La Serie Universitaria de la Fundación Juan March presenta resúmenes, realizados por el propio autor, de algunos estudios e investigaciones llevados a cabo por los becarios de la Fundación y aprobados por los Asesores Secretarios de los distintos Departamentos.

El texto íntegro de las Memorias correspondientes se encuentra en la Biblioteca de la Fundación (Castelló, 77. Madrid-6).

La lista completa de los trabajos aprobados se presenta, en forma de fichas, en los Cuadernos Bibliográficos que publica la Fundación Juan March.

Los trabajos publicados en Serie Universitaria abarcan las siguientes especialidades: Arquitectura y Urbanismo; Artes Plásticas; Biología; Ciencias Agrarias; Ciencias Sociales; Comunicación Social; Derecho; Economía; Filosofía; Física; Geología; Historia; Ingeniería; Literatura y Filología; Matemáticas; Medicina, Farmacia y Veterinaria; Música; Química; Teología. A ellas corresponden los colores de la cubierta.

Edición no venal de 300 ejemplares
que se reparte gratuitamente a investigadores,
Bibliotecas y Centros especializados de toda España.

Fundación Juan March

Teoría de la Dimensión/Ramón Galián Jiménez 107

SERIE UNIVERSITARIA

Fundación Juan March

Ramón Galián Jiménez

Teoría de la dimensión

107

Fundación Juan March

Serie Universitaria

107

Ramón Galián Jiménez

Teoría de la dimensión

Fundación Juan March
Castelló, 77. Teléf. 225 44 55
Madrid - 6

Este trabajo fue realizado con una Beca de la
Convocatoria de España, 1977.
Departamento de MATEMATICAS.
Centro de trabajo: Departamento de Algebra y Fundamentos.
Facultad de Ciencias de la Universidad de Salamanca.

Depósito Legal: M-32620 - 1979
I.S.B.N. 84 - 7075 - 143 - 3.
Ibérica, Tarragona, 34 - Madrid - 7.
Impresión: Gráficas Ibérica, Tarragona, 34 - Madrid - 7.

I N D I C E

La Fundación Juan March no se solidariza necesariamente con las opiniones de los autores cuyas obras publica.

PROLOGO

El presente trabajo es fruto de un propósito que no se limita a la mera teoría de la dimensión, cual es llegar a una comprensión aritmética de toda la topología. La idea básica es la siguiente: considerando en la familia de cerrados de un espacio topológico las operaciones conjuntistas de unión e intersección se obtiene una estructura algebraica de semianillo, con ciertas propiedades adicionales; con ello los puntos del espacio se pueden interpretar como ideales primos y las nociones topológicas como propiedades de la aritmética de dicho semianillo (tratándose de un semianillo, con particularidades esenciales, hemos optado por llamar <u>topología</u> a dicha estructura algebraica). Como ejemplos, la propiedad de Hausdorff significa aritméticamente que dos puntos distintos, pensados como ideales primos de la topología, no tengan múltiplos primos comunes; la compacidad significa que todo ideal maximal sea el ideal primo correspondiente a un punto; la noetherianidad que todo ideal de la topología sea finito-generado, luego principal, etc.

En opinión del autor, la teoría de la dimensión, que aquí se presenta, constituye una buena muestra de como la estructura algebraica a que nos referimos es la auténtica realidad de la topología.

El primer capítulo es una introducción al lenguaje algebraico-topológico, que se usa después. En el segundo capítulo se define la dimensión de un espacio topológico como la dimensión aritmética o de Krull de su topología (o de una base conveniente); tras la definición, se prueban las propiedades básicas de toda función "dimensión", a saber compatibilidad con especializaciones y productos o, en términos clásicos, propiedades de monotonia y del producto, cuyas demostraciones se reducen a sencillos procesos de álgebra conmutativa elemental. El resto del segundo capítulo, así como el cuarto, están dedicados a comparar esta noción de dimensión con las ya conocidas, en aquellas clases de espacios donde existen satisfactorias teorías de la dimensión; entre éstos los más importantes son los espacios noetherianos y los espacios metrizables y separables.

En el caso de los espacios noetherianos, la dimensión, introducida por A. Grothendieck con el nombre de "dimensión combinatoria", es una propiedad de las cadenas de cerrados irreducibles, mientras que en los espacios métricos la dimensión se entendía clásicamente bien como una propiedad de los recubrimientos abiertos (dimensión de recubrimiento o de Lebesgue), bien como una propiedad inductiva, es decir que sabiendo lo que significa la dimensión $n-1$ podemos saber lo que significa la dimensión n, entendiendo que en un espacio n-dimensional dos puntos distintos siempre se han de poder separar por un cerrado de dimensión $n-1$, (esta definición inductiva de la dimensión fue formalizada por Menger y Uryshon, aunque la idea se remonta a H. Poincaré). Como se puede apreciar, estos conceptos de dimensión se refieren a propiedades particulares de los espacios a los que se aplican, luego en su validez están limitadas de antemano; obsérvese, por ejemplo, que carece de sentido hablar de la dimensión combinatoria de un espacio métrico o de la dimensión de recubrimiento de un espacio irreducible, donde todos los abiertos se cortan. Estas divergencias son debidas a que la dimensión, siendo una propiedad de naturaleza aritmética universalmente predicable, en los casos anteriores coincide "casualmente" con estas otras propiedades particulares.

