$$\phi\left(\frac{L_{is} - m_{1s}}{\sigma^*/\sqrt{n}}\right) = \beta$$

$$\phi\left(\frac{L_{ii} - m_{1s}}{\sigma^*/\sqrt{n}}\right) = 0$$

En estas condiciones será posible escribir que (ver fig. 9.18)

$$L_{is} = m_0 + K_{\alpha/2} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{is} = m_{1s} + K_{1-\beta} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{m_{1s} - m_0}{\sigma^*} = \frac{K_{\alpha/2} - K_{1-\beta}}{\sqrt{n}}$$

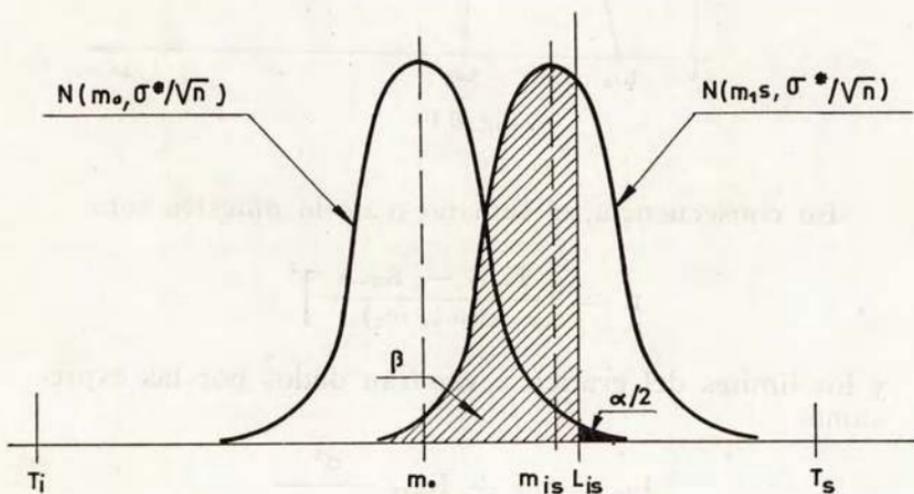


Fig. 9.18

La expresión precedente puede escribirse en la forma

$$d(\omega_0, \omega_1) = \frac{K_{\alpha/2} - K_{1-\beta}}{\sqrt{n}}$$

siendo  $d(\omega_0, \omega_1)$  el desplazamiento centrado y reducido correspondiente a los valores  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , calculable a partir del método numérico-gráfico descrito en el párrafo 7.2.3 (ver fig. 9.19).

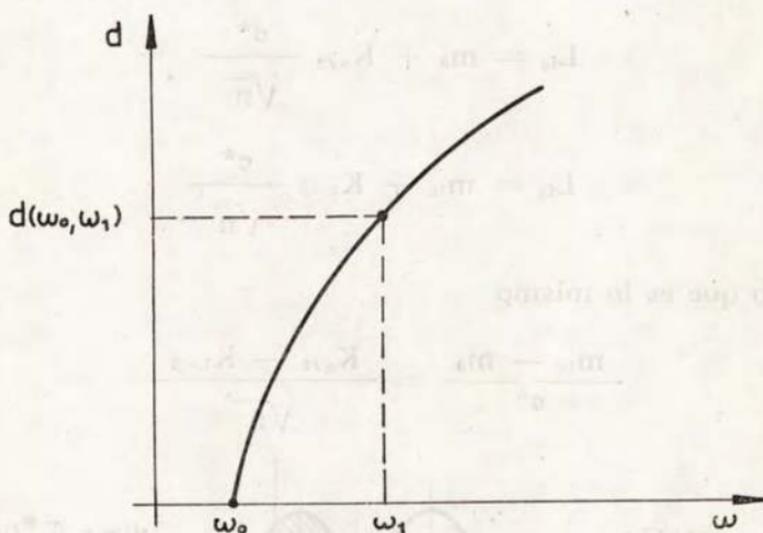


Fig. 9.19

En consecuencia, el tamaño  $n$  de la muestra será

$$n = \left[ \frac{K_{\alpha/2} - K_{1-\beta}}{d(\omega_0, \omega_1)} \right]^2$$

y los límites del gráfico  $\bar{x}$  vendrán dados por las expresiones

$$L_{1\alpha} = m_0 + K_{\alpha/2} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{il} = m_0 - K_{c/2} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ns} = m_0 + 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ai} = m_0 - 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

Como ejemplo de aplicación, supongamos el siguiente caso particular:  $T_1 = 20$ ,  $T_s = 38$ ,  $\sigma^* = 4$ ,  $\omega_1 = 8\%$ ,  $\alpha = 0.001$  ( $\bar{R}_0 = 1\ 000$ ) y  $\beta = 0.50$  ( $\bar{R}_1 = 2$ ).

En este caso

$$K_{\omega_0/2} = \frac{T_s - m_0}{\sigma} = \frac{38 - 29}{4} = 2.25$$

$$\omega_0 = 2\phi(-K_{\omega_0/2}) = 0.0244$$

y, según ya vimos en el párrafo 7.3.2

$$d(\omega_0, \omega_1) = 0.838$$

En consecuencia,

$$n = \left( \frac{3.29053 - 0}{0.838} \right)^2 = 16$$

$$L_{is} = 29 + 3.29053 \frac{4}{4} = 32.29053$$

$$L_{il} = 29 - 3.29053 \frac{4}{4} = 25.70947$$

$$L_{ns} = 29 + 1.96000 \frac{4}{4} = 30.96000$$

$$L_{ai} = 29 - 1.96000 \frac{4}{4} = 27.04000$$

Para la determinación de los límites del gráfico de control de la dispersión de la variabilidad del proceso, puede seguirse el método ya expuesto en el párrafo 9.2.1, tomando  $n = 16$ .

Si además de las condiciones

$$\phi\left(\frac{L_{1s} - m_{1s}}{\sigma^*/\sqrt{n}}\right) = \beta$$

$$\phi\left(\frac{L_{1i} - m_{1s}}{\sigma^*/\sqrt{n}}\right) = 0$$

se cumplen las condiciones

$$1 - \phi\left(\frac{T_s - m_{1s}}{\sigma^*}\right) = \omega_1$$

$$\phi\left(\frac{T_i - m_{1s}}{\sigma^*}\right) = 0$$

es decir, si los valores  $m_{1s}$  y  $m_{1i}$  pueden ser calculados directamente a partir de las expresiones

$$m_{1s} = T_s - K_{\omega_1}\sigma^*$$

$$m_{1i} = T_i + K_{\omega_1}\sigma^*$$

la determinación del tamaño  $n$  de la muestra no reviste ninguna dificultad. En efecto, la expresión

$$\frac{m_{1s} - m_0}{\sigma} = \frac{K_{\alpha/2} - K_{1-\beta}}{\sqrt{n}}$$

puede ser escrita en la forma

$$\frac{T_s - K_{\omega_1}\sigma^* - T_s + K_{\omega_0/2}\sigma^*}{\sigma^*} = K_{\omega_0/2} - K_{\omega_1} =$$

$$= \frac{K_{\alpha/2} - K_{1-\beta}}{\sqrt{n}}$$

de donde

$$n = \left[ \frac{K_{\alpha/2} - K_{1-\beta}}{K_{\omega_0/2} - K_{\omega_1}} \right]^2$$

expresión de cálculo inmediato a partir de las condiciones de eficacia.

Es de observar que, cuando  $\beta$  sea igual o superior a 0.5 ( $\bar{R}_1$  igual o superior a 2)  $K_{1-\beta}$  será igual o superior a cero, mientras que, cuando  $\beta$  sea inferior a 0.5 ( $\bar{R}_1$  inferior a 2),  $K_{1-\beta}$  será inferior a cero (negativa).

El conjunto de condiciones necesarias para que el método descrito sea aplicable en la práctica pueden ser expresadas aproximadamente en la forma

$$\omega_1 \geq 1 - \phi(2K_{\omega_0/2} - 3.09)$$

$$\beta \leq \phi(2K_{\alpha/2} - 3.09)$$

aceptando como despreciables las colas de área igual o inferior a 0.001.

Estas condiciones son de comprobación muy simple. De hecho, la segunda condición se cumple siempre, toda vez que el valor adoptado para  $\alpha$  suele ser 0.001 y, en consecuencia,  $K_{\alpha/2} = 3.29053$ .

### 9.2.5 Gráficos de control clásicos con condiciones de eficacia prefijadas para la vigilancia de un proceso sobradamente apto para el trabajo que se le confía

En este caso los datos suelen ser, en general, los límites de especificación  $T_i$  y  $T_s$ , las calidades aceptable y rechazable  $\omega_0$  y  $\omega_1$ , los riesgos de primera y segunda especie  $\alpha$  y  $\beta$ , y una estimación  $\sigma^*$  de la desviación tipo de la variabilidad del proceso.

Se trata de determinar el tamaño  $n$  de la muestra y los límites  $L_{is}$ ,  $L_{ii}$ ,  $L_{as}$  y  $L_{ai}$  del gráfico  $\bar{x}$ , de forma que la curva de eficacia del mismo pase aproximadamente por los puntos  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$ .

Dado que en este caso se cumple la condición

$$T_s - T_i > 6.18\sigma^*$$

será posible escribir el siguiente conjunto de expresiones evidentes (ver fig. 9.20)

$$m_{0s} = T_s - K_{\omega_0}\sigma^*$$

$$m_{0i} = T_i + K_{\omega_0}\sigma^*$$

$$m_{1s} = T_s - K_{\omega_1}\sigma^*$$

$$m_{1i} = T_i + K_{\omega_1}\sigma^*$$

$$L_{is} = T_s - K_{\omega_0}\sigma^* + K_{\alpha} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ii} = T_i - K_{\omega_1}\sigma^* + K_{1-\beta} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

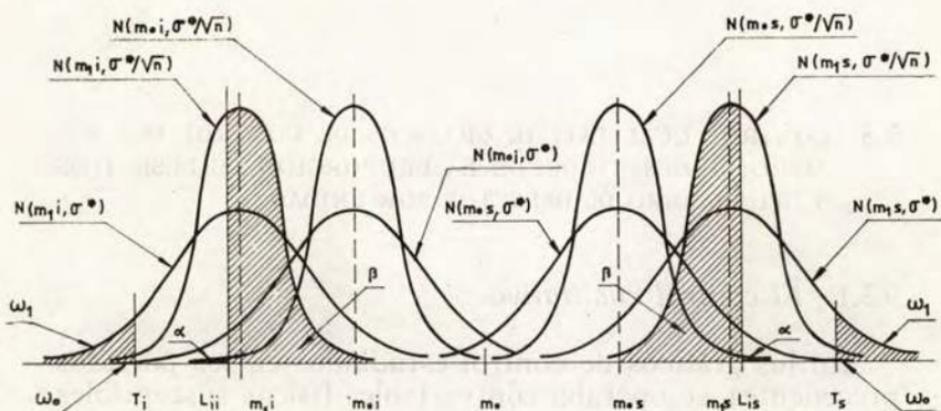


Fig. 9.20

De estas expresiones se deduce inmediatamente que

$$n = \left[ \frac{K_\alpha - K_{1-\beta}}{K_{\omega_0} - K_{\omega_1}} \right]^2$$

$$L_{is} = T_s - \sigma^* \frac{K_\alpha K_{\omega_1} - K_{1-\beta} K_{\omega_0}}{K_\alpha - K_{1-\beta}}$$

$$L_{ii} = T_i + \sigma^* \frac{K_\alpha K_{\omega_1} - K_{1-\beta} K_{\omega_0}}{K_\alpha - K_{1-\beta}}$$

Los límites de atención pueden ser determinados a partir de las expresiones

$$L_{as} = T_s - K_{\omega_0} \sigma^* + 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ai} = T_i + K_{\omega_0} \sigma^* - 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

Así pues, en este caso, el establecimiento del gráfico  $\bar{x}$  no ofrece ninguna dificultad.

### 9.3 CONTROL CUALITATIVO. GRAFICOS DE CONTROL DEL NUMERO DE DESECHOS, DE LA PROPORCION DE DESECHOS Y DEL NUMERO DE DEFECTOS POR UNIDAD

#### 9.3.1 *El control cualitativo*

En los gráficos de control estudiados en los párrafos precedentes, se operaba con variables físicas susceptibles de medida.

Sin embargo, en la práctica se presentan muchos casos en los que la variable objeto de control no es medible. Tal es el caso de ciertas fabricaciones mecánicas cuyas piezas son calificadas como buenas o malas de acuerdo con algún criterio puramente cualitativo, como, por ejemplo, la ausencia de imperfecciones estructurales (poros, grietas, rugosidades, rebabas, etc.). Casos similares se presentan en las industrias química y textil, donde en general no puede hablarse de piezas y en consecuencia tampoco de desechos. Por ejemplo, en la fabricación de tejidos se obtiene casi siempre una pieza continua, que puede presentar a lo largo de su longitud defectos en mayor o menor proporción (rugosidades, desigualdades de coloración, manchas, etc.).

A veces también ocurre que, aun siendo medible la variable física objeto de control, o no se dispone de aparatos de medida adecuados, o bien la medición resultaría a un coste prohibitivo, ya sea por el coste del aparato de medida, ya sea por la complicación inherente a la propia medición.

En todos estos casos puede aplicarse la teoría general de los gráficos de control, adoptando como función discriminante para comprobar y vigilar el estado de control estadístico del proceso, según convenga:

— el número de piezas defectuosas,  $c$ , contenidas en una muestra de tamaño  $n$ ;

- la proporción de piezas defectuosas,  $\omega$ , contenidas en una muestra de tamaño  $n$ ,  $c$
- el número de defectos por unidad de producto controlado.

### 9.3.2 Gráficos de control del número de desechos o de la proporción de desechos

Este tipo de gráficos se utiliza principalmente en las fabricaciones mecánicas, donde en general es posible determinar si una pieza es buena o mala mediante el empleo de calibre tipo «pasa o no pasa».

Sea  $\omega^*$  una estimación suficientemente buena de la proporción de desechos generados por el proceso en las condiciones óptimas de reglaje. Si se procede a la extracción de una muestra de  $n$  piezas, la probabilidad de encontrar en ella  $c$  elementos defectuosos será, evidentemente

$$p_c = C_n^c \omega^{*c} (1 - \omega^*)^{n-c}$$

La ley de probabilidad  $c - p_c$  es, pues, una ley binomial.

Se demuestra que la media y la desviación tipo de la ley binomial, cuando se toma como variable aleatoria el número de desechos  $c$ , tienen respectivamente por valores

$$m_c = n\omega^*$$

$$\sigma_c = \sqrt{n\omega^*(1 - \omega^*)}$$

Por el contrario, cuando se toma como variable aleatoria la proporción de desechos  $c/n$ , los correspondientes valores de la media y la desviación tipo son

$$m_{c/n} = \omega^*$$

$$\sigma_{c/n} = \sqrt{\frac{\omega^*(1 - \omega^*)}{n}}$$

Cuando el tamaño de la muestra es bastante grande y la proporción de desechos no es demasiado próxima a 0 ó a 1, la distribución binomial se puede aproximar mediante la distribución normal. En estas condiciones, de acuerdo con la teoría general de los gráficos de control, será posible definir de forma inmediata las líneas límites de los gráficos de control  $c$  ó  $c/n$  en la forma:

Gráfico  $c$ :

$$L_{is} = n\omega^* + 3.09\sqrt{n\omega^*(1 - \omega^*)}$$

$$L_{ii} = n\omega^* - 3.09\sqrt{n\omega^*(1 - \omega^*)}$$

$$L_{as} = n\omega^* + 1.96\sqrt{n\omega^*(1 - \omega^*)}$$

$$L_{ai} = n\omega^* - 1.96\sqrt{n\omega^*(1 - \omega^*)}$$

Gráfico  $\omega = c/n$ :

$$L_{is} = \omega^* + 3.09\sqrt{\omega^*(1 - \omega^*)/n}$$

$$L_{ii} = \omega^* - 3.09\sqrt{\omega^*(1 - \omega^*)/n}$$

$$L_{as} = \omega^* + 1.96\sqrt{\omega^*(1 - \omega^*)/n}$$

$$L_{ai} = \omega^* - 1.96\sqrt{\omega^*(1 - \omega^*)/n}$$

Cuando los límites inferiores de intervención y de atención resultan negativos, debe tomarse, evidentemente,  $L_{ii} = 0$  y  $L_{ai} = 0$ .

En la figura 9.21 se muestra el aspecto de estos gráficos.

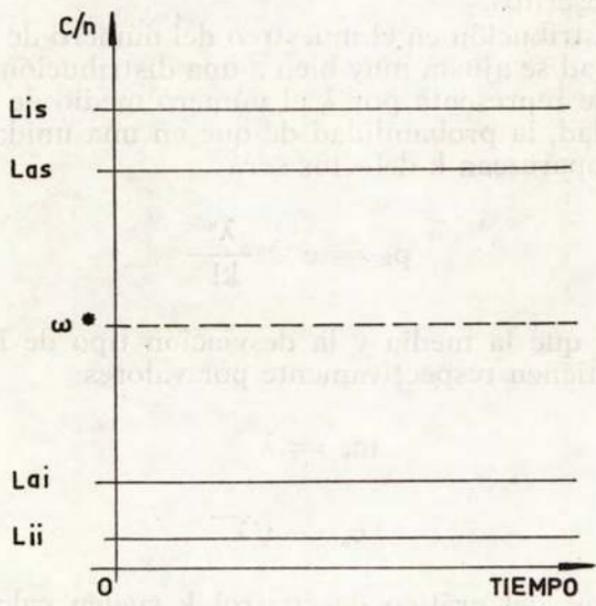
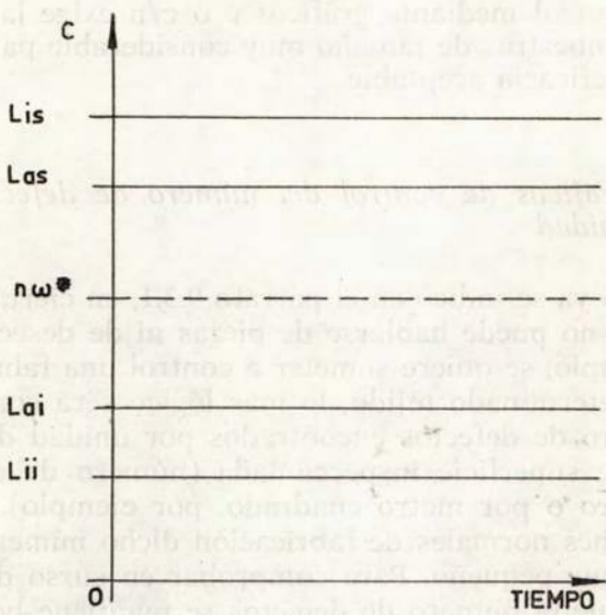


Fig. 9 21

El control mediante gráficos  $c$  ó  $c/n$  exige la extracción de muestras de tamaño muy considerable para obtener una eficacia aceptable.

### 9.3.3 *Gráficos de control del número de defectos por unidad*

Como ya se indicó en el párrafo 9.3.1, en ciertas fabricaciones no puede hablarse de piezas ni de desechos. Si, por ejemplo, se quiere someter a control una fabricación de un determinado tejido, lo más lógico será considerar el número de defectos encontrados por unidad de longitud o de superficie inspeccionada (número de defectos por metro o por metro cuadrado, por ejemplo). En las condiciones normales de fabricación dicho número deberá ser muy pequeño. Para comprobar en curso de fabricación que el número de defectos se mantiene bajo control, será posible utilizar gráficos de control análogos a los ya descritos.

La distribución en el muestreo del número de defectos por unidad se ajusta muy bien a una distribución de Poisson. Si se representa por  $\lambda$  el número medio de defectos por unidad, la probabilidad de que en una unidad determinada aparezcan  $k$  defectos será

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Dado que la media y la desviación tipo de la ley de Poisson tienen respectivamente por valores

$$m_k = \lambda$$

$$\sigma_k = \sqrt{\lambda}$$

los límites del gráfico de control  $k$  suelen calcularse a partir de las expresiones aproximadas siguientes

$$L_{is} = \lambda + 3.09\sqrt{\lambda}$$

$$L_{ii} = \lambda - 3.09\sqrt{\lambda}$$

$$L_{as} = \lambda + 1.96\sqrt{\lambda}$$

$$L_{ai} = \lambda - 1.96\sqrt{\lambda}$$

Desde luego, esto sólo puede ser aceptado como una primera aproximación. En realidad, los límites de intervención y de atención deben calcularse a partir de las expresiones

$$\sum_0^{L_{ii}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 0.001$$

$$\sum_{L_{is}}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 0.001$$

$$\sum_0^{L_{ai}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 0.025$$

$$\sum_{L_{as}}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 0.025$$

Estas expresiones son calculables con ayuda de las tablas de la función de distribución de la ley de Poisson.

## 9.4 METODOS ESPECIALES DE CONTROL EN CURSO DE FABRICACION

### 9.4.1 Gráficos de control por medianas

En algunos casos resulta más práctico utilizar, en lugar de la media muestral  $\bar{x}$ , la mediana muestral  $y_{s+1}$ , como función discriminante para vigilar los desarreglos del proceso.

Se deduce fácilmente que, para pasar de un control por medias a un control por medianas conservando los mismos límites de intervención y manteniendo idénticas condiciones de eficacia, basta extraer una muestra 1.57 veces superior aproximadamente a la exigida por el control por medias. En efecto, dado que la ley de distribución de las medianas muestrales es, aproximadamente, normal  $N(m, \sqrt{\pi/2} \sigma/\sqrt{n})$ , se comprende que, para conservar los mismos límites al pasar del control por medias al control por medianas, será imprescindible que se cumpla la condición

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n'}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

siendo  $n$  y  $n'$  los tamaños de muestra correspondientes a los gráficos  $\bar{x}$  e  $y_{s+1}$ , respectivamente.

En consecuencia

$$n' = \frac{\pi}{2} n \approx 1.57n$$

Para  $n'$  convendrá tomar el valor impar más próximo a  $1.57n$ . De esta forma la mediana muestral será el valor

del término de rango  $s + 1$  de la muestra, es decir, el valor central.

En el caso concreto de un proceso sobradamente preciso para cumplir con las especificaciones, el tamaño de la muestra a extraer en un control por medianas con idénticos límites de intervención y atención que los correspondientes al control por medias equivalente será

$$n' = \frac{\pi}{2} \left( \frac{K_{\alpha} - K_{1-\beta}}{K_{\omega_0} - K_{\omega_1}} \right)^2 \approx 2s + 1$$

La adopción de la mediana muestral  $y_{s+1}$  como función discriminante para la vigilancia de los desarreglos del proceso permite pasar en algunos casos de un control cuantitativo a un control cualitativo por calibres de la misma eficacia. Esta posibilidad es especialmente interesante cuando el control por medidas es muy costoso, o no se dispone de aparatos de medida adecuados.

Cavé propone un método de gran simplicidad y economía para el caso concreto de procesos sobradamente aptos para cumplir con las especificaciones.

Se empieza por determinar, de acuerdo con lo expuesto en el párrafo 9.2.5, el tamaño de muestra  $n$  y los límites  $L_{is}$  y  $L_{il}$  correspondientes a un gráfico  $\bar{x}$ . Se construyen unos calibres «pasa o no pasa» de cotas  $L_{is}$  y  $L_{il}$  («calibres modificados») y se extrae una muestra de tamaño  $1.57n$ . Si al examinar las  $2s + 1$  piezas de la muestra, al menos  $s + 1$  de ellas se hallan dentro de los calibres, se tendrá la certeza de que la mediana muestral está comprendida entre  $L_{il}$  y  $L_{is}$  y, en consecuencia, deberá decidirse que el proceso funciona correctamente. Por el contrario, si  $s$  o más piezas son exteriores a los calibres, será preferible pensar que se ha producido un desarreglo y la fabricación deberá ser detenida.

Este método de control de indudable sencillez y economía tiene el inconveniente, común a todos los gráficos de control por calibres, que no permite detectar variaciones de la variabilidad, de forma que ésta puede sufrir alteraciones considerables sin que nos apercebamos de ello.

### 9.4.2 Gráficos de control con límites descentrados

Cuando el proceso no es apto para cumplir con las especificaciones, la fabricación de desechos es inevitable. En párrafos precedentes hemos establecido los correspondientes gráficos de control tratando de minimizar la proporción de desechos.

Pero a veces ocurre, sobre todo en las fabricaciones mecánicas, que los desechos pueden ser en parte recuperados si se les somete a un proceso posterior de corrección. Tal es el caso, por ejemplo, de una fabricación de ejes de acero. Los ejes de diámetro inferior a  $T_1$  serán por completo inaprovechables, mientras que los ejes de diámetro superior a  $T_s$  podrán ser objeto de rectificación.

En estas condiciones, un gráfico de control  $\bar{x}$  con un valor de consigna  $m_0 = (T_1 + T_s)/2$  puede no ser óptimo desde el punto de vista económico, sobre todo si el coste de rectificación es pequeño en comparación del quebranto económico que supone la obtención de un desecho. En estos casos, los gráficos de control deben establecerse pensando, más que en minimizar la proporción total de desechos, en obtener una proporción mínima de desechos no recuperables.

En el caso concreto de la fabricación de ejes de acero, si  $T_s - T_1 < 6.18\sigma^*$ , convendrá tomar como valor de consigna  $T_1 + 3.09\sigma^*$ . De esta forma se conseguirá que, mientras el estado de control estadístico se mantenga, la proporción de desechos no recuperables obtenida sea tan sólo del 1 ‰. En contrapartida obtendremos una proporción considerable de desechos recuperables.

En estas condiciones, las expresiones analíticas de las líneas límites del gráfico de control serán (ver fig. 9.22)

$$L_{1\sigma} = T_1 + 3.09\sigma^* + 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ti} = T_i + 3.09\sigma^* - 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{as} = T_i + 3.09\sigma^* + 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ai} = T_i + 3.09\sigma^* - 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

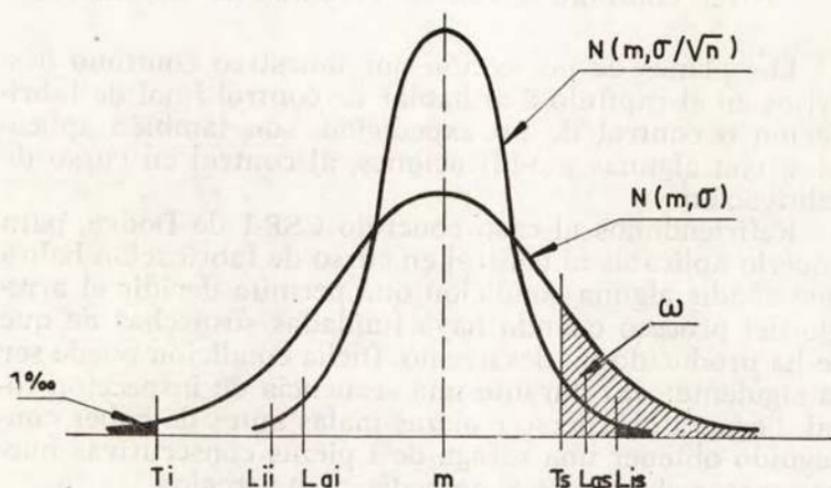


Fig. 9.22

Si los desechos recuperables fuesen los de medida inferior al límite de especificación  $T_i$ , el valor de consigna debería ser  $T_s - 3.09\sigma^*$  y los límites del gráfico de control vendrían dados por las expresiones

$$L_{is} = T_s - 3.09\sigma^* + 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ai} = T_s - 3.09\sigma^* - 3.09 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{as} = T_s - 3.09\sigma^* + 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

$$L_{ai} = T_s - 3.09\sigma^* - 1.96 \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$$

### 9.4.3 *Aplicación de los planes de inspección por muestreo continuo al control en curso de fabricación*

Los planes de inspección por muestreo continuo descritos en el capítulo 8 al hablar de control final de fabricación o control de pre-expedición, son también aplicables, con algunas modificaciones, al control en curso de fabricación.

Refiriéndonos al caso concreto CSP-1 de Dodge, para hacerlo aplicable al control en curso de fabricación habrá que añadir alguna condición que permita decidir el arreglo del proceso cuando haya fundadas sospechas de que se ha producido un desarreglo. Dicha condición puede ser la siguiente: «Si durante una secuencia de inspección total, llegan a obtenerse  $r$  piezas malas antes de haber conseguido obtener una ráfaga de  $i$  piezas consecutivas buenas, parar el proceso y proceder a su arreglo».

Así pues, los límites de intervención de los gráficos clásicos quedan sustituidos en este caso por una «regla de intervención».

Se han propuesto diferentes reglas de intervención. En lo que sigue nos limitaremos a considerar la regla de intervención precedente o regla  $(i, r)$ .

Para establecer una regla  $(i, r)$  de control en curso de fabricación debe partirse, como en toda prueba de hipótesis, de unas condiciones de eficacia prefijadas.

Sean  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  y  $(\omega_1, \beta)$  dichas condiciones. Para determinar los correspondientes valores de los parámetros  $r$  e  $i$ , partiremos <sup>5</sup> de la función de eficacia de la prue-

<sup>5</sup> Ver J. Mothes y J. Torrens-Ibern, *Estadística aplicada a la ingeniería*, págs. 283-286.

ba. Para determinar dicha función basta tener en cuenta que, como la probabilidad de llegar a obtener una ráfaga de  $i$  piezas consecutivas buenas, sin tener para nada en cuenta la calidad de la pieza  $i - 1$ , es

$$(1 - \omega)^i$$

la probabilidad de no llegar a obtener  $i$  piezas consecutivas buenas será

$$1 - (1 - \omega)^i$$

y por consiguiente, la probabilidad de encontrar  $r$  piezas malas antes de llegar a obtener una ráfaga de  $i$  piezas consecutivas buenas, o lo que es lo mismo, la probabilidad de llegar a obtener  $r$  ráfagas de longitud inferior a  $i$ , tendrá por valor

$$[1 - (1 - \omega)^i]^r$$

En consecuencia, la función de eficacia de la prueba vendrá dada por la expresión

$$P(\omega) = 1 - [1 - (1 - \omega)^i]^r$$

y será posible escribir el siguiente sistema de ecuaciones

$$1 - \alpha = 1 - [1 - (1 - \omega_0)^i]^r$$

$$\beta = 1 - [1 - (1 - \omega_1)^i]^r$$

La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener los valores de  $r$  e  $i$  que satisfacen las condiciones de eficacia prefijadas.