En el capítulo tercero se estudia la relación entre dimensión topológica y dimensión cohomológica. El resultado fundamental es que la dimensión topológica acota la cohomológica en todo espacio que sea el espectro de una topología; ésto se debe a que todo haz de grupos abelianos sobre un tal espacio tiene canónicamente asociado un complejo de haces acíclicos, llamado complejo de Cousin. Los espacios que se presentan en la práctica no son, en general, el espectro de una topología; no obstante, en los casos más importantes: espacios noetherianos, compactos, localmente compactos y paracompactos, etc., se consigue la misma acotación, vía la comparación con el espectro de una base conveniente de la topología.

Una vez probada la relación entre las dimensiones topológica y cohomológica, se establece fácilmente la relación $\dim \mathbb{R}^n = n$, que clásicamente resulta bastante complicada.

Por último diré que este trabajo nunca lo hubiera realizado sin el estímulo recibido en todo momento del Profesor D. Juan Sancho Guimerá, que, a su vez, fue el iniciador del estudio de la topología desde un punto de vista aritmético.

Ramón Galián Jiménez (*)
Sección de Matemáticas
Universidad de Salamanca

(*) El autor agradece a la Fundación Juan March haya tenido a bien publicar el presente trabajo en su Serie Universitaria, así como la concesión de una beca durante el curso 1977-78 para la realización del mismo.

1. <u>Introducción a la topología desde una perspectiva aritmética.</u>

<u>Definición</u>: Una topología es un conjunto A dotado de dos operaciones (suma y producto) tales que:

1°) A es un semigrupo conmutativo respecto de cada una de las operaciones (como es habitual el elemento neutro de la suma se denotará por 0 y el del producto por 1).

2°) El producto es distributivo respecto a la suma.

3°) Para todo $a \varepsilon A$, $a \cdot 0 = 0$, $a^2 = a$ y $a + 1 = 1$.

Las siguientes propiedades de una topología se comprueban fácilmente:

i) La suma también es distributiva respecto del producto.

ii) Para todo $a \varepsilon A$, $a + a = a$.

iii) En una topología no hay elementos nilpotentes ni unitarios distintos del 0 y 1, respectivamente.

Se deduce de estas propiedades que, si en una topología se intercambian las operaciones, se obtiene otra estructura de topología: la estructura dual, que se denotará por A^*.

Un <u>homomorfismo de topologías</u> es una aplicación $f: A \longrightarrow A'$ tal que:

1°) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

2°) $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

<u>Ejemplo</u>: Como es obvio, el ejemplo fundamental de topología es la familia de cerrados, o de abiertos, de un espacio

topológico. En estos casos, siempre supondremos que la suma es la intersección y el producto la unión; la elección contraria nos daría la estructura dual. Una vez elegidas la suma y el producto, la topología de los cerrados es canónicamente isomorfa a la dual de la topología de los abiertos.

Ideales y filtros en una topología.

Sea A una topología. Una parte $I \subset A$ es un ideal si verifica:

1°) Cualesquiera que sean $a,b \in I$, $a+b \in I$.

2°) Para todo $a \in A$ y todo $b \in I$, $a \cdot b \in I$.

Una parte $F \subset A$ es un filtro si es un ideal en la estructura dual A^* .

Un ideal $I \subset A$ es primo si $a \cdot b \in I$ sólo cuando $a \in I$ ó $b \in I$. Un filtro F es primo, si lo es como ideal de A^* .

Se comprueban de modo inmediato las siguientes propiedades:

i) Un ideal principal no puede estar generado por elementos distintos.

ii) Todo ideal finito-generado es principal.

iii) Si $a+b \in I$, $a \in I$ y $b \in I$.

iv) Si $a \in (b)$, $a \cdot b = a$.

v) El complementario de un ideal primo es un filtro primo y recíprocamente.

Cociente de una topología por un ideal.

Sea $I \subset A$ un ideal. Se define A/I como la topología obtenida definiendo en el conjunto cociente de A por la relación:

$$a \sim a' \Longleftrightarrow a + b = a' + b \text{ , para algún } b \in I$$

las operaciones $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ y $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$.
La aplicación canónica $\pi : A \longrightarrow A/I$, $\pi(a) = \bar{a}$, es un homomorfismo y verifica la propiedad habitual del paso al cociente, es decir todo homomorfismo $f: A \longrightarrow A'$ que se anula sobre I factoriza a través de $\pi : A \longrightarrow A/I$.
Sin embargo, no es cierto que si el núcleo de un homomorfismo es trivial, dicho homomorfismo sea inyectivo.
Por ejemplo, sea A la topología de un espacio con dos puntos, $X = \{x_0, x_1\}$, x_0 cerrado y x_1 denso; es decir, $A = \{0, 1, x_0\}$. La aplicación $f: A \longrightarrow A$ definida por $f(x_0) = f(1) = 1$ y $f(0) = 0$ es un homomorfismo de núcleo trivial pero no inyectivo.
Se verifica como en anillos que los ideales primos de A/I se corresponden biunívocamente con los de A que contienen a I . Por tanto, dado que en una topología no existen elementos nilpotentes, se dispone de un <u>teorema de Euclides</u> generalizado:
<u>Todo ideal de una topología es la intersección de los ideales primos que le contienen</u>.