Después de transformaciones muy simples, el sistema de ecuaciones precedente puede escribirse en la forma

$$i \log (1 - \omega_0) = \log (1 - \sqrt[r]{\alpha})$$

$$i \log (1 - \omega_1) = \log (1 - \sqrt[r]{1 - \beta})$$

Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones se obtiene finalmente la expresión

$$\frac{\log (1 - \omega_0)}{\log (1 - \omega_1)} = \frac{\log (1 - \sqrt[r]{\alpha})}{\log (1 - \sqrt[r]{1 - \beta})}$$

Esta ecuación es función exclusiva de  $r$  y puede resolverse por un método numérico-gráfico, dando a  $r$  valores enteros consecutivos hasta encontrar uno que la satisfaga aproximadamente.

Una vez determinado  $r$ , el correspondiente valor de  $i$  podrá calcularse a partir de la expresión:

$$i = \frac{\log (1 - \sqrt[r]{\alpha})}{\log (1 - \omega_0)}$$

Dado que hay que adoptar para  $r$  e  $i$  valores enteros, los riesgos  $\alpha$  y  $\beta$  reales pueden ser muy diferentes de los deseados. Por ello siempre debe calcularse *a posteriori* el valor de dichos riesgos y modificar  $r$  en una unidad si fuese necesario, a fin de ajustarse dentro de lo posible a las condiciones de eficacia prefijadas.

#### 9.4.4 Gráficos de control por observaciones acumuladas

En los gráficos clásicos de Shewhart, cada resultado muestral se supone independiente de los ya obtenidos en extracciones anteriores y la decisión se toma de acuerdo con dicho valor, ignorándose por completo los resultados muestrales precedentes. Esto supone un deficiente aprovechamiento de la información, toda vez que, en general, las extracciones sucesivas no son en realidad totalmente

independientes y de alguna manera los resultados muestrales ya obtenidos contienen información relativa al estado de control del proceso. Ignorar este hecho supone una pérdida de información.

Este defecto, que en algunos procesos industriales clásicos no tiene gran importancia, se manifiesta con toda intensidad en los procesos industriales continuos característicos de las industrias textiles, químicas y metalúrgicas, en las cuales las modificaciones de la calidad del producto no ocurren de forma brusca sino de forma gradual. En estos casos es del todo evidente que las muestras sucesivas no pueden considerarse independientes. Los gráficos de control clásicos resultan en estos casos poco sensibles para la detección de los desarreglos.

A fin de obviar estas dificultades, se han desarrollado métodos en los que cada valor muestral representado sobre el gráfico de control resume y acumula toda la información contenida en las muestras precedentes. De esta forma se logra una más eficaz detección de los desarreglos.

Dichos métodos se basan en la teoría del muestreo progresivo o secuencial de Wald, desarrollada en el capítulo 8.

Especial mención merecen los gráficos de control por observaciones acumuladas propuestos por J. Torrens-Ibern<sup>6</sup>, de los que daremos una breve noticia.

Dicho autor parte de los planes de inspección secuencial mediante rectas inclinadas de Wald aplicados en control de recepción, y propone las siguientes modificaciones para hacerlos aplicables al control en curso de fabricación:

— transformar las rectas inclinadas en rectas horizontales mediante un cambio de variable adecuado. Ya se vio en el capítulo 8 que esto podía conseguirse restando a cada valor muestral un valor de referencia  $s = (m_0 + m_1)/2$ , siendo  $m_0$  y  $m_1$  las medias de la variabilidad en

<sup>6</sup> J. Torrens-Ibern, *Los métodos estadísticos de control en los procesos industriales continuos*, «Cuadernos de Estadística Aplicada e Investigación Operativa», vol. II, fascículo 3, 1963.

las condiciones de reglaje óptima y rechazable, respectivamente;

— transformar cada observación individual en una observación que acumule en promedio la información suficiente como para hacer posible la toma de una decisión. Esto puede conseguirse procediendo a la extracción simultánea de un número de piezas (observaciones individuales) igual al que, en promedio, provocaría la toma de una decisión en plan de muestreo secuencial, es decir, igual al número de extracciones medias  $\bar{n}(m_1)$  correspondiente a la calidad rechazable  $m_1$ , o sea

$$n = \bar{n}(m_1) = 2 \frac{(1 - \beta) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} - \beta \ln \frac{1 - \alpha}{\beta}}{(m_1 - m_0)^2} \sigma^2$$

— prescindir de la recta de aceptación del lote, ya que dicho límite carece de sentido en un control en curso de fabricación, y tomar como límites de intervención superior e inferior las rectas de rechazo, es decir

$$L_{is} = h_2 = \frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{m_1 - m_0}$$

$$L_{ii} = -h_2 = -\frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{m_1 - m_0}$$

De esta forma se obtienen unos gráficos muy eficaces y adecuados para el control de procesos industriales continuos.

#### 9.4.5 Gráficos de control para variabilidades no normales

A lo largo de los párrafos precedentes se ha supuesto, a la hora de establecer los gráficos de control por medidas, que la variabilidad propia del proceso era normal.

Sin embargo, se ha comprobado que la variabilidad de algunos procesos industriales dista mucho de ser normal.

También en estos casos es posible establecer gráficos de control que, aun careciendo de la eficacia y precisión de los establecidos bajo la hipótesis de variabilidad normal, pueden prestar un gran servicio.

La posibilidad de establecer estos gráficos se basa en el Teorema Límite Central. En efecto, según ya vimos en el capítulo 2, la variable aleatoria  $\bar{x}$ , media muestral de una serie de  $n$  elementos extraídos aleatoriamente de una población cualquiera de media  $m$  y desviación tipo  $\sigma$ , tiene una ley de distribución cuya media y desviación tipo vienen dadas por las expresiones

$$m_{\bar{x}} = m$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y que asintóticamente tiende a la ley normal  $N(m, \sigma/\sqrt{n})$ . En consecuencia, si  $n$  es grande, será posible establecer un gráfico  $\bar{x}$  cuyos límites de atención e intervención vendrán dados por las expresiones

$$L_{1s} = m + 3.09\sigma/\sqrt{n}$$

$$L_{1i} = m - 3.09\sigma/\sqrt{n}$$

$$L_{as} = m + 1.96\sigma/\sqrt{n}$$

$$L_{ai} = m - 1.96\sigma/\sqrt{n}$$

Por otra parte, la variable aleatoria  $\sigma'$ , desviación tipo muestral de una serie de elementos extraídos aleatoriamente de una población cualquiera de media  $m$ , desviación tipo  $\sigma$  y momento centrado de cuarto orden  $\mu_4$ , tiene una ley de distribución cuya media y desviación tipo vienen dadas, para  $n$  grande, por las expresiones

$$m_{\sigma'} \approx \sigma$$

$$\sigma_{\sigma'} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + \frac{n-1}{2n} (\beta_2 - 3)}$$

siendo  $\beta_2 = \mu_4/\sigma^2$  el coeficiente de apuntamiento o curtosis de la población.

En consecuencia, para  $n$  grande, también será posible establecer un gráfico  $\sigma'$  cuyos límites de atención e intervención vendrán dados por las expresiones

$$L_{is}^* = \sigma + 3.09\sigma_{\sigma'}$$

$$L_{ii}^* = \sigma - 3.09\sigma_{\sigma'}$$

$$L_{as}^* = \sigma + 1.96\sigma_{\sigma'}$$

$$L_{ai}^* = \sigma - 1.96\sigma_{\sigma'}$$

Los gráficos  $\bar{x}$  y  $\sigma'$  obtenidos de esta forma, aun cuando no tienen la misma eficacia que los establecidos bajo la hipótesis de normalidad, permiten adoptar decisiones con un razonable grado de seguridad. En efecto, la aplicación de la desigualdad de Bienaymé-Tchebychef

$$Pr\{m - K\sigma < x < m + K\sigma\} > - \frac{1}{K^2}$$

pone de manifiesto que, para cualquiera de los dos gráficos de control, la probabilidad de obtener un punto muestral en el interior de los límites de intervención cuando el proceso se halla bajo control estadístico no es inferior a

$$1 - \frac{1}{K^2} = 1 - \frac{1}{3.09^2} = 0.895$$

El gráfico  $\sigma'$  no es muy utilizado en la práctica, pues requiere el empleo de muestras de tamaño muy considerable.

Por el contrario, el gráfico  $\bar{x}$  es muy utilizado, toda vez que la rápida convergencia hacia la normalidad de la ley de distribución de la variable aleatoria  $\bar{x}$  permite la extracción de muestras relativamente pequeñas.

$$P\{m - K\sigma < x < m + K\sigma\} > 1 - \frac{1}{K}$$

pone de manifiesto que, para cualquiera de los dos gráficos de control, la probabilidad de obtener un punto muestral en el interior de los límites de intervención cuando el proceso se halla bajo control estadístico no es inferior a

$$1 - \frac{1}{K} = 1 - \frac{1}{3.09} = 0.892$$

El gráfico  $\bar{x}$  no es muy utilizado en la práctica, pues requiere el empleo de muestras de tamaño muy considerable.

Por el contrario, el gráfico  $\bar{x}$  es muy utilizado, toda vez que la rápida convergencia hacia la normalidad de la ley de distribución de la variable aleatoria  $\bar{x}$  permite la extracción de muestras relativamente pequeñas.