<u>Localización en topologías</u>.

Sea $S \subset A$ un sistema multiplicativamente cerrado. En el conjunto $A \times S$ se define la relación de equivalencia

$$(a,s) \sim (a',s') \iff \text{para algún } s'' \in S \text{ , } s''s'a = s'' \cdot s \cdot a'$$

El conjunto cociente $S^{-1}A = A \times S/\sim$ se dota de estructura de topología definiendo

$$\overline{(a,s)} + \overline{(a',s')} = \overline{(as'+a's,ss')}$$

$$\overline{(a,s)} \cdot \overline{(a',s')} = \overline{(aa',ss')}$$

Como es habitual la clase $\overline{(a,s)}$ se denota por $\frac{a}{s}$.

La aplicación canónica $\begin{array}{l} A \longrightarrow S^{-1}A \\ a \longmapsto \frac{a}{1} \end{array}$ es un homomorfismo epiyectivo.

Si S es $A-p$, para algún ideal primo p , $S^{-1}A$ se denotará por A_p . Los ideales primos de $S^{-1}A$ se corresponden biunívocamente con los ideales primos de A que no cortan a S . En una topología todo elemento distinto del 1 es no invertible, según se dijo al principio; en consecuencia está contenido en algún ideal primo; por tanto, la única topología sin ideales propios será la topología elemental $\{0,1\}$, que la denotaremos por K . Así pues, se verifica:

i) Un ideal $I \subset A$ es maximal si y solo si $A/I = K$.

ii) Todo ideal maximal es primo.

iii) Un ideal primo $p \subset A$ es minimal si y solo si $A_p = K$. En particular todo elemento de un ideal primo minimal es divisor de cero.

Topologías complementadas.

Una topología A es complementada si para todo $a \in A$ el ideal $An(a) = \{b \in B : b \cdot a = 0\}$ es principal.
El generador de $An(a)$, que está unívocamente determinado, se denotará por $\bar{a}$ y se llamará complemento de a, mientras que $a + \bar{a}$ se llamará la frontera de a y se denotará por $F(a)$.

Ejemplo: Los cerrados de un espacio topológico forman una topología complementada, no así los abiertos en general (se entiende con la intersección como suma y la unión como producto). El complemento de un cerrado es la adherencia de su abierto complementario, en tanto que su frontera en el sentido que se ha definido coincide con su frontera en sentido habitual.

Proposición (1.1): La frontera de cualquier elemento de una topología es no divisor de cero.

Demostración: Si $b \in F(a) = 0$ se tendría $ba + b\bar{a} = 0$, luego $ba = 0$ y $b\bar{a} = 0$; entonces $b \in An(a)$, de donde $b = b \cdot \bar{a}$ y por tanto $b = 0$. **

En general llamaremos frontera a todo elemento de una topología que no sea divisor de cero; de hecho, un elemento a no divisor de cero es la frontera de sí mismo, pues $An(a) = (0)$.

Proposición (1.2): Sea A una topología complementada. Un ideal primo $p \subset A$ es minimal si y solo si no contiene ninguna frontera.

Demostración: Si p es minimal, $A_p = \{0,1\}$ luego todo elemento de p es divisor de cero.
Recíprocamente, si p no contiene fronteras, dado $a \varepsilon p$ su complementado $\bar{a}$ no puede estar en p, pues estaría su frontera; entonces, todo elemento de p tiene algún elemento que le anula en $A - p$, luego la imagen de p en A_p es 0, por tanto p es minimal. **

Una topología es de Boole si es complementada y todo elemento distinto del 1 es divisor de cero.

Proposición (1.3): Una topología es de Boole si y solo si para todo $a \varepsilon A$ hay un $a' \varepsilon A$ tal que $a \cdot a' = 0$ y $a + a' = 1$.

Ejemplo: Dado un conjunto X, $P(X)$ es una topología de Boole.

Proposición (1.4): Una topología A es de Boole si y solo si es de dimensión (en sentido de Krull) cero, esto es que todo ideal primo es maximal.

Demostración: Si A es de Boole todos los ideales primos son minimales, ya que no hay fronteras distintas del 1,

luego todas son maximales.
Recíprocamente, si todos los ideales primos son maximales, luego minimales, se tiene $A_p = K$ para todo ideal primo p ; entonces, si $a \varepsilon p$, $An(a)$ no está contenido en p , pues $\frac{a}{1} = 0$ en A_p . En consecuencia a y $An(a)$ no están contenidos en ningún ideal primo, luego $(a) + An(a) = (1)$, es decir $\lambda \cdot a + a' = 1$ con $a' \varepsilon An(a)$; entonces, se verifica $a + a' = 1$ y $a \cdot a' = 0$, luego A es de Boole. **

Observación: Si A es una topología complementada y S el sistema multiplicativo de las fronteras de A , la topología $S^{-1}A$ es de Boole, en virtud de (1.2) y (1.4).

Representación espectral de una topología.

Sea A una topología. Una representación de A sobre un conjunto X es un homomorfismo de topologías $f: A \longrightarrow P(X)$. Si f es inyectivo la presentación se dirá fiel .
La completación de una topología $B \subset P(X)$ es la topología $\hat{B} \subset P(X)$ formada por las intersecciones (sumas) de familias arbitrarias de elementos de B .
Cuando se verifique $B = \hat{B}$, diremos que B es una subtopología completa de $P(X)$.
Una representación $f: A \longrightarrow P(X)$ es completa si $f(A)$ es una subtopología completa de $P(X)$.
En estos términos, un espacio topológico es una topología A representada sobre un conjunto X de un modo fiel y completo. Identificando A con su representación, diremos

que un espacio topológico es una subtopología completa $A \subset P(X)$. Los elementos de A son los cerrados del espacio topológico y sus complementarios los abiertos; éstos constituyen una topología isomorfa a la dual de A.

Sea $A \subset P(X)$ un espacio topológico. Una subtopología $B \subset A$ es una base de dicho espacio si $A = \hat{B}$; es decir, si todo cerrado es intersección de cerrados de B.

Si $A \hookrightarrow P(X)$ es una representación fiel, tomando la complementación de A en $P(X)$ se obtiene un espacio topológico, del cual A es una base.

Dados dos espacios topológicos $A \subset P(X)$ y $A' \subset P'(X')$, una aplicación continua $f: X \longrightarrow X'$ induce un homomorfismo contravariante entre las topologías respectivas, que seguiremos denotando por f, $\begin{aligned} f: A' &\longrightarrow A \\ a' &\longmapsto f^{-1}(a') \end{aligned}$.

Al igual que en anillos, llamaremos espectro de una topología A al conjunto de sus ideales primos y lo denotaremos por $\operatorname{Esp} A$.

Si todo elemento de un anillo A puede interpretarse como una función sobre el espectro, tomando su valor en cada punto $x \in \operatorname{Esp} A$ en el cuerpo residual $k(x) = A_{p_x}/p_x \cdot A_{p_x}$, así también los elementos de una topología se pueden interpretar como funciones sobre el espectro, con la particularidad, ahora, de que todos los "cuerpos residuales" son iguales a la topología elemental $K = \{0,1\}$. En otras palabras, todo elemento a de una topología A define una función $a: \operatorname{Esp} A \longrightarrow K$, siendo $a(x)$ igual a 0 ó 1 según que x

pertenezca o no al ideal primo p_x (como es habitual, cuando un punto $x \in \mathrm{Esp}\, A$ se piense como ideal primo se denotará por p_x) . Se tiene, así, una representación fiel

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow P(\mathrm{Esp}\, A) \\ a &\longmapsto (a)_0 \end{aligned}$$

donde $(a)_0$ es el conjunto de ceros de a como función sobre $\mathrm{Esp}\, A$, es decir el conjunto de ideales primos a los que pertenece a . Esta representación canónica se denomina <u>representación espectral de</u> A .
La completación de A en $P(\mathrm{Esp}\, A)$ es la <u>topología de Zariski de</u> $\mathrm{Esp}\, A$.
En todo lo que sigue, $\mathrm{Esp}\, A$ siempre se pensará como espacio topológico con dicha topología.
Según se ha definido la topología de Zariski, los cerrados de $\mathrm{Esp}\, A$ serán los subconjuntos de la forma $\bigcap_{i\in I} (a_i)_0$, pero si q es el ideal de A engendrado por la familia $\{a_i\}_{i\in I}$ y $(q)_0$ es el conjunto de divisores primos de q , es decir $(q)_0 = \{x \in \mathrm{Esp}\, A : q \subset p_x\}$, es fácil comprobar que $\bigcap_{i\in I} (a_i)_0 = (q)_0$. Así pues, <u>todo cerrado de</u> $\mathrm{Esp}\, A$ <u>es el conjunto de divisores primos de un ideal de</u> A .
En particular, el cierre $\bar{x}$ de un punto $x \in \mathrm{Esp}\, A$ será el conjunto de divisores primos de p_x ; así los puntos cerrados de $\mathrm{Esp}\, A$ son precisamente los ideales maximales de A .
Dado $a \in A$, denotaremos por U_a al abierto de $\mathrm{Esp}\, A$ complementario del cerrado $(a)_0$. Es inmediato que

$U_a = \mathrm{Esp}\, A_a$, donde A_a designa la localización de A por el sistema multiplicativo $S = \{1,a\}$.
Exactamente igual que en el caso de anillos se prueba que el espectro de una topología es un espacio compacto; en consecuencia, los abiertos U_a también son compactos.
Dado un espacio topológico $A \subset P(X)$, para cada punto $x \varepsilon X$ la familia de cerrados que contienen a x es un ideal primo de A que denotaremos por p_x , y que como punto del especto lo denotaremos simplemente por x . Así pues, existe una aplicación <u>continua</u> canónica $j: X \longrightarrow \mathrm{Esp}\, A$, siendo la topología de X la inicial de dicha aplicación. Los puntos de $\mathrm{Esp}\, A$ que sean de la imagen de j se dirán <u>puntos reales</u>. Si se sustituye A por cualquier base B igualmente se tendrá una aplicación $j: X \longrightarrow \mathrm{Esp}\, B$. La aplicación j , para una base cualquiera, es inyectiva cuando el espacio es T_0 ; en ese caso, pues, X se identifica a un subespacio del espectro de su topología o de cualquiera de sus bases. En lo sucesivo todo espacio se supondrá T_0 .