# TABLAS

10	0.41250	0.61134	0.81018	0.01902	0.21786	0.41670	0.61554	0.81438	0.01322	0.21202	0.41086	0.60970	0.80854
11	0.41334	0.61218	0.81102	0.01986	0.21870	0.41754	0.61638	0.81522	0.01406	0.21286	0.41170	0.61054	0.80938
12	0.41418	0.61302	0.81186	0.02070	0.21954	0.41838	0.61722	0.81606	0.01486	0.21370	0.41254	0.61138	0.81022
13	0.41502	0.61386	0.81270	0.02154	0.22038	0.41922	0.61806	0.81690	0.01566	0.21454	0.41338	0.61222	0.81106
14	0.41586	0.61470	0.81354	0.02238	0.22122	0.42006	0.61890	0.81774	0.01646	0.21538	0.41422	0.61306	0.81190
15	0.41670	0.61554	0.81438	0.02322	0.22206	0.42090	0.61974	0.81858	0.01726	0.21622	0.41506	0.61390	0.81274
16	0.41754	0.61638	0.81522	0.02406	0.22290	0.42174	0.62058	0.81942	0.01806	0.21706	0.41590	0.61474	0.81358
17	0.41838	0.61722	0.81606	0.02490	0.22374	0.42258	0.62142	0.82026	0.01886	0.21790	0.41674	0.61558	0.81442
18	0.41922	0.61806	0.81690	0.02574	0.22458	0.42342	0.62226	0.82110	0.01966	0.21874	0.41758	0.61642	0.81526
19	0.42006	0.61890	0.81774	0.02658	0.22542	0.42426	0.62310	0.82194	0.02046	0.21958	0.41842	0.61726	0.81610
20	0.42090	0.61974	0.81858	0.02742	0.22626	0.42510	0.62394	0.82278	0.02126	0.22042	0.41926	0.61810	0.81694
21	0.42174	0.62058	0.81942	0.02826	0.22710	0.42594	0.62478	0.82362	0.02206	0.22126	0.42010	0.61894	0.81778
22	0.42258	0.62142	0.82026	0.02910	0.22794	0.42678	0.62562	0.82446	0.02286	0.22210	0.42094	0.61978	0.81862
23	0.42342	0.62226	0.82110	0.02994	0.22878	0.42762	0.62646	0.82530	0.02366	0.22294	0.42178	0.62062	0.81946
24	0.42426	0.62310	0.82194	0.03078	0.22962	0.42846	0.62730	0.82614	0.02446	0.22378	0.42262	0.62146	0.82030
25	0.42510	0.62394	0.82278	0.03162	0.23046	0.42930	0.62814	0.82698	0.02526	0.22462	0.42346	0.62230	0.82114
26	0.42594	0.62478	0.82362	0.03246	0.23130	0.43014	0.62898	0.82782	0.02606	0.22546	0.42430	0.62314	0.82198
27	0.42678	0.62562	0.82446	0.03330	0.23214	0.43098	0.62982	0.82866	0.02686	0.22630	0.42514	0.62398	0.82282
28	0.42762	0.62646	0.82530	0.03414	0.23298	0.43182	0.63066	0.82950	0.02766	0.22714	0.42598	0.62482	0.82366
29	0.42846	0.62730	0.82614	0.03498	0.23382	0.43266	0.63150	0.83034	0.02846	0.22798	0.42682	0.62566	0.82450
30	0.42930	0.62814	0.82698	0.03582	0.23466	0.43350	0.63234	0.83118	0.02926	0.22882	0.42766	0.62650	0.82534
31	0.43014	0.62898	0.82782	0.03666	0.23550	0.43434	0.63318	0.83202	0.03006	0.22966	0.42850	0.62734	0.82618
32	0.43098	0.62982	0.82866	0.03750	0.23634	0.43518	0.63402	0.83286	0.03086	0.23050	0.42934	0.62818	0.82702
33	0.43182	0.63066	0.82950	0.03834	0.23718	0.43602	0.63486	0.83370	0.03166	0.23134	0.43018	0.62902	0.82786
34	0.43266	0.63150	0.83034	0.03918	0.23802	0.43686	0.63570	0.83454	0.03246	0.23218	0.43102	0.62986	0.82870
35	0.43350	0.63234	0.83118	0.04002	0.23886	0.43770	0.63654	0.83538	0.03326	0.23302	0.43186	0.63070	0.82954
36	0.43434	0.63318	0.83202	0.04086	0.23970	0.43854	0.63738	0.83622	0.03406	0.23386	0.43270	0.63154	0.83038
37	0.43518	0.63402	0.83286	0.04170	0.24054	0.43938	0.63822	0.83706	0.03486	0.23470	0.43354	0.63238	0.83122
38	0.43602	0.63486	0.83370	0.04254	0.24138	0.44022	0.63906	0.83790	0.03566	0.23554	0.43438	0.63322	0.83206
39	0.43686	0.63570	0.83454	0.04338	0.24222	0.44106	0.63990	0.83874	0.03646	0.23638	0.43522	0.63406	0.83290
40	0.43770	0.63654	0.83538	0.04422	0.24306	0.44190	0.64074	0.83958	0.03726	0.23722	0.43606	0.63490	0.83374
41	0.43854	0.63738	0.83622	0.04506	0.24390	0.44274	0.64158	0.84042	0.03806	0.23806	0.43690	0.63574	0.83458
42	0.43938	0.63822	0.83706	0.04590	0.24474	0.44358	0.64242	0.84126	0.03886	0.23890	0.43774	0.63658	0.83542
43	0.44022	0.63906	0.83790	0.04674	0.24558	0.44442	0.64326	0.84210	0.03966	0.23974	0.43858	0.63742	0.83626
44	0.44106	0.63990	0.83874	0.04758	0.24642	0.44526	0.64410	0.84294	0.04046	0.24058	0.43942	0.63826	0.83710
45	0.44190	0.64074	0.83958	0.04842	0.24726	0.44610	0.64494	0.84378	0.04126	0.24142	0.44026	0.63910	0.83794
46	0.44274	0.64158	0.84042	0.04926	0.24810	0.44694	0.64578	0.84462	0.04206	0.24226	0.44110	0.63994	0.83878
47	0.44358	0.64242	0.84126	0.05010	0.24894	0.44778	0.64662	0.84546	0.04286	0.24310	0.44194	0.64078	0.83962
48	0.44442	0.64326	0.84210	0.05094	0.24978	0.44862	0.64746	0.84630	0.04366	0.24394	0.44278	0.64162	0.84046
49	0.44526	0.64410	0.84294	0.05178	0.25062	0.44946	0.64830	0.84714	0.04446	0.24478	0.44362	0.64246	0.84130
50	0.44610	0.64494	0.84378	0.05262	0.25146	0.45030	0.64914	0.84798	0.04526	0.24562	0.44446	0.64330	0.84214
51	0.44694	0.64578	0.84462	0.05346	0.25230	0.45114	0.65000	0.84882	0.04606	0.24646	0.44530	0.64414	0.84298
52	0.44778	0.64662	0.84546	0.05430	0.25314	0.45198	0.65084	0.84966	0.04686	0.24730	0.44614	0.64498	0.84382
53	0.44862	0.64746	0.84630	0.05514	0.25398	0.45282	0.65168	0.85050	0.04766	0.24814	0.44698	0.64582	0.84466
54	0.44946	0.64830	0.84714	0.05598	0.25482	0.45366	0.65252	0.85134	0.04846	0.24898	0.44782	0.64666	0.84550
55	0.45030	0.64914	0.84798	0.05682	0.25566	0.45450	0.65336	0.85218	0.04926	0.24982	0.44866	0.64750	0.84634
56	0.45114	0.65000	0.84882	0.05766	0.25650	0.45534	0.65420	0.85302	0.05006	0.25066	0.44950	0.64834	0.84718
57	0.45198	0.65084	0.84966	0.05850	0.25734	0.45618	0.65504	0.85386	0.05086	0.25150	0.45034	0.64918	0.84802
58	0.45282	0.65168	0.85050	0.05934	0.25818	0.45702	0.65588	0.85470	0.05166	0.25234	0.45118	0.64998	0.84886
59	0.45366	0.65252	0.85134	0.06018	0.25902	0.45786	0.65672	0.85554	0.05246	0.25318	0.45202	0.65082	0.84970
60	0.45450	0.65336	0.85218	0.06102	0.25986	0.45870	0.65756	0.85638	0.05326	0.25402	0.45286	0.65166	0.85054
61	0.45534	0.65420	0.85302	0.06186	0.26070	0.45954	0.65840	0.85722	0.05406	0.25486	0.45370	0.65250	0.85138
62	0.45618	0.65504	0.85386	0.06270	0.26154	0.46038	0.65924	0.85806	0.05486	0.25570	0.45454	0.65334	0.85222
63	0.45702	0.65588	0.85470	0.06354	0.26238	0.46122	0.66008	0.85890	0.05566	0.25654	0.45538	0.65418	0.85306
64	0.45786	0.65672	0.85554	0.06438	0.26322	0.46206	0.66092	0.85974	0.05646	0.25738	0.45622	0.65502	0.85390
65	0.45870	0.65756	0.85638	0.06522	0.26406	0.46290	0.66176	0.86058	0.05726	0.25822	0.45706	0.65586	0.85474
66	0.45954	0.65840	0.85722	0.06606	0.26490	0.46374	0.66260	0.86142	0.05806	0.25906	0.45790	0.65670	0.85558
67	0.46038	0.65924	0.85806	0.06690	0.26574	0.46458	0.66344	0.86226	0.05886	0.25990	0.45874	0.65754	0.85642
68	0.46122	0.66008	0.85890	0.06774	0.26658	0.46542	0.66428	0.86310	0.05966	0.26074	0.45958	0.65838	0.85726
69	0.46206	0.66092	0.85974	0.06858	0.26742	0.46626	0.66512	0.86394	0.06046	0.26158	0.46042	0.65922	0.85810
70	0.46290	0.66176	0.86058	0.06942	0.26826	0.46710	0.66596	0.86478	0.06126	0.26242	0.46126	0.66006	0.85894
71	0.46374	0.66260	0.86142	0.07026	0.26910	0.46794	0.66680	0.86562	0.06206	0.26326	0.46210	0.66090	0.85978
72	0.46458	0.66344	0.86226	0.07110	0.26994	0.46878	0.66764	0.86646	0.06286	0.26410	0.46294	0.66174	0.86062
73	0.46542	0.66428	0.86310	0.07194	0.27078	0.46962	0.66848	0.86730	0.06366	0.26494	0.46378	0.66258	0.86146
74	0.46626	0.66512	0.86394	0.07278	0.27162	0.47046	0.66932	0.86814	0.06446	0.26578	0.46462	0.66342	0.86230
75	0.46710	0.66596	0.86478	0.07362	0.27246	0.47130	0.67016	0.86898	0.06526	0.26662	0.46546	0.66426	0.86314
76	0.46794	0.66680	0.86562	0.07446	0.27330	0.47214	0.67100	0.86982	0.06606	0.26746	0.46630	0.66510	0.86398
77	0.46878	0.66764	0.86646	0.07530	0.27414	0.47298	0.67184	0.87066	0.06686	0.26830	0.46714	0.66594	0.86482
78	0.46962	0.66848	0.86730	0.07614	0.27498	0.47382	0.67268	0.87150	0.06766	0.26914	0.46798	0.66678	0.86566
79	0.47046	0.66932	0.86814	0.07698	0.27582	0.47466	0.67352	0.87234	0.06846	0.26998	0.46882	0.66762	0.86650
80	0.47130	0.67016	0.86898	0.07782	0.27666	0.47550	0.67436	0.87318	0.06926	0.27082	0.46966	0.66846	0.86734
81	0.47214	0.67100	0.86982	0.07866	0.27750	0.47634	0.67520	0.87402	0.07006	0.27166	0.47050	0.66930	0.86818
82	0.47298	0.67184	0.87066	0.07950	0.27834	0.47718	0.67604	0.87486	0.07086	0.27250	0.47134	0.67014	0.86902
83	0.47382	0.67268											

TABLA 1  
LEY NORMAL N(0, 1)

Valores de  $\phi(K_\alpha)$  en función de  $K_\alpha$  (cuantila de orden  $1 - \alpha$ )

$K_\alpha$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691

TABLA 1 (continuación)

$K_\alpha$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999

Tabla calculada a partir de las ecuaciones

$$\phi(x) = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2} + \frac{1}{2} \quad (x = K_\alpha)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$$

(Ver Abramowitz y Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 1964.)

TABLE 2

LEY NORMAL N(0, 1)

Valores de  $K_\alpha$  en función de  $\phi(K_\alpha)$

$\phi(K_\alpha)$	$K_\alpha$								
0.500	0.0000	0.600	0.2533	0.700	0.5244	0.800	0.8416	0.900	1.2816
0.505	0.0125	0.605	0.2663	0.705	0.5388	0.805	0.8596	0.905	1.3106
0.510	0.0251	0.610	0.2793	0.710	0.5534	0.810	0.8779	0.910	1.3408
0.515	0.0376	0.615	0.2924	0.715	0.5681	0.815	0.8965	0.915	1.3722
0.520	0.0502	0.620	0.3055	0.720	0.5828	0.820	0.9154	0.920	1.4051
0.525	0.0627	0.625	0.3186	0.725	0.5978	0.825	0.9346	0.925	1.4395
0.530	0.0753	0.630	0.3319	0.730	0.6128	0.830	0.9542	0.930	1.4758
0.535	0.0878	0.635	0.3451	0.735	0.6280	0.835	0.9741	0.935	1.5141
0.540	0.1004	0.640	0.3585	0.740	0.6433	0.840	0.9945	0.940	1.5548
0.545	0.1130	0.645	0.3719	0.745	0.6588	0.845	1.0152	0.945	1.5982
0.550	0.1257	0.650	0.3853	0.750	0.6745	0.850	1.0364	0.950	1.6449
0.555	0.1383	0.655	0.3989	0.755	0.6903	0.855	1.0581	0.955	1.6954
0.560	0.1510	0.660	0.4125	0.760	0.7063	0.860	1.0803	0.960	1.7507
0.565	0.1637	0.665	0.4261	0.765	0.7225	0.865	1.1031	0.965	1.8119
0.570	0.1764	0.670	0.4399	0.770	0.7388	0.870	1.1264	0.970	1.8808

TABLA 2 (Continuación)

$\phi(K_\alpha)$	$K_\alpha$								
0.575	0.1891	0.675	0.4538	0.775	0.7554	0.875	1.1503	0.975	1.9600
0.580	0.2019	0.680	0.4677	0.780	0.7722	0.880	1.1750	0.980	2.0537
0.585	0.2147	0.685	0.4817	0.785	0.7892	0.885	1.2004	0.985	2.1701
0.590	0.2275	0.690	0.4959	0.790	0.8064	0.890	1.2265	0.990	2.3263
0.595	0.2404	0.695	0.5101	0.795	0.8239	0.895	1.2536	0.995	2.5758

Tabla calculada a partir de las ecuaciones

$$\phi(x) = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2} + \frac{1}{2} \quad (x = K_\alpha)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$$

(Ver Abramowitz y Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 1964.)

TABLA 3  
LEY DE  $\chi^2$

Valores de  $\chi_{\alpha, \nu}^2$  (cuantila de orden  $1 - \alpha$ )

$\nu$	$\alpha$							
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.050	0.025	0.010	0.005
1	—	0.0002	0.0010	0.0039	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	7.8147	9.3484	11.3448	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	9.4877	11.1433	13.2768	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	11.0705	12.8325	15.0862	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	12.5916	14.4494	16.8120	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	14.0671	16.0128	18.4752	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	23.6848	26.1190	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2622	7.2609	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013

TABLA 3 (continuación)

$\nu$	$\alpha$							
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.050	0.025	0.010	0.005
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	26.2962	28.8453	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2649	7.0149	8.2308	9.3905	28.8693	31.5264	34.8052	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	30.1435	32.8523	36.1910	38.5823
20	7.4339	8.2604	9.5908	10.8508	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	32.6706	35.4788	38.9320	41.4010
22	8.6428	9.5425	10.9823	12.3380	33.9244	36.7807	40.2893	42.7957
23	9.2603	10.1957	11.6886	13.0905	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8563	12.4012	13.8484	36.4150	39.3640	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	37.6525	40.6464	44.3141	46.9279
26	11.1601	12.1981	13.8439	15.3792	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8077	12.8785	14.5734	16.1514	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4612	13.5647	15.3079	16.9279	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1210	14.2564	16.0471	17.7084	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7868	14.9534	16.7908	18.4927	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720

Tabla calculada a partir de la expresión

$$F(\chi^2, \nu) \approx \left(\frac{1}{2} \chi^2\right)^{\nu/2} \frac{\exp(-\chi^2/2)}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi^{2r}}{(\nu+2)(\nu+4)\dots(\nu+2r)}\right]$$

(Ver Abramowitz y Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 1964.)

Singer (1964)

A. M. Stephens & Z. W. Birnbaum, "A Generalization of the Weibull Distribution", *Journal of Applied Probability*, 1968

$$E(X; \lambda) = \left( \frac{1}{\lambda} X_0 \right) \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)} \left[ 1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)} \right] + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)} \left[ 1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)} \right] + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)} \left[ 1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)} \right] + \dots$$

E. J. G. S. (1964) n b\_n

n	b <sub>n</sub>
2	0.564
3	0.724
4	0.798
5	0.841
6	0.869
7	0.888
8	0.903
9	0.914
10	0.923
11	0.930
12	0.936
13	0.941
14	0.945
15	0.949
16	0.952
17	0.955
18	0.958
19	0.960
20	0.962
21	0.964
22	0.966
23	0.967
24	0.968
25	0.970
26	0.971
27	0.972
28	0.973
29	0.974
30	0.975

TABLA 4

VALORES DEL PARAMETRO  $b_n = E[\chi]/\sqrt{n}$

A. M. Stephens & Z. W. Birnbaum, "A Generalization of the Weibull Distribution", *Journal of Applied Probability*, 1968

TABLA 5  
LEY DE STUDENT

Valores de  $t_{\alpha, \nu}$  (cuantila de orden  $1 - \alpha$ )

$\nu$	$\alpha$			
	0.050	0.025	0.010	0.005
1	6.3138	12.7062	31.8205	63.6568
2	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.7958	2.2010	2.7181	3.1058
12	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
100	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
1 000	1.6464	1.9623	2.3301	2.5808
$\infty$	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

Tabla calculada mediante proceso iterativo, a partir de las expresiones siguientes:

$$F(t, \nu) = \text{sen } \theta \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \cos^4 \theta + \dots + \frac{1 \times 3 \times \dots \times (\nu - 3)}{2 \times 4 \times \dots \times (\nu - 2)} \cos^{\nu-2} \theta \right]$$

para  $\nu$  par

$$F(t, \nu) = \frac{2\theta}{\pi} + \frac{2 \cos \theta}{\pi} \left\{ \text{sen } \theta \left[ 1 + \frac{2}{3} \cos^3 \theta + \dots + \frac{2 \times 4 \times \dots \times (\nu - 3)}{1 \times 3 \times \dots \times (\nu - 2)} \cos^{\nu-2\theta} \right] \right\}$$

para  $\nu$  impar

siendo

$$\theta = \text{arc tg } (t/\sqrt{\nu})$$

(Ver Abramowitz y Stegun, *Handbook of Mathematical functions*, National Bureau of Standards, 1964.)