<u>Producto tensorial de topologías.</u>

Sean A y B dos topologías, $X = \mathrm{Esp}\, A$ e $Y = \mathrm{Esp}\, B$. Las proyecciones canónicas $X \times Y \longrightarrow X$, $X \times Y \longrightarrow Y$, dan lugar a sendas inyecciones

$$A \hookrightarrow P(X \times Y) \quad , \quad B \hookrightarrow P(X \times Y)$$

cuyas imágenes engendran una subtopología de $P(X \times Y)$ que denotaremos $A\otimes B$. Denotaremos por $a\otimes 1$ la imagen en $A\otimes B$ del elemento $a\varepsilon A$, por $1\otimes b$ la del elemento $b\varepsilon B$, y por $a\otimes b$ el producto $(a\otimes 1)\cdot(1\otimes b)$.

La topología $A\otimes B$ tiene la propiedad universal de un producto tensorial.

En efecto, dados una topología C y homomorfismos $A\longrightarrow C$, $B\longrightarrow C$, existen aplicaciones continuas

$$\mathrm{Esp}\, C\longrightarrow X \ , \quad \mathrm{Esp}\, C\longrightarrow Y$$

luego hay una $\mathrm{Esp}\, C\longrightarrow X\times Y$ que induce un homomorfismo $A\otimes B\xrightarrow{\phi} P(\mathrm{Esp}\, C)$. Dado que tanto los elementos de la forma $a\otimes 1$ como los de la forma $1\otimes b$ valoran en C , el homomorfismo ϕ valorará en C , ya que $A\otimes B$, por definición está generada por dichos elementos. Por tanto se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, hook] \arrow[drr] & & \\
& A\otimes B \arrow[r] & C \\
B \arrow[ur, hook] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

luego $A\otimes B$ tiene la propiedad anunciada. **

El espectro de $A\otimes B$ se identifica canónicamente al producto $\mathrm{Esp}\, A\times \mathrm{Esp}\, B$, es decir

$$\mathrm{Esp}\, A\otimes B=\mathrm{Esp}\, A\times \mathrm{Esp}\, B$$

En efecto, por definición de $A \otimes B$, ésta contiene a A y B , vía los morfismos $a \longmapsto a \otimes 1$ y $b \longmapsto 1 \otimes b$, luego un ideal primo $\bar{p}$ de $A \otimes B$ define ideales primos $p = \bar{p} \cap A$ y $p' = \bar{p} \cap B$ en A y B respectivamente. Además el ideal engendrado por p y p' en $A \otimes B$, que lo denotaremos, en principio, por $p \otimes p'$, coincide con $\bar{p}$. Es claro que $p \otimes p' \subset \bar{p}$ luego concluiremos probando que $\bar{p} \subset p \otimes p'$. Sea $\alpha \varepsilon \bar{p}$; por definición de $A \otimes B$, se tendrá $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$, y como $\alpha \varepsilon \bar{p}$, cada sumando $a_i \otimes b_i$ también estará en $\bar{p}$; dado que $\bar{p}$ es primo, $a_i \varepsilon \bar{p}$ ó $b_i \varepsilon \bar{p}$, de donde se sigue que $\alpha \varepsilon p \otimes p'$ como queríamos.

2. Dimensión de un espacio topológico.

Dimensión de Krull de una topología.

Si en una topología A hay cadenas estrictamente crecientes de ideales primos de longitud arbitrariamente grande, se dirá que A tiene dimensión infinita, $\dim A = \infty$.
En caso contrario, llamaremos dimensión de Krull de A , $\dim A$, a la máxima longitud de las cadenas de ideales primos.

Ejemplo 1: Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros positivos dotado de la topología discreta $A = P(\mathbb{N})$.
Denotemos por X_0 al espacio formado por un punto $\{\omega_0\}$, por X_1 a $\mathbb{N}^* = (X_0 \times \mathbb{N})^*$ y, para $n \geqslant 1$, $X_n = (X_{n-1} \times \mathbb{N})^*$, donde el asterisco significa compactificación por un punto.
Si denotamos por ω_n al punto del infinito de X_n , la aplicación $X_n \xrightarrow{\phi_n} X_{n+1}$ definida inductivamente por

$$\phi_0(\omega_0) = \omega_1$$

y para $n \geqslant 1$

$$\phi_n(x_{n-1}, m) = (\phi_{n-1}(x_{n-1}), m) \ , \ x_{n-1} \in X_{n-1}, \ m \in \mathbb{N}$$

$$\phi_n(\omega_n) = \omega_{n+1}$$

es continua, e identifica X_n con el cerrado de X_{n+1} formado por los puntos aislados de éste. Se tiene, pues, una sucesión de espacios compactos

$X_0 \xhookrightarrow{\phi_0} X_1 \xhookrightarrow{\phi_1} X_2 \hookrightarrow \ldots$, en la que cada término se identifica con el conjunto "derivado", es decir, el conjunto de puntos de acumulación o no aislados del siguiente.