TABLA 6

LIMITES DE TOLERANCIA NATURAL CON ESPECIFICACION UNILATERAL PARA UNA DISTRIBUCION NORMAL  $N(m, \sigma)$  DE MEDIA Y DESVIACION TIPO DESCONOCIDAS

Valores de  $k$  tales que

$$\Pr\{x \leq \bar{x} + KS \text{ (ó } x \geq \bar{x} - KS)\} \geq P$$

para el  $100 \gamma \%$  de las muestras.  $\gamma = 0.05$ .

n	P				
	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
2	0.4748	0.7109	0.9538	1.1078	1.4092
3	0.6391	0.8748	1.1296	1.2958	1.6264
4	0.7433	0.9825	1.2461	1.4198	1.7681
5	0.8178	1.0606	1.3309	1.5099	1.8707
6	0.8748	1.1208	1.3964	1.5797	1.9499
7	0.9204	1.1693	1.4492	1.6359	2.0138
8	0.9580	1.2094	1.4931	1.6826	2.0686
9	0.9899	1.2434	1.5303	1.7223	2.1120
10	1.0173	1.2728	1.5625	1.7566	2.1510
11	1.0412	1.2986	1.5908	1.7867	2.1853
12	1.0624	1.3214	1.6158	1.8134	2.2157
13	1.0814	1.3418	1.6382	1.8373	2.2430
14	1.0984	1.3602	1.6585	1.8589	2.2676
15	1.1139	1.3769	1.6769	1.8786	2.2899
16	1.1281	1.3922	1.6937	1.8965	2.3104
17	1.1411	1.4063	1.7092	1.9131	2.3293
18	1.1531	1.4193	1.7235	1.9284	2.3467
19	1.1642	1.4313	1.7368	1.9426	2.3630
20	1.1746	1.4425	1.7492	1.9559	2.3781
21	1.1842	1.4530	1.7608	1.9682	2.3922
22	1.1933	1.4629	1.7717	1.9799	2.4055
23	1.2018	1.4721	1.7819	1.9908	2.4179
24	1.2098	1.4808	1.7915	2.0011	2.4297
25	1.2174	1.4891	1.8006	2.0108	2.4408

TABLA 6 (continuación)

n	P				
	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
30	1.2498	1.5244	1.8397	2.0526	2.4886
35	1.2755	1.5524	1.8707	2.0859	2.5267
40	1.2966	1.5754	1.8963	2.1133	2.5580
45	1.3143	1.5948	1.9178	2.1363	2.5843
50	1.3294	1.6113	1.9362	2.1561	2.6070
60	1.3541	1.6385	1.9663	2.1884	2.6441
70	1.3736	1.6599	1.9902	2.2140	2.6734
80	1.3896	1.6774	2.0097	2.2350	2.6975
90	1.4029	1.6921	2.0261	2.2525	2.7177
100	1.4143	1.7046	2.0401	2.2676	2.7349
125	1.4369	1.7294	2.0678	2.2973	2.7691
150	1.4537	1.7480	2.0885	2.3196	2.7948
300	1.5069	1.8068	2.1543	2.3903	2.8761
500	1.5367	1.8398	2.1913	2.4302	2.9221
$\infty$	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758	3.0903

TABLA 7

NUMEROS ALEATORIOS UNIFORMEMENTE  
DISTRIBUIDOS \*

02 22	85 19	48 74	55 24	89 69	15 53	00 20	88 48	95 08
85 76	34 51	40 44	62 93	65 99	72 64	09 34	01 13	09 74
00 88	96 79	38 24	77 00	70 91	47 43	43 82	71 67	49 90
64 29	81 85	50 47	36 50	91 19	09 15	98 75	60 58	33 15
94 03	80 04	21 49	54 91	77 85	00 45	68 23	12 94	23 44
42 28	52 73	06 41	37 47	47 31	52 99	89 82	22 81	86 55
09 27	52 72	49 11	30 93	33 29	54 17	54 48	47 42	04 79
54 68	64 07	85 32	05 96	54 79	57 43	96 97	30 72	12 19
25 04	92 29	71 11	64 10	42 23	23 67	01 19	20 58	35 93
28 58	32 91	95 28	42 36	98 59	66 32	15 51	46 63	57 10
64 35	04 62	24 87	44 85	45 68	41 66	19 17	13 09	63 37
61 05	55 88	25 01	15 77	12 90	69 34	36 93	52 39	36 23
98 93	18 93	86 98	99 04	75 28	30 05	12 09	57 35	90 15
61 89	35 47	16 32	20 16	78 52	82 37	26 33	67 42	11 93
94 40	82 18	06 61	54 67	03 66	76 82	90 31	71 90	39 27
54 38	58 65	27 70	93 57	59 00	63 56	18 79	85 52	21 03
63 70	89 23	76 46	97 70	00 62	15 35	97 42	47 54	60 60
61 58	65 62	81 29	69 71	95 53	53 69	20 95	66 60	50 70
51 68	98 15	05 64	43 32	74 07	44 63	52 38	67 59	56 69
59 25	41 48	64 79	62 26	87 86	94 30	43 54	26 98	61 38
85 00	02 24	67 85	88 10	34 01	54 53	23 77	33 11	19 68
01 46	87 56	19 19	19 43	70 25	24 29	48 22	44 81	35 40
42 41	25 10	87 27	77 28	05 90	73 03	95 46	88 82	25 02
03 57	14 03	17 80	47 85	94 49	89 55	10 37	19 50	20 37
18 95	93 40	45 43	04 56	17 03	34 54	83 91	69 02	90 72

\* Extracto de las tablas de Kendall y Babington Smith.

TABLA 8.1

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL  $\alpha = 0.01$

d \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.0	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900
0.1	0.9870	0.9856	0.9843	0.9833	0.9823	0.9813	0.9804	0.9795	0.9786	0.9778
0.2	0.9833	0.9795	0.9761	0.9730	0.9699	0.9669	0.9638	0.9609	0.9579	0.9549
0.3	0.9786	0.9714	0.9646	0.9579	0.9511	0.9443	0.9373	0.9303	0.9231	0.9158
0.4	0.9730	0.9609	0.9488	0.9365	0.9239	0.9109	0.8976	0.8840	0.8700	0.8558
0.5	0.9661	0.9473	0.9279	0.9076	0.8865	0.8647	0.8422	0.8192	0.7957	0.7719
0.6	0.9579	0.9303	0.9010	0.8700	0.8376	0.8042	0.7700	0.7354	0.7007	0.6660
0.7	0.9481	0.9093	0.8673	0.8229	0.7767	0.7296	0.6824	0.6351	0.5895	0.5449
0.8	0.9365	0.8840	0.8266	0.7662	0.7045	0.6431	0.5831	0.5254	0.4706	0.4194
0.9	0.9231	0.8540	0.7786	0.7007	0.6232	0.5485	0.4781	0.4132	0.3543	0.3016
1.0	0.9076	0.8192	0.7238	0.6279	0.5360	0.4510	0.3747	0.3078	0.2503	0.2016
1.1	0.8900	0.7796	0.6632	0.5503	0.4470	0.3564	0.2796	0.2163	0.1651	0.1246
1.2	0.8700	0.7354	0.5979	0.4706	0.3606	0.2699	0.1981	0.1428	0.1014	0.0710
1.3	0.8476	0.6872	0.5298	0.3922	0.2808	0.1954	0.1328	0.0884	0.0578	0.0372
1.4	0.8229	0.6355	0.4608	0.3179	0.2107	0.1350	0.0841	0.0512	0.0305	0.0178

TABLA 8.1 (continuación)

d \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.5	0.7957	0.5812	0.3929	0.2503	0.1520	0.0888	0.0503	0.0277	0.0149	0.0078
1.6	0.7662	0.5254	0.3282	0.1912	0.1054	0.0556	0.0283	0.0139	0.0067	0.0031
1.7	0.7345	0.4690	0.2682	0.1415	0.0701	0.0330	0.0149	0.0065	0.0028	0.0011
1.8	0.7007	0.4132	0.2144	0.1014	0.0447	0.0186	0.0074	0.0028	0.0011	0.0004
1.9	0.6651	0.3592	0.1674	0.0703	0.0273	0.0100	0.0035	0.0012	0.0004	0.0001
2.0	0.6279	0.3078	0.1276	0.0471	0.0159	0.0050	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000
2.2	0.5503	0.2163	0.0689	0.0191	0.0048	0.0011	0.0002	0.0000		
2.4	0.4706	0.1428	0.0336	0.0067	0.0012	0.0002	0.0000			
2.6	0.3922	0.0884	0.0147	0.0020	0.0002	0.0000				
2.8	0.3179	0.0512	0.0058	0.0005	0.0000					
3.0	0.2503	0.0277	0.0021	0.0001						

TABLA 8.2

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL  $\alpha = 0.01$

d \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.0	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900
0.1	0.9770	0.9761	0.9753	0.9745	0.9738	0.9730	0.9722	0.9714	0.9707	0.9699
0.2	0.9518	0.9488	0.9458	0.9427	0.9396	0.9365	0.9334	0.9303	0.9271	0.9239
0.3	0.9085	0.9010	0.8934	0.8857	0.8779	0.8700	0.8620	0.8540	0.8458	0.8376
0.4	0.8413	0.8266	0.8117	0.7966	0.7815	0.7662	0.7508	0.7354	0.7200	0.7045
0.5	0.7479	0.7238	0.6997	0.6756	0.6517	0.6279	0.6044	0.5812	0.5584	0.5360
0.6	0.6317	0.5979	0.5647	0.5324	0.5010	0.4706	0.4414	0.4132	0.3863	0.3606
0.7	0.5019	0.4608	0.4217	0.3848	0.3502	0.3179	0.2878	0.2600	0.2343	0.2107
0.8	0.3719	0.3282	0.2884	0.2524	0.2200	0.1912	0.1655	0.1428	0.1229	0.1054
0.9	0.2551	0.2144	0.1791	0.1489	0.1232	0.1014	0.0831	0.0678	0.0552	0.0447
1.0	0.1610	0.1276	0.1004	0.0785	0.0610	0.0471	0.0362	0.0277	0.0210	0.0159
1.1	0.0931	0.0689	0.0505	0.0368	0.0266	0.0191	0.0136	0.0096	0.0068	0.0048
1.2	0.0491	0.0336	0.0227	0.0152	0.0101	0.0067	0.0044	0.0028	0.0018	0.0012
1.3	0.0236	0.0147	0.0091	0.0056	0.0034	0.0020	0.0012	0.0007	0.0004	0.0002
1.4	0.0103	0.0058	0.0033	0.0018	0.0010	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000
1.5	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000		
1.6	0.0014	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000				
1.7	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000						
1.8	0.0001	0.0000								
1.9	0.0000									

TABLA 8.3

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL  $\alpha = 0.01$

d \ n	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100
0.0	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900
0.1	0.9661	0.9623	0.9586	0.9549	0.9511	0.9473	0.9396	0.9318	0.9239	0.9158	0.9076
0.2	0.9076	0.8908	0.8735	0.8538	0.8376	0.8192	0.7815	0.7431	0.7045	0.6660	0.6279
0.3	0.7957	0.7528	0.7094	0.6660	0.6232	0.5812	0.5010	0.4272	0.3606	0.3016	0.2503
0.4	0.6279	0.5539	0.4840	0.4194	0.3606	0.3078	0.2200	0.1538	0.1054	0.0710	0.0471
0.5	0.4311	0.3401	0.2638	0.2016	0.1520	0.1133	0.0610	0.0317	0.0159	0.0078	0.0038
0.6	0.2503	0.1685	0.1106	0.0710	0.0447	0.0277	0.0101	0.0035	0.0012	0.0004	0.0001
0.7	0.1203	0.0658	0.0348	0.0178	0.0089	0.0044	0.0010	0.0002	0.0000		
0.8	0.0471	0.0199	0.0081	0.0031	0.0012	0.0004	0.0001	0.0000			
0.9	0.0149	0.0046	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000					
1.0	0.0038	0.0008	0.0002	0.0000							
1.1	0.0008	0.0001	0.0000								
1.2	0.0001	0.0000									
1.3	0.0000										

TABLA 8.4

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL  $\alpha = 0.05$

d \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.0	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500
0.1	0.9388	0.9336	0.9294	0.9257	0.9224	0.9192	0.9162	0.9134	0.9107	0.9080
0.2	0.9257	0.9134	0.9029	0.8934	0.8845	0.8759	0.8677	0.8597	0.8520	0.8443
0.3	0.9107	0.8889	0.8698	0.8520	0.8350	0.8186	0.8026	0.7871	0.7718	0.7568
0.4	0.8934	0.8597	0.8295	0.8009	0.7735	0.7470	0.7212	0.6962	0.6718	0.6480
0.5	0.8739	0.8258	0.7820	0.7405	0.7008	0.6628	0.6263	0.5912	0.5576	0.5254
0.6	0.8520	0.7871	0.7276	0.6718	0.6191	0.5695	0.5229	0.4792	0.4384	0.4003
0.7	0.8276	0.7437	0.6673	0.5967	0.5317	0.4722	0.4179	0.3688	0.3245	0.2848
0.8	0.8009	0.6962	0.6023	0.5179	0.4427	0.3765	0.3186	0.2683	0.2251	0.1881
0.9	0.7718	0.6451	0.5343	0.4384	0.3566	0.2878	0.2308	0.1839	0.1457	0.1148
1.0	0.7405	0.5912	0.4653	0.3612	0.2772	0.2105	0.1584	0.1183	0.0877	0.0646
1.1	0.7071	0.5355	0.3973	0.2894	0.2076	0.1470	0.1029	0.0713	0.0489	0.0334
1.2	0.6718	0.4792	0.3323	0.2251	0.1495	0.0977	0.0630	0.0401	0.0253	0.0158
1.3	0.6349	0.4232	0.2720	0.1698	0.1035	0.0618	0.0364	0.0211	0.0121	0.0068
1.4	0.5967	0.3688	0.2177	0.1240	0.0687	0.0372	0.0197	0.0103	0.0053	0.0027
1.5	0.5576	0.3169	0.1702	0.0877	0.0437	0.0212	0.0101	0.0047	0.0022	0.0010
1.6	0.5179	0.2683	0.1300	0.0600	0.0266	0.0115	0.0048	0.0020	0.0008	0.0003
1.7	0.4780	0.2238	0.0969	0.0396	0.0155	0.0059	0.0022	0.0008	0.0003	0.0001
1.8	0.4384	0.1839	0.0704	0.0253	0.0087	0.0029	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000
1.9	0.3993	0.1487	0.0494	0.0156	0.0046	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	
2.0	0.3612	0.1183	0.0344	0.0093	0.0023	0.0006	0.0001	0.0000		
2.2	0.2894	0.0713	0.0152	0.0029	0.0005	0.0001	0.0000			
2.4	0.2251	0.0401	0.0060	0.0008	0.0001	0.0000				
2.6	0.1698	0.0211	0.0021	0.0002	0.0000					
2.8	0.1240	0.0103	0.0007	0.0000						
3.0	0.0877	0.0047	0.0002	0.0000						

TABLA 8.5

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL  $\alpha = 0.05$

d \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.0	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500
0.1	0.9054	0.9029	0.9005	0.8981	0.8957	0.8934	0.8911	0.8889	0.8867	0.8845
0.2	0.8368	0.8295	0.8222	0.8150	0.8079	0.8009	0.7940	0.7871	0.7803	0.7735
0.3	0.7421	0.7276	0.7133	0.6993	0.6854	0.6718	0.6583	0.6451	0.6320	0.6191
0.4	0.6248	0.6023	0.5803	0.5589	0.5381	0.5179	0.4982	0.4792	0.4607	0.4427
0.5	0.4946	0.4653	0.4373	0.4106	0.3853	0.3612	0.3384	0.3169	0.2965	0.2772
0.6	0.3650	0.3323	0.3021	0.2742	0.2486	0.2251	0.2035	0.1839	0.1659	0.1495
0.7	0.2493	0.2177	0.1897	0.1650	0.1432	0.1240	0.1072	0.0926	0.0798	0.0687
0.8	0.1566	0.1300	0.1076	0.0888	0.0730	0.0600	0.0491	0.0401	0.0327	0.0266
0.9	0.0901	0.0704	0.0548	0.0425	0.0328	0.0253	0.0194	0.0149	0.0114	0.0087
1.0	0.0473	0.0344	0.0250	0.0180	0.0129	0.0093	0.0066	0.0047	0.0033	0.0023
1.1	0.0226	0.0152	0.0101	0.0067	0.0045	0.0029	0.0019	0.0013	0.0008	0.0005
1.2	0.0098	0.0060	0.0037	0.0022	0.0013	0.0008	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001
1.3	0.0038	0.0021	0.0012	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	
1.4	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000				
1.5	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000						
1.6	0.0001	0.0000								
1.7	0.0000									

TABLA 8.6

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL  $\alpha = 0.05$

d \ n	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100
0.0	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500
0.1	0.8739	0.8637	0.8539	0.8443	0.8350	0.8258	0.8079	0.7905	0.7735	0.7568	0.7405
0.2	0.7405	0.7086	0.6778	0.6480	0.6191	0.5912	0.5381	0.4886	0.4427	0.4003	0.3612
0.3	0.5576	0.5007	0.4483	0.4003	0.3566	0.3169	0.2486	0.1935	0.1495	0.1148	0.0877
0.4	0.3612	0.2925	0.2353	0.1881	0.1495	0.1183	0.0730	0.0444	0.0266	0.0158	0.0093
0.5	0.1962	0.1370	0.0946	0.0646	0.0437	0.0293	0.0129	0.0056	0.0023	0.0010	0.0004
0.6	0.0877	0.0503	0.0284	0.0158	0.0087	0.0047	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	
0.7	0.0318	0.0143	0.0063	0.0027	0.0011	0.0005	0.0001	0.0000			
0.8	0.0093	0.0031	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000					
0.9	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000							
1.0	0.0004	0.0001	0.0000								
1.1	0.0001	0.0000									
1.2	0.0000										

TABLA 9

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA  $P(\Delta)$  DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL

P( $\Delta$ )	$\Delta$	
	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
0.990	—	0.000
0.950	0.000	0.681
0.900	0.364	1.045
0.850	0.609	1.290
0.800	0.803	1.484
0.750	0.971	1.652
0.700	1.120	1.801
0.650	1.260	1.941
0.600	1.392	2.073
0.550	1.519	2.200
0.500	1.645	2.326
0.450	1.771	2.452
0.400	1.898	2.579
0.350	2.030	2.711
0.300	2.170	2.851
0.250	2.319	3.000
0.200	2.487	3.168
0.150	2.681	3.362
0.100	2.926	3.607
0.050	3.290	3.971
0.010	3.971	4.652
0.001	4.735	5.416

TABLA 10.1

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL  $\alpha = 0.01$

d \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.0	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900
0.1	0.9897	0.9892	0.9889	0.9884	0.9881	0.9877	0.9873	0.9870	0.9867	0.9862
0.2	0.9884	0.9870	0.9854	0.9837	0.9821	0.9804	0.9787	0.9770	0.9752	0.9733
0.3	0.9866	0.9830	0.9791	0.9752	0.9710	0.9667	0.9622	0.9576	0.9528	0.9479
0.4	0.9837	0.9770	0.9697	0.9617	0.9534	0.9446	0.9353	0.9256	0.9155	0.9050
0.5	0.9800	0.9687	0.9560	0.9423	0.9275	0.9116	0.8949	0.8773	0.8590	0.8401
0.6	0.9752	0.9576	0.9376	0.9155	0.8914	0.8657	0.8385	0.8102	0.7811	0.7513
0.7	0.9692	0.9434	0.9135	0.8802	0.8439	0.8054	0.7654	0.7244	0.6829	0.6414
0.8	0.9617	0.9256	0.8830	0.8354	0.7844	0.7311	0.6770	0.6229	0.5698	0.5183
0.9	0.9528	0.9036	0.8454	0.7811	0.7134	0.6448	0.5772	0.5121	0.4506	0.3935
1.0	0.9423	0.8773	0.8006	0.7176	0.6330	0.5503	0.4721	0.4003	0.3357	0.2788
1.1	0.9329	0.8462	0.7488	0.6465	0.5452	0.4528	0.3690	0.2962	0.2345	0.1833
1.2	0.9155	0.8102	0.6905	0.5698	0.4572	0.3581	0.2746	0.2066	0.1529	0.1114
1.3	0.8989	0.7695	0.6271	0.4904	0.3703	0.2714	0.1939	0.1354	0.0927	0.0624
1.4	0.8802	0.7244	0.5600	0.4113	0.2896	0.1967	0.1296	0.0832	0.0522	0.0321
1.5	0.8590	0.6753	0.4911	0.3757	0.2182	0.1360	0.0818	0.0478	0.0272	0.0151
1.6	0.8354	0.6229	0.4225	0.2663	0.1582	0.0896	0.0487	0.0256	0.0131	0.0065
1.7	0.8094	0.5682	0.3562	0.2049	0.1102	0.0561	0.0273	0.0128	0.0058	0.0026
1.8	0.7811	0.5121	0.2940	0.1529	0.0737	0.0334	0.0144	0.0059	0.0024	0.0009
1.9	0.7504	0.4557	0.2373	0.1104	0.0432	0.0188	0.0071	0.0026	0.0009	0.0003
2.0	0.7176	0.4003	0.1872	0.0772	0.0290	0.0101	0.0036	0.0010	0.0003	0.0001
2.2	0.6465	0.2962	0.1085	0.0341	0.0096	0.0025	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
2.4	0.5698	0.2066	0.0569	0.0131	0.0026	0.0005	0.0001	0.0000		
2.6	0.4904	0.1354	0.0270	0.0043	0.0006	0.0001	0.0000			
2.8	0.4113	0.0832	0.0115	0.0012	0.0001	0.0000				
3.0	0.3357	0.0478	0.0044	0.0003	0.0000					

TABLA 10.2

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL  $\alpha = 0.01$

d \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.0	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900
0.1	0.9858	0.9854	0.9849	0.9846	0.9842	0.9837	0.9833	0.9830	0.9825	0.9821
0.2	0.9715	0.9697	0.9677	0.9658	0.9638	0.9617	0.9597	0.9576	0.9555	0.9534
0.3	0.9428	0.9376	0.9323	0.9268	0.9212	0.9155	0.9096	0.9036	0.8975	0.8914
0.4	0.8942	0.8830	0.8715	0.8597	0.8477	0.8354	0.8229	0.8102	0.7979	0.7844
0.5	0.8206	0.8006	0.7803	0.7596	0.7387	0.7176	0.6995	0.6753	0.6541	0.6330
0.6	0.7210	0.6905	0.6600	0.6296	0.5995	0.5698	0.5406	0.5121	0.4842	0.4572
0.7	0.6003	0.5300	0.5207	0.4827	0.4462	0.4113	0.3781	0.3468	0.3173	0.2896
0.8	0.4691	0.4225	0.3788	0.3382	0.3006	0.2663	0.2349	0.2066	0.1811	0.1582
0.9	0.3412	0.2940	0.2517	0.2143	0.1814	0.1529	0.1282	0.1070	0.0890	0.0737
1.0	0.2294	0.1872	0.1516	0.1218	0.0973	0.0772	0.0609	0.0478	0.0373	0.0290
1.1	0.1418	0.1085	0.0822	0.0618	0.0460	0.0341	0.0250	0.0183	0.0132	0.0096
1.2	0.0801	0.0569	0.0400	0.0278	0.0191	0.0131	0.0088	0.0059	0.0040	0.0026
1.3	0.0413	0.0270	0.0174	0.0111	0.0070	0.0043	0.0027	0.0016	0.0010	0.0006
1.4	0.0193	0.0115	0.0067	0.0039	0.0022	0.0012	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001
1.5	0.0082	0.0044	0.0023	0.0012	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	
1.6	0.0032	0.0015	0.0007	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000			
1.7	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000					
1.8	0.0003	0.0001	0.0000							
1.9	0.0001	0.0000								
2.0	0.0000									

TABLA 10.3

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL  $\alpha = 0.01$

d \ n	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100
0.0	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900
0.1	0.9800	0.9778	0.9756	0.9733	0.9710	0.9687	0.9638	0.9587	0.9534	0.9479	0.9423
0.2	0.9423	0.9305	0.9180	0.9050	0.8914	0.8773	0.8477	0.8166	0.7844	0.7513	0.7176
0.3	0.8590	0.8245	0.7884	0.7513	0.7134	0.6753	0.5995	0.5263	0.4572	0.3935	0.3357
0.4	0.7176	0.6499	0.5829	0.5183	0.4572	0.4003	0.3006	0.2204	0.1582	0.1114	0.0772
0.5	0.5302	0.4353	0.3512	0.2788	0.2182	0.1686	0.0973	0.0540	0.0290	0.0151	0.0077
0.6	0.3357	0.2387	0.1651	0.1114	0.0737	0.0478	0.0191	0.0073	0.0026	0.0009	0.0003
0.7	0.1777	0.1042	0.0587	0.0321	0.0170	0.0088	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	
0.8	0.0772	0.0355	0.0155	0.0065	0.0026	0.0010	0.0001	0.0000			
0.9	0.0272	0.0093	0.0030	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000				
1.0	0.0077	0.0019	0.0004	0.0001	0.0000						
1.1	0.0017	0.0003	0.0000								
1.2	0.0003	0.0000									
1.3	0.0000										

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS  
RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO  
CONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL  $\alpha = 0.05$

d \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.0	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500
0.1	0.9489	0.9477	0.9465	0.9454	0.9442	0.9431	0.9419	0.9407	0.9396	0.9385
0.2	0.9454	0.9407	0.9362	0.9315	0.9268	0.9221	0.9174	0.9126	0.9079	0.9030
0.3	0.9396	0.9291	0.9185	0.9119	0.8970	0.8862	0.8753	0.8643	0.8533	0.8423
0.4	0.9315	0.9126	0.8934	0.8741	0.8545	0.8349	0.8151	0.7953	0.7756	0.7559
0.5	0.9209	0.8911	0.8606	0.8300	0.7991	0.7682	0.7375	0.7070	0.6769	0.6474
0.6	0.9079	0.8643	0.8200	0.7756	0.7313	0.6877	0.6450	0.6036	0.5634	0.5249
0.7	0.8933	0.8324	0.7718	0.7118	0.6533	0.5968	0.5429	0.4920	0.4443	0.3990
0.8	0.8741	0.7953	0.7167	0.6404	0.5678	0.5001	0.4378	0.3810	0.3300	0.2844
0.9	0.8533	0.7534	0.6556	0.5634	0.4791	0.4034	0.3368	0.2791	0.2296	0.1878
1.0	0.8300	0.7070	0.5900	0.4840	0.3912	0.3122	0.2464	0.1926	0.1492	0.1146
1.1	0.8040	0.6568	0.5217	0.4051	0.3086	0.2313	0.1710	0.1248	0.0901	0.0644
1.2	0.7756	0.6036	0.4528	0.3300	0.2347	0.1637	0.1122	0.0758	0.0505	0.0333
1.3	0.7448	0.5482	0.3853	0.2611	0.1718	0.1104	0.0695	0.0430	0.0262	0.0157
1.4	0.7118	0.4920	0.3210	0.2004	0.1209	0.0709	0.0406	0.0228	0.0125	0.0068
1.5	0.6769	0.4359	0.2617	0.1492	0.0816	0.0432	0.0223	0.0112	0.0055	0.0027
1.6	0.6404	0.3810	0.2086	0.1075	0.0529	0.0250	0.0115	0.0052	0.0023	0.0010
1.7	0.6025	0.3284	0.1624	0.0749	0.0328	0.0138	0.0056	0.0022	0.0008	0.0003
1.8	0.5634	0.2791	0.1235	0.0505	0.0195	0.0072	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001
1.9	0.5238	0.2336	0.0916	0.0329	0.0111	0.0035	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000
2.0	0.4840	0.1926	0.0663	0.0207	0.0060	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	
2.2	0.4051	0.1248	0.0321	0.0073	0.0015	0.0003	0.0001	0.0000		
2.4	0.3300	0.0758	0.0140	0.0023	0.0003	0.0000				
2.6	0.2611	0.0430	0.0055	0.0006	0.0001					
2.8	0.2004	0.0228	0.0019	0.0001	0.0000					
3.0	0.1492	0.0112	0.0006	0.0000						

TABLA 10.5

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL  $\alpha = 0.05$

d \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.0	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500
0.1	0.9373	0.9362	0.9349	0.9338	0.9326	0.9315	0.9303	0.9291	0.9280	0.9268
0.2	0.8982	0.8934	0.8886	0.8838	0.8790	0.8741	0.8692	0.8643	0.8594	0.8545
0.3	0.8311	0.8200	0.8089	0.7978	0.7867	0.7756	0.7645	0.7536	0.7424	0.7313
0.4	0.7362	0.7167	0.6974	0.6781	0.6592	0.6404	0.6218	0.6036	0.5856	0.5678
0.5	0.6184	0.5900	0.5624	0.5354	0.5094	0.4840	0.4595	0.4359	0.4131	0.3912
0.6	0.4880	0.4528	0.4194	0.3878	0.3580	0.3300	0.3037	0.2791	0.2561	0.2347
0.7	0.3588	0.3210	0.2864	0.2549	0.2263	0.2004	0.1772	0.1563	0.1366	0.1209
0.8	0.2440	0.2086	0.1766	0.1507	0.1275	0.1075	0.0904	0.0758	0.0634	0.0529
0.9	0.1527	0.1235	0.0994	0.0796	0.0635	0.0505	0.0400	0.0316	0.0248	0.0195
1.0	0.0874	0.0663	0.0499	0.0364	0.0279	0.0207	0.0153	0.0112	0.0082	0.0060
1.1	0.0457	0.0321	0.0224	0.0155	0.0107	0.0073	0.0050	0.0034	0.0023	0.0015
1.2	0.0217	0.0140	0.0090	0.0057	0.0036	0.0023	0.0014	0.0009	0.0005	0.0003
1.3	0.0093	0.0055	0.0032	0.0018	0.0011	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1.4	0.0036	0.0019	0.0010	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000		
1.5	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000				
1.6	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000						
1.7	0.0001	0.0000								
1.8	0.0000									

TABLA 10.6

VALORES DE LA FUNCION DE EFICACIA DE UNA PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO CONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL  $\alpha = 0.05$

d \ n	25	30	35	40	45	50	60	70	80	90	100
0.0	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500	0.9500
0.1	0.9209	0.9150	0.9090	0.9030	0.8970	0.8911	0.8790	0.8667	0.8545	0.8423	0.8300
0.2	0.8300	0.8052	0.7805	0.7559	0.7313	0.7070	0.6592	0.6127	0.5678	0.5249	0.4840
0.3	0.6769	0.6241	0.5733	0.5249	0.4791	0.4359	0.3580	0.2912	0.2347	0.1878	0.1492
0.4	0.4840	0.4087	0.3422	0.2844	0.2347	0.1926	0.1275	0.0828	0.0549	0.0333	0.0207
0.5	0.2946	0.2181	0.1591	0.1146	0.0816	0.0576	0.0279	0.0131	0.0060	0.0027	0.0012
0.6	0.1492	0.0924	0.0560	0.0333	0.0195	0.0112	0.0036	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000
0.7	0.0618	0.0305	0.0146	0.0068	0.0031	0.0014	0.0003	0.0000			
0.8	0.0207	0.0077	0.0028	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000				
0.9	0.0055	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000						
1.0	0.0012	0.0002	0.0000								
1.1	0.0002	0.0000									
1.2	0.0000										