<u>Si</u> A_n <u>es la topología de</u> X_n , $\dim A_n = n$.

Para $n=0$ la afirmación es trivial. Supuesto válida para A_n , tengamos en cuenta que en X_{n+1} todos los cerrados sin interior, o sea no divisores de cero, están contenidos en X_n ; en consecuencia, todos los puntos no minimales de $\mathrm{Esp}\, A_{n+1}$ contienen al cerrado X_n ; en otras palabras:

$\mathrm{Esp}\, A_{n+1} = (X_n)_0 \amalg \mathrm{Esp}_{minimal}\, A_{n+1}$. Dado que $(X_n)_0 \simeq \mathrm{Esp}\, A_n$, se concluye que $\dim A_{n+1} = n+1$.

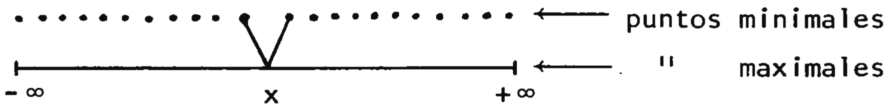
La sucesión $X_0 \xhookrightarrow{\phi_0} X_1 \xhookrightarrow{\phi_1} X_2 \xhookrightarrow{\phi_2} \ldots$, puede considerarse como una sucesión de subespacios cerrados de la recta real $\mathbb{R}$, sin más que tomar una sucesión convergente a un punto, sucesiones convergentes a cada uno de los términos de la anterior, sucesiones convergentes a cada uno de los términos de las anteriores, etc.

Habida cuenta de ésto, el espectro de la topología de la recta real $\mathbb{R}$ contiene copias de $\mathrm{Esp}\, A_n$, para cada n , luego:

<u>La dimensión de la topología de la recta real es infinita.</u>

Así mismo ocurre con cualquier intervalo o espacio euclídeo.

Ejemplo 2: La base B de la recta real formada por los intervalos cerrados, acotados o no, y sus uniones e intersecciones finitas tiene dimensión 1.
En efecto, el espectro de esta base se puede representar por el diagrama:



El espectro maximal se identifica a la recta real ampliada, y para cada número real x , su ideal maximal contiene dos ideales primos minimales, correspondientes a la noción de izquierda y derecha del punto x .

Definición y propiedades fundamentales de la dimensión.

Definición: La dimensión de un espacio X es el mínimo de las dimensiones de Krull de sus bases. Si X no tiene ninguna base de dimensión finita diremos que tiene dimensión infinita.
Convendremos en que $\dim\phi = -1$.

Ejemplos:

i) Un espacio de dimensión cero será aquel que tenga una base de dimensión cero, es decir una base que sea de Boole. Los cerrados de una tal base tendrían complementario cerrado, luego serán también abiertos. En particular, un espacio de dimensión cero ha de ser totalmente inconexo.

Son espacios de dimensión cero:

a) Todo espacio discreto.

b) El conjunto de números irracionales con la topología inducida por $\mathbb{R}$.

c) Todo espacio regular de cardinal numerable, y por tanto metrizable. Por ejemplo $\mathbb{Q}$ y los espacios X_n del ejemplo 1 del apartado anterior.

ii) La recta real $\mathbb{R}$ tiene dimensión 1 pues, como se vió, tiene una base de dimensión 1 y no puede ser de dimensión cero ya que es conexa.

<u>Proposición</u> (Compatibilidad con especializaciones): Si X es un espacio de dimensión finita, cualquier subespacio $Y \subset X$ también lo es y se tiene $\dim Y \leqslant \dim X$.

<u>Demostración</u>: Sea B una base de X tal que $\dim X = \dim B$. La topología $B_Y = \{b \cap Y, b \varepsilon B\}$ es una base del subespacio Y y la aplicación $b \longmapsto b \cap Y$ es un homomorfismo <u>epiyectivo</u> de B en B_Y , luego $\dim B_Y \leqslant \dim B$, con lo que se concluye. **

<u>Proposición</u>: Sea B una topología. La dimensión de $\operatorname{Esp} B$ es igual a la dimensión de Krull de B .

<u>Demostración:</u> Sean B' cualquier base de $\operatorname{Esp} B$ y $\operatorname{Esp} B \hookrightarrow \operatorname{Esp} B'$ la inyección correspondiente. Se sigue que $\dim B \leqslant \dim B'$ y como, por otra parte, B es una base de $\operatorname{Esp} B$, no hay más que decir. **

Corolario: Si c es un cerrado de $\operatorname{Esp} B$, la dimensión de c es igual al máximo de las longitudes de cadenas formadas con puntos de c.

Demostración: Sea $c = (q)_0$; teniendo en cuenta que $(q)_0 = \operatorname{Esp} B/q$, se concluye por la proposición anterior. **

Teorema del producto: Si B y B' son topologías cualesquiera se verifica:

$$\dim(\operatorname{Esp} B \times \operatorname{Esp} B') = \dim \operatorname{Esp} B + \dim \operatorname{Esp} B'$$

Demostración: Si B ó B' tienen dimensión infinita, es inmediato que ambos miembros de la igualdad serán infinitos; supongamos, pues, que B y B' son de dimensión finita.