TABLA 11

PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO DESCONOCIDA. ESPECIFICACION UNILATERAL

Valores de  $d_\beta$  tales que

$$Pr\{t^* \leq t_{\alpha, n-1} \mid \delta = d_\beta \sqrt{n}, f = n - 1\} = \beta$$

$$d_\beta = \frac{|m_1 - m_0|}{\sigma}$$

n	$\alpha=0.01$			$\alpha=0.05$		
	$\beta=0.01$	$\beta=0.05$	$\beta=0.10$	$\beta=0.01$	$\beta=0.05$	$\beta=0.10$
5	3.360	2.811	2.522	2.213	1.819	1.610
6	2.728	2.296	2.069	1.197	1.580	1.401
7	2.349	1.984	1.793	1.719	1.418	1.259
8	2.093	1.772	1.603	1.573	1.299	1.153
9	1.094	1.615	1.462	1.458	1.206	1.071
10	1.759	1.494	1.354	1.367	1.131	1.005
15	1.339	1.140	1.035	1.080	0.894	0.795
20	1.124	0.958	0.870	0.922	0.764	0.679
25	0.988	0.843	0.766	0.818	0.677	0.602
30	0.892	0.761	0.692	0.743	0.615	0.547
35	0.820	0.700	0.636	0.685	0.567	0.505
40	0.763	0.651	0.591	0.639	0.529	0.471
45	0.716	0.611	0.555	0.601	0.498	0.443
50	0.667	0.578	0.525	0.570	0.472	0.420
60	0.615	0.525	0.477	0.519	0.430	0.382
70	0.567	0.484	0.440	0.479	0.397	0.353
80	0.529	0.452	0.410	0.448	0.371	0.330
90	0.498	0.425	0.386	0.422	0.349	0.311
100	0.472	0.403	0.366	0.400	0.331	0.295
125	0.421	0.359	0.326	0.357	0.296	0.263
150	0.383	0.327	0.297	0.326	0.270	0.240
200	0.331	0.283	0.257	0.282	0.233	0.208

TABLA 12

PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA A LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCION NORMAL DE DESVIACION TIPO DESCONOCIDA. ESPECIFICACION BILATERAL

Valores de  $d_\beta$  tales que

$$Pr\{t^* \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid \delta = d_\beta \sqrt{n}, f = n - 1\} = \beta$$

$$d_\beta = \frac{|m_1 - m_0|}{\sigma}$$

n	$\alpha=0.01$			$\alpha=0.05$		
	$\beta=0.01$	$\beta=0.05$	$\beta=0.10$	$\beta=0.01$	$\beta=0.05$	$\beta=0.10$
5	4.012	3.363	3.027	2.657	2.204	1.960
6	3.153	2.667	2.428	2.240	1.867	1.673
7	2.664	2.263	2.053	1.975	1.651	1.479
8	2.341	1.996	1.814	1.790	1.496	1.342
9	2.112	1.804	1.641	1.646	1.379	1.237
10	1.937	1.658	1.510	1.534	1.286	1.155
15	1.448	1.243	1.135	1.193	1.002	0.901
20	1.206	1.037	0.947	1.012	0.850	0.764
25	1.056	0.909	0.830	0.894	0.752	0.676
30	0.951	0.818	0.748	0.810	0.681	0.612
35	0.872	0.751	0.686	0.746	0.627	0.564
40	0.810	0.698	0.637	0.695	0.585	0.526
45	0.760	0.654	0.598	0.654	0.550	0.494
50	0.718	0.618	0.565	0.619	0.520	0.468
60	0.652	0.561	0.513	0.563	0.473	0.425
70	0.601	0.517	0.472	0.520	0.437	0.393
80	0.560	0.482	0.441	0.485	0.408	0.367
90	0.527	0.453	0.414	0.457	0.384	0.345
100	0.499	0.429	0.392	0.433	0.364	0.327
125	0.444	0.383	0.350	0.386	0.325	0.287
150	0.405	0.349	0.319	0.352	0.296	0.266
200	0.349	0.301	0.275	0.304	0.256	0.230

TABLE 13

$$\lambda^2 = \frac{\chi_{\alpha, \nu}^2}{\chi_{1-\beta, \nu}^2}$$

$\lambda^2$			$\lambda^2$		
$\nu$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$	$\nu$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$
1	960.250	240.063	31	2.333	2.099
2	58.165	28.393	32	2.301	2.074
3	22.202	13.382	33	2.272	2.051
4	13.345	8.917	34	2.242	2.029
5	9.669	6.876	35	2.217	2.008
6	7.702	5.713	36	2.192	1.989
7	6.491	4.965	37	2.168	1.970
8	5.674	4.443	38	2.145	1.952
9	5.088	4.059	39	2.124	1.935
10	4.646	3.763	40	2.103	1.919
11	4.301	3.527	41	2.084	1.904
12	4.023	3.335	42	2.065	1.889
13	3.795	3.176	43	2.047	1.875
14	3.604	3.040	44	2.030	1.862
15	3.443	2.925	45	2.014	1.849
16	3.303	2.824	46	1.998	1.836
17	3.181	2.735	47	1.983	1.824
18	3.074	2.657	48	1.969	1.813
19	2.980	2.587	49	1.955	1.802
20	2.895	2.524	50	1.942	1.791
21	2.819	2.468	60	1.831	1.702
22	2.750	2.416	70	1.750	1.636
23	2.687	2.369	80	1.687	1.585
24	2.630	2.325	90	1.637	1.544
25	2.577	2.286	100	1.596	1.510
26	2.528	2.249			
27	2.484	2.214			
28	2.442	2.183			
29	2.403	2.153			
30	2.366	2.125			

TABLA 14

$$\lambda^2 = \frac{\chi_{1-\alpha, \nu}^2}{\chi_{\beta, \nu}^2}$$

$\lambda^2$			$\lambda^2$		
$\nu$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$	$\nu$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$
1	0.001	0.001	31	0.429	0.465
2	0.017	0.022	32	0.435	0.471
3	0.045	0.056	33	0.440	0.477
4	0.075	0.091	34	0.446	0.482
5	0.103	0.124	35	0.451	0.488
6	0.130	0.154	36	0.456	0.493
7	0.154	0.180	37	0.461	0.498
8	0.176	0.205	38	0.466	0.503
9	0.197	0.226	39	0.471	0.507
10	0.215	0.246	40	0.475	0.512
11	0.233	0.265	41	0.480	0.516
12	0.249	0.282	42	0.484	0.520
13	0.263	0.297	43	0.488	0.524
14	0.277	0.312	44	0.493	0.528
15	0.290	0.326	45	0.496	0.532
16	0.303	0.338	46	0.500	0.536
17	0.314	0.350	47	0.504	0.540
18	0.325	0.361	48	0.508	0.543
19	0.336	0.372	49	0.511	0.547
20	0.345	0.382	50	0.515	0.550
21	0.355	0.391	60	0.546	0.581
22	0.364	0.400	70	0.572	0.605
23	0.372	0.409	80	0.593	0.625
24	0.380	0.417	90	0.611	0.643
25	0.388	0.425	100	0.627	0.658
26	0.395	0.432			
27	0.403	0.440			
28	0.410	0.446			
29	0.416	0.453			
30	0.422	0.459			

TABLA 15

$$\lambda^2 = \frac{\chi_{\alpha/2, \nu}^2}{\chi_{1-\beta, \nu}^2}$$

$\lambda^2$			$\lambda^2$		
$\nu$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$	$\nu$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$
1	1 256.000	314.000	31	2.502	2.250
2	71.631	34.967	32	2.465	2.222
3	26.557	16.007	33	2.431	2.195
4	15.562	10.473	34	2.399	2.170
5	11.208	7.971	35	2.368	2.146
6	8.837	6.556	36	2.339	2.123
7	7.389	5.652	37	2.312	2.101
8	6.416	5.024	38	2.286	2.081
9	5.721	4.564	39	2.262	2.061
10	5.199	4.210	40	2.239	2.043
11	4.791	3.930	41	2.216	2.025
12	4.466	3.702	42	2.195	2.008
13	4.198	3.513	43	2.175	1.992
14	3.975	3.353	44	2.155	1.976
15	3.786	3.216	45	2.137	1.961
16	3.623	3.098	46	2.119	1.947
17	3.481	2.994	47	2.102	1.933
18	3.357	2.902	48	2.085	1.920
19	3.247	2.820	49	2.070	1.907
20	3.149	2.746	50	2.054	1.895
21	3.061	2.680	60	1.929	1.793
22	2.981	2.619	70	1.837	1.717
23	2.909	2.564	80	1.766	1.659
24	2.843	2.514	90	1.709	1.612
25	2.782	2.467	100	1.663	1.573
26	2.726	2.424			
27	2.674	2.385			
28	2.626	2.348			
29	2.582	2.313			
30	2.540	2.281			

TABLA 16

$$\lambda^2 = \frac{\chi^2_{1-\alpha/2, \nu}}{\chi^2_{\beta, \nu}}$$

$\lambda^2$			$\lambda^2$		
$\nu$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$	$\nu$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$
1	—	—	31	0.390	0.423
2	0.009	0.011	32	0.396	0.430
3	0.028	0.035	33	0.402	0.435
4	0.051	0.062	34	0.408	0.441
5	0.075	0.090	35	0.413	0.447
6	0.098	0.116	36	0.418	0.452
7	0.120	0.141	37	0.424	0.457
8	0.141	0.163	38	0.429	0.462
9	0.160	0.184	39	0.433	0.467
10	0.177	0.203	40	0.438	0.472
11	0.194	0.221	41	0.443	0.476
12	0.210	0.237	42	0.447	0.481
13	0.224	0.253	43	0.452	0.485
14	0.238	0.267	44	0.456	0.489
15	0.251	0.281	45	0.460	0.493
16	0.263	0.293	46	0.464	0.497
17	0.274	0.305	47	0.468	0.501
18	0.285	0.317	48	0.472	0.505
19	0.296	0.327	49	0.476	0.509
20	0.305	0.338	50	0.479	0.512
21	0.315	0.347	60	0.512	0.544
22	0.324	0.356	70	0.539	0.570
23	0.332	0.365	80	0.561	0.592
24	0.341	0.374	90	0.580	0.610
25	0.349	0.382	100	0.597	0.626
26	0.356	0.389			
27	0.363	0.397			
28	0.370	0.404			
29	0.377	0.411			
30	0.384	0.417			

TABLA 17

PRUEBA DE UNA HIPOTESIS RELATIVA AL PORCENTAJE DE ELEMENTOS FUERA DE ESPECIFICACION EXISTENTE EN UNA DISTRIBUCION NORMAL. ESPECIFICACION BILATERAL

Valores de  $D_0$ ,  $D_L$  y  $D_1$

$D_0$	$\alpha = 0.01$ $\beta = 0.05$		$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$		$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$	
	$D_L$	$D_1$	$D_L$	$D_1$	$D_L$	$D_1$
0.000	2.5758	4.2207	1.9600	3.6049	1.9600	3.2415
0.025	2.5766	4.2215	1.9606	3.6055	1.9606	3.2421
0.050	2.5790	4.2239	1.9624	3.6073	1.9624	3.2439
0.075	2.5830	4.2279	1.9655	3.6104	1.9655	3.2470
0.100	2.5885	4.2334	1.9697	3.6146	1.9697	3.2512
0.200	2.6255	4.2704	1.9985	3.6434	1.9985	3.2800
0.300	2.6835	4.3284	2.0450	3.6899	2.0450	3.3265
0.400	2.7574	4.4023	2.1070	3.7519	2.1070	3.3885
0.500	2.8424	4.4873	2.1815	3.8264	2.1815	3.4630
0.600	2.9341	4.5790	2.2654	3.9103	2.2654	3.5469
0.700	3.0298	4.6747	2.3558	4.0007	2.3558	3.6373
0.800	3.1280	4.7729	2.4505	4.0954	2.4505	3.7320
0.900	3.2269	4.8718	2.5476	4.1925	2.5476	3.8291
1.000	3.3265	4.9714	2.6461	4.2910	2.6461	3.9276
1.100	3.4264	5.0713	2.7454	4.3903	2.7454	4.0269
1.200	3.5264	5.1713	2.8451	4.4900	2.8451	4.1266
1.300	3.6264	5.2713	2.9450	4.5899	2.9450	4.2265
1.400	3.7264	5.3713	3.0449	4.6898	3.0449	4.3264
1.500	3.8264	5.4713	3.1449	4.7898	3.1449	4.4264

TABLA 18

VALORES DE  $n\omega_0$  Y  $c_A$  QUE DEFINEN PLANES DE MUESTREO SIMPLE CUYA CURVA DE EFICACIA PASA POR LOS PUNTOS  $(\omega_0, 1 - \alpha)$  Y  $(\omega_1, \beta)$

$$\omega_1/\omega_0 = \chi_{\beta, \nu}^2 / \chi_{1-\alpha, \nu}^2$$

$$n\omega_0 = \chi_{1-\alpha, \nu}^2 / 2$$

$c_A$	$\omega_1/\omega_0$		$n\omega_0$
	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.05$	$\alpha = 0.05$ $\beta = 0.10$	
0	58.165	44.709	0.052
1	13.345	10.941	0.356
2	7.702	6.511	0.818
3	5.674	4.889	1.367
4	4.646	4.058	1.970
5	4.023	3.549	2.613
6	3.604	3.206	3.286
7	3.303	2.957	3.981
8	3.074	2.768	4.695
9	2.895	2.618	5.426
10	2.750	2.497	6.169
11	2.630	2.397	6.924
12	2.528	2.312	7.690
13	2.442	2.240	8.464
14	2.366	2.177	9.247
15	2.301	2.122	10.036
16	2.242	2.073	10.832
17	2.192	2.029	11.635
18	2.145	1.990	12.442
19	2.103	1.945	13.255
20	2.065	1.922	14.072
21	2.030	1.892	14.894
22	1.998	1.865	15.720
23	1.969	1.840	16.549
24	1.942	1.817	17.382
25	1.917	1.795	18.219
26	1.893	1.775	19.058
27	1.871	1.757	19.901
28	1.850	1.739	20.746
29	1.831	1.723	21.594
30	1.813	1.707	22.445

TABLA 19

FUNCION DE DISTRIBUCION DE LA LEY DE POISSON

$$P_{\lambda, c} = \sum_{i=0}^c \exp(-n\omega) \frac{(n\omega)^i}{i!}$$

$\lambda = n\omega$							
c	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
6							1.0000

$\lambda = n\omega$							
c	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	0.4493	0.4066	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498
1	0.8088	0.7725	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991
2	0.9526	0.9371	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232
3	0.9909	0.9865	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472
4	0.9986	0.9977	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153
5	0.9998	0.9997	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161
6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665
7			1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881
8				1.0000	0.9998	0.9989	0.9962
9					1.0000	0.9997	0.9989
10						0.9999	0.9997
11						1.0000	0.9999
12							1.0000

TABLA 19 (continuación)

c	$\lambda = n\omega$						
	3.5	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0
0	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003
1	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404	0.0174	0.0073	0.0030
2	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247	0.0620	0.0296	0.0138
3	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650	0.1512	0.0818	0.0424
4	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405	0.2851	0.1730	0.0996
5	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160	0.4457	0.3007	0.1912
6	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622	0.6063	0.4497	0.3134
7	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666	0.7440	0.5987	0.4530
8	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319	0.8472	0.7291	0.5925
9	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682	0.9161	0.8305	0.7166
10	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863	0.9574	0.9015	0.8159
11	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945	0.9799	0.9467	0.8881
12	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9912	0.9730	0.9362
13	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9964	0.9872	0.9658
14		1.0000	0.9999	0.9998	0.9986	0.9943	0.9827
15			1.0000	0.9999	0.9995	0.9976	0.9918
16				1.0000	0.9998	0.9990	0.9963
17					0.9999	0.9996	0.9984
18					1.0000	0.9999	0.9993
19						1.0000	0.9997
20							0.9999
21							1.0000