Dado que $\operatorname{Esp} B \times \operatorname{Esp} B' = \operatorname{Esp} B \otimes B'$, hemos de probar que $\dim B \otimes B' = \dim B + \dim B'$. Todo ideal primo $\bar{p}$ de $B \otimes B'$ es de la forma $p \otimes p'$, siendo $p = \bar{p} \cap B$ y $p' = \bar{p} \cap B'$, luego una inclusión $\bar{p}_1 \subset \bar{p}_2$ equivale a las inclusiones $p_1 \subset p_2$, $p'_1 \subset p'_2$; así pues, dada una cadena de ideales primos de $B \otimes B'$, $\bar{p}_0 \subset \bar{p}_1 \subset \ldots \subset \bar{p}_k$, si para algún índice i se tiene $p_i = p_{i+1}$ la inclusión $p'_i \subset p'_{i+1}$ habrá de ser estricta, por tanto $\dim B \otimes B' \leqslant \dim B + \dim B'$. Por otra parte, tomando cadenas de longitud máxima en B y B', $p_0 \subset p_1 \subset \ldots \subset p_n$ y $p'_0 \subset p'_1 \subset \ldots \subset p'_{n'}$, se obtiene una cadena en $B \otimes B'$,

$p_0 \otimes p'_0 \subset \ldots \subset p_n \otimes p'_0 \subset p_n \otimes p'_1 \subset \ldots \subset p_n \otimes p'_n$, de longitud $n + n'$; de todo ello se sigue lo que queríamos probar. **

Corolario: Si X y X' son espacios de dimensión finita, el producto $X \times X'$ también es de dimensión finita y se verifica la acotación

$$\dim X \times X' \leqslant \dim X + \dim X'$$

Demostración: Sean B y B' bases tales que $\dim B = \dim X$ y $\dim B' = \dim X'$. De las inclusiones $X \hookrightarrow \operatorname{Esp} B$ y $X' \hookrightarrow \operatorname{Esp} B'$ se deduce otra $X \times X' \hookrightarrow \operatorname{Esp} B \times \operatorname{Esp} B'$, luego se concluye por el teorema del producto y la compatibilidad con especializaciones. **

Proposición (Teorema de la frontera): Si B es una base n-dimensional de un espacio X , la frontera de todo cerrado b de la base es un espacio de dimensión $\leqslant n-1$.

Demostración: La frontera de b , en la inmersión $X \longrightarrow \operatorname{Esp} B$, se sumerge en la frontera del cerrado $(b)_0$, luego bastará probar que con los puntos de esta frontera no pueden formarse cadenas de longitud mayor que $n-1$ y ello es consecuencia de que en la misma no hay puntos minimales de $\operatorname{Esp} B$; en efecto, los puntos minimales de $\mathrm{Esp}\,B$, que pertenecen al cerrado $(b)_0$, son interiores al mismo, pues si $x\in\mathrm{Esp}\,B$ es minimal y $x\in(b)_0$, $\frac{b}{1}=0$ en la localidad $B_{p_x}=\{0,1\}$. **

Dimensión en los espacios noetherianos.

Un espacio topológico es noetheriano si toda sucesión decreciente de cerrados, $c_0\supset c_1\supset c_2\supset\ldots$, estaciona, es decir para algún n_0, c_{n_0} es igual a los siguientes.

Proposición: Un espacio topológico es noetheriano si y solo si su topología es principal.

Demostración: Basta observar que un ideal de cerrados es principal precísamente si en el mismo hay un cerrado contenido en todos los demás, que será el generador. **

Proposición: Un espacio noetheriano solo tiene un base, la topología completa.

Demostración: En un espacio noetheriano la intersección de una familia de cerrados es igual a la intersección de una subfamilia finita, de lo que se sigue inmediatamente la proposición. **

Corolario: La dimensión de un espacio noetheriano es igual a la dimensión de Krull de su topología.

Un cerrado c de un espacio topológico X es irreducible si lo es en sentido aritmético, esto es $c = a \cdot b \Rightarrow c = a$ ó $c = b$.

Proposición: Un ideal principal de una topología es primo si y solo si su generador es irreducible.

Demostración: Sea $q = (c)$ un ideal principal y supongamos que c es irreducible. Si $a \cdot b \varepsilon q$ se tendrá $a \cdot b = a \cdot b \cdot c$, de donde $c = (c+a) \cdot (c+b)$, luego $c = c+a$ ó $c = c+b$. Sea $c = c+a$; entonces $a \cdot c = a(c+a) = ac + a = a$, luego $a \varepsilon q$.
Recíprocamente, si q es primo y $c = a \cdot b$, se tendrá $a \varepsilon q$ ó $b \varepsilon q$. Sea $a \varepsilon q$, entonces $a = a \cdot c$, de donde $a = a \cdot c = a(a \cdot b) = ab = c$. **

Corolario: La dimensión de un espacio noetheriano es el máximo de las longitudes de las cadenas decrecientes de cerrados irreducibles. (Definición de "dimensión combinatoria" según A. Grothendieck, ver E.G.A. IV, 4.1., pág. 102).