TABLA 19 (continuación)

$\lambda = n\omega$							
c	9	10	11	12	13	14	15
0	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0062	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000
3	0.0212	0.0103	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002
4	0.0550	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009
5	0.1157	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028
6	0.2068	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076
7	0.3239	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180
8	0.4557	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374
9	0.5874	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699
10	0.7060	0.5830	0.4599	0.3432	0.2517	0.1757	0.1185
11	0.8030	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848
12	0.8758	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676
13	0.9261	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632
14	0.9585	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657
15	0.9780	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681
16	0.9889	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641
17	0.9947	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489
18	0.9976	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195
19	0.9989	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752
20	0.9996	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170
21	0.9998	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469
22	0.9999	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673
23	1.0000	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805
24		1.0000	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888
25			0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938
26			1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967
27				1.0000	0.9998	0.9994	0.9983
28					0.9999	0.9997	0.9991
29					1.0000	0.9999	0.9996
30						1.0000	0.9998
31							0.9999
32							1.0000

TABLA 19 (continuación)

$$\lambda = n\omega$$

c	16	17	18	19	20	21	22
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
6	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003	0.0001	0.0001
7	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008	0.0004	0.0002
8	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021	0.0011	0.0006
9	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050	0.0028	0.0015
10	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108	0.0063	0.0036
11	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214	0.0129	0.0076
12	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390	0.0245	0.0151
13	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661	0.0434	0.0278
14	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049	0.0716	0.0477
15	0.4667	0.3715	0.2867	0.2148	0.1565	0.1111	0.0769
16	0.5660	0.4677	0.3751	0.2920	0.2211	0.1629	0.1170
17	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970	0.2270	0.1690
18	0.7423	0.6550	0.5622	0.4695	0.3814	0.3017	0.2325
19	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703	0.3843	0.3060
20	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591	0.4710	0.3869
21	0.9108	0.8615	0.7991	0.7255	0.6437	0.5577	0.4716
22	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206	0.6405	0.5564
23	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875	0.7160	0.6374
24	0.9777	0.9594	0.9317	0.8933	0.8432	0.7822	0.7117
25	0.9869	0.9748	0.9554	0.9269	0.8878	0.8377	0.7771
26	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514	0.9221	0.8826	0.8324
27	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687	0.9475	0.9175	0.8775
28	0.9978	0.9950	0.9897	0.9805	0.9657	0.9436	0.9129
29	0.9989	0.9973	0.9941	0.9882	0.9782	0.9626	0.9398
30	0.9994	0.9986	0.9967	0.9930	0.9865	0.9758	0.9595
31	0.9997	0.9993	0.9982	0.9960	0.9919	0.9848	0.9735
32	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953	0.9907	0.9831
33	1.0000	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973	0.9945	0.9895
34		0.9999	0.9998	0.9994	0.9985	0.9968	0.9936
35		1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9962
36			1.0000	0.9998	0.9996	0.9990	0.9978
37				0.9999	0.9998	0.9995	0.9988
38				1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
39					1.0000	0.9999	0.9996
40						1.0000	0.9998
41							0.9999
42							1.0000



## INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ley normal $N(0, 1)$ . Valores de $\phi(K_\alpha)$ en función de $K_\alpha$ (cuantila de orden $1 - \alpha$ ).....	552
Tabla 2. Ley normal $N(0, 1)$ . Valores de $K_\alpha$ en función de $\phi(K_\alpha)$ .....	554
Tabla 3. Ley de $\chi^2$ . Valores de $\chi_{\alpha, \nu}^2$ (cuantila de orden $1 - \alpha$ ) .....	556
Tabla 4. Valores del parámetro $b_n = E[\chi]/\sqrt{n}$ ...	558
Tabla 5. Ley de Student. Valores de $t_{\alpha, \nu}$ (cuantila de orden $1 - \alpha$ ) .....	559
Tabla 6. Límites de tolerancia natural con especificación unilateral para una distribución normal $N(m, \sigma)$ de media y desviación tipo desconocidas. Valores de $k$ tales que	
$\Pr\{x \leq \bar{x} + KS \text{ (ó } x \geq \bar{x} - KS)\} \geq P$	
para el $100 \gamma \%$ de las muestras. $\gamma = 0.05$ .....	561
Tabla 7. Números aleatorios uniformemente distribuidos .....	563
Tabla 8. Valores de la función de eficacia de una prueba de una hipótesis relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo conocida.	

8.1.	Especificación unilateral $\alpha = 0.01$ . $n = 1$ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 .....	564
8.2.	Especificación unilateral $\alpha = 0.01$ . $n = 11$ 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20 .....	566
8.3.	Especificación unilateral $\alpha = 0.01$ . $n = 25$ , 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90 y 100...	567
8.4.	Especificación unilateral $\alpha = 0.05$ . $n = 1$ , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 .....	568
8.5.	Especificación unilateral $\alpha = 0.05$ . $n = 11$ , 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20 .....	569
8.6.	Especificación unilateral $\alpha = 0.05$ . $n = 25$ , 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90 y 100.....	570
Tabla 9. Valores de la función de eficacia $P(\Delta)$ de una prueba de una hipótesis relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo conocida. Especificación unilateral .....		571
Tabla 10. Valores de la función de eficacia de una prueba de una hipótesis relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo co- nocida.		
10.1.	Especificación bilateral $\alpha = 0.01$ . $n = 1$ , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 .....	572
10.2.	Especificación bilateral $\alpha = 0.01$ . $n = 11$ , 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20 .....	573
10.3.	Especificación bilateral $\alpha = 0.01$ . $n = 25$ , 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90 y 100.....	574
10.4.	Especificación bilateral $\alpha = 0.05$ . $n = 1$ , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 .....	575
10.5.	Especificación bilateral $\alpha = 0.05$ . $n = 11$ , 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20 .....	576

10.6. Especificación bilateral  $\alpha = 0.05$ .  $n = 25, 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90$  y  $100$ ..... 577

Tabla 11. Prueba de una hipótesis relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo desconocida. Especificación unilateral. Valores  $d_\beta$  tales que

$$\Pr\{t^* \leq t_{\alpha, n-1} \mid \delta = d_\beta \sqrt{n}, f = n - 1\} = \beta \quad 578$$

Tabla 12. Prueba de una hipótesis relativa a la media de una distribución normal de desviación tipo desconocida. Especificación bilateral. Valores de  $d_\beta$  tales que

$$\Pr\{t^* \leq t_{\alpha/2, n-1} \mid \delta = d_\beta \sqrt{n}, f = n - 1\} = \beta \quad 579$$

Tabla 13. Valores de  $\lambda^2$  tales que

$$\lambda^2 = \chi_{\alpha, \nu}^2 / \chi_{1-\beta, \nu}^2 \dots\dots\dots 580$$

Tabla 14. Valores de  $\lambda^2$  tales que

$$\lambda^2 = \chi_{1-\alpha, \nu}^2 / \chi_{\beta, \nu}^2 \dots\dots\dots 581$$

Tabla 15. Valores de  $\lambda^2$  tales que

$$\lambda^2 = \chi_{\alpha/2, \nu}^2 / \chi_{1-\beta, \nu}^2 \dots\dots\dots 582$$

Tabla 16. Valores de  $\lambda^2$  tales que

$$\lambda^2 = \chi_{1-\alpha/2, \nu}^2 / \chi_{\beta, \nu}^2 \dots\dots\dots 583$$

Tabla 17. Prueba de una hipótesis relativa al porcentaje de elementos fuera de especificación existente en una distribución normal. Especificación bilateral. Valores de  $D_0, D_L$  y  $D_1$  ..... 584



## BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA

### 1. ESTADISTICA FUNDAMENTAL

Cramer, H.: *Mathematical Methods of Statistics.*

Fourgeaud, C. y Fuchs, A.: *Statistique.*

Palacios, J.: *Métodos estadísticos.*

### 2. CALCULO DE PROBABILIDADES

Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications.*

Renyi, A.: *Calcul des probabilités.*

### 3. APLICACIONES INDUSTRIALES DE LA ESTADISTICA

Bowker, A. y Lieberman, G.: *Engineering Statistics.*

Hald, A.: *Statistical Theory with Engineering Applications.*

Mothes, J. y Torrens-Ibern, J.: *Estadística aplicada a la ingeniería.*

### 4. CONTROL DE CALIDAD DE LAS FABRICACIONES

Cavé, R.: *Contrôle statistique des fabrications.*

Duncan, A.: *Quality Control and Industrial Statistics.*

### 5. TABLAS

Dodge, H. y Romig, H.: *Sampling Inspection Tables. Single and Double Sampling.*

Eilon, S.: *Industrial Engineering Tables.*

Fisher, R. y Yates, F.: *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research.*

Owen, D.: *Handbook of Statistical Tables.*

BIBLIOGRAFIA SELECCIONADA

1. ESTADÍSTICA FUNDAMENTAL

Granger, H.: *Mathematical Methods of Statistics*.  
Fournier, C. y Fuchs, A.: *Statistique*.  
Tácher, J.: *Méthodes statistiques*.

2. ESTADÍSTICA DE PROGRAMAS

Bell, V.: *An Introduction to Probability Theory*.  
Kendall, S.: *Elementary Applied*.  
Kendall, S.: *Elementary Applied*.

3. APLICACIONES INDUSTRIALES DE LA ESTADÍSTICA

Boyce, A. y Ferguson, G.: *Engineering Statistics*.  
Hall, W.: *Statistical Control in Engineering*.  
Miles, J. y Torres-Ibanez, J.: *Estadística aplicada a la industria*.

4. CONTROL DE CALIDAD DE LAS FABRICACIONES

Gay, R.: *Control de calidad en las fabricaciones*.  
Duncan, A.: *Quality Control and Industrial Statistics*.

5. TABLAS

Dodge, H. y Romig, H.: *Sampling Inspection Tables*.  
Lillio, S.: *Statistical Engineering Tables*.  
Fisher, R. A.: *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*.  
Owen, D.: *Handbook of Statistical Tables*.

ERRATAS ADVERTIDAS

<i>Página</i>	<i>Línea</i>	<i>Dice</i>	<i>Debe decir</i>
10	-9	amplitud $\omega$	amplitud $w$
30	4	El establecimiento	el establecimiento
40	9	medidas	medias
67	17	$t_0/\delta$	$t_0   \delta$
69	-6	$\dots ]_2$	$\dots ]^2$
77	-7	$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
77	-6	$n_2 - 2$	$n_2 - 1$
81	-11	$(y_1 + w)$	$F(y_1 + w)$
95	5	$E[T] = \varphi(n), \theta$	$E[T] = \varphi(n) \theta$
103	-4	$\dots \text{Var} [\Sigma \bar{w}] =$	$\dots \text{Var} [\Sigma w] =$
128	-6	$\phi(\bar{x} + KS)$	$\phi(\bar{x} - KS)$
130	1	$\delta = -K_{1-P} \sqrt{\bar{n}}$	$\delta = K_{1-P} \sqrt{\bar{n}}$
146	1	$R = A$ : región de ...	$R = \bar{A}$ : región de ...
155	-1	$n(m_0 - m_1)$	$n(m_1 - m_0)$
196	cuadro	$C_2$	$C_0$
271	12	$\lambda_{\beta}^2 = \dots ]$	$\lambda_{\beta}^2 = \dots ]^2$
396	-1 y -2	$C_{n_1}^1, C_{n_1}^1, C_{n_2}^2$	$C_{n_1}^{c_1}, C_{n_1}^{c_1}, C_{n_2}^{c_2}$
413	-1	$c_n h_2 - h_1 h_1/s n$	(línea suprimida)
415	18	$c_n - h_1$	$c_n + h_1$
445	-2	$m_1 = m_0 + \dots$	$m_1 = m_0 - \dots$
450	-1	$\leq$	$\geq$
451	1	$m_1 - m_0$	$m_0 - m_1$
451	5	$\geq, m_0 - m_1$	$\leq, m_1 - m_0$
459	1.º cuad.	inferior	superior
459	2.º cuad.	superior	inferior
470	-3	aceptada	rechazada
471	1	rechazada	aceptada
471	-5	$\leq$	$\geq$
471	-3	$\geq$	$\leq$
472	-7	$h_1 + sn$	$h_2 + sn$
478	7	15.49	15.49 (a)
478	25	20.65	20.65 (b)
478	-2	$x = \dots$	(a) $x = \dots$
478	-1	$x = \dots$	(b) $x = \dots$
549	1	$\frac{1}{K^2}$	$1 - \frac{1}{K^2}$
Tabla 18	19	1.945	1.954



## COLECCION DE MONOGRAFIAS

Sección 1. <sup>a</sup>	FILOSOFIA Y TEOLOGIA ...	Azul
Sección 2. <sup>a</sup>	HISTORIA, LITERATURA Y FILOLOGIA ... .. .	Rosa
Sección 3. <sup>a</sup>	ARTES PLASTICAS Y MUSICA.	Verde
Sección 4. <sup>a</sup>	MATEMATICAS, FISICA, QUI- MICA Y GEOLOGIA ... .. .	Naranja
Sección 5. <sup>a</sup>	BIOLOGIA, MEDICINA, FAR- MACIA, VETERINARIA Y CIENCIAS AGRARIAS ... .. .	Amarillo
Sección 6. <sup>a</sup>	DERECHO, ECONOMIA, CIEN- CIAS SOCIALES Y COMUNICA- CION SOCIAL ... .. .	Beige
Sección 7. <sup>a</sup>	ARQUITECTURA, URBANISMO E INGENIERIA ... .. .	Rojo

COLECCION DE MONOGRAFIAS

Sección 1ª	BILOGIA Y ZOOLOGIA	Arzobispo
Sección 2ª	HISTORIA, LINGÜISTICA Y FILOLOGIA	Basadre
Sección 3ª	ARTES PLASTICAS Y MUSICA	Vasquez
Sección 4ª	MATEMATICAS FISICAS QUIMICA Y GEOLOGIA	Martinez
Sección 5ª	BIOMEDICINA, FARMACIA VETERINARIA Y CIENCIAS AGRARIAS	Amador
Sección 6ª	TRIBUTOS, ECONOMIA, CIENCIAS SOCIALES Y COMERCIO	Basadre
Sección 7ª	ARQUITECTURA URBANISMO	Basadre







La obra, como su título insinúa, tiene dos partes bien diferenciadas. A lo largo de la primera (capítulos 1 a 7) el autor desarrolla, en forma original, la teoría del razonamiento estadístico (prueba de hipótesis). Sus aportaciones personales más interesantes a dicha teoría están contenidas en los capítulos 6 y 7. En la segunda parte (capítulos 8 y 9) el autor hace aplicación práctica de los métodos y modelos descritos en los primeros capítulos al control de la calidad de las fabricaciones.



El autor de esta obra nació en Teruel, el 8 de octubre de 1939. Tras cursar en Zaragoza estudios técnicos de grado medio, ingresó en 1961 en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona, donde obtuvo en 1966 el título de Ingeniero Industrial. Número uno de su promoción, fue distinguido con un premio especial de la Caja de Ahorros de la Excelentísima Diputación de Barcelona. Especialmente interesado en temas estadísticos, ha desarrollado una activa labor docente y de investigación en este campo de las matemáticas. En la actualidad trabaja en el Departamento de Planificación y Desarrollo de Fuerzas Eléctricas de Cataluña.