Corolario: La dimensión del espacio topológico subyacente a una variedad algebraica sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, dotado con la topología de Zariski, coincide con la dimensión "algebraica" de la misma (= grado de transcendencia sobre k de su cuerpo de funciones).

3. Dimensión y cohomología.

En este apartado veremos que la dimensión de un espacio limita su cohomología con valores en cualquier haz de grupos abelianos. Empezaremos estudiando la cohomología de un haz F sobre $X = \operatorname{Esp} B$, para, en el caso de un espacio cualquiera, relacionar su cohomología con valores en un haz con la cohomología del "prolongamiento" de dicho haz a un conveniente $\operatorname{Esp} B$.

Proposición: Sea B una topología cualquiera. Un haz F sobre $X = \operatorname{Esp} B$ que sea flasco sobre los abiertos U_a, $a \varepsilon B$ (es decir, que los homomorfismos de restricción $F(X) \longrightarrow F(U_a)$ sean epiyectivos), es acíclico, esto es $H^i(X,F) = 0$ para $i > 0$.

Demostración: Sea $G^{\bullet}(F) = \{G^i(F)\}_{i \geq 0}$ la resolución de Godement del haz F. El enunciado resultará, si probamos que, para todo abierto U_a, la sucesión de secciones:

$$0 \longrightarrow F(U_a) \longrightarrow G^0(F)(U_a) \longrightarrow F_1(U_a) \longrightarrow 0$$

es exacta, siendo $F_1 = G^0(F)/F$.
De hecho basta demostrar que $G^0(F)(U_a) \longrightarrow F_1(U_a)$ es epiyectivo y no hay pérdida de generalidad en suponer $X = U_a$. Así pues, dada una sección $s_1 \varepsilon F_1(X)$, puesto que X es compacto, hay un recubrimiento finito $\{U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}\}$ y secciones $s^i \varepsilon \Gamma(U_{a_i}, G^0(F))$ que se

aplican en s_1 ; entonces $s^1 - s^2$ está en el núcleo de $G^0(F)(U_{a_1} \cap U_{a_2}) \longrightarrow F_1(U_{a_1} \cap U_{a_2})$ que es precísamente $F(U_{a_1} \cap U_{a_2})$. En virtud de las hipótesis sobre F , dado que $U_{a_1} \cap U_{a_2} = U_{a_1 \cdot a_2}$, habrá una sección global σ_{12} de F cuya restricción a $U_{a_1} \cap U_{a_2}$ coincide con $s^1 - s^2$; por tanto $s^2 + \sigma_{12}$, que sigue aplicándose en s_1 , ahora coincide con s^1 sobre $U_{a_1} \cap U_{a_2}$; en consecuencia existe una sección s_{12} de $G^0(F)$ sobre la reunión $U_{a_1} \cup U_{a_2}$, que se aplica en s_1 . Ahora bien, $U_{a_1} \cup U_{a_2} = U_{a_1 + a_2}$, luego podemos repetir el argumento anterior a $U_{a_1} \cup U_{a_2}$ y U_{a_3} , y así sucesivamente hasta obtener una sección global s de $G^0(F)$ que se aplique en s_1 , con lo que se acaba la demostración.**

<u>Lema</u>: Sea c un cerrado de U_a . Un punto de $X = \mathrm{Esp}\, B$ es adherente a c si y solo si lo es a un punto $y \varepsilon c$, en otras palabras: $\bar{c} = \bigcup_{y \varepsilon c} \bar{y}$.

<u>Demostración</u>: Podemos suponer $c = U_a$, pues, en general, será $c = U_a \cap (q)_0$, luego $\bar{c} \subset (q)_0 = \mathrm{Esp}\, B/q$ y, pasando a B/q , se tendrá $c = U_a$. Entonces, dado $x \varepsilon \bar{U}_a$, como x no es interior al cerrado $(a)_0$, $\frac{a}{1}$ no puede ser cero en la localidad B_{p_x} ; por tanto habrá algún ideal primo $p \subset B_{p_x}$ tal que $\frac{a}{1} \not\subset p$, es decir un punto $y \varepsilon X$ tal que: a) $x \varepsilon \bar{y}$, b) $y \varepsilon U_a$. **

Complejo de Cousin.

En todo lo que sigue B será una topología n-dimensional. Dado un punto $x \in \mathrm{Esp}\,B$ llamaremos dimensión de x a la dimensión de su cierre $\bar{x}$ (= dimensión de Krull de B/p_x) y codimensión de x a la dimensión de Krull de B_{p_x}.

Dado un haz F sobre $\mathrm{Esp}\,B$, llamaremos codimensión del soporte de F al mínimo de las codimensiones de los puntos en los que F tiene fibra no nula. Denotaremos por X^i, coesqueleto i-ésimo, al subespacio de $X = \mathrm{Esp}\,B$ formado por los puntos de codimensión $\leqslant i$.

Teorema: Sea F un haz de grupos abelianos sobre $X = \mathrm{Esp}\,B$. Si la codimensión del soporte de F es i y $\lambda : X^i \hookrightarrow X$ es la inclusión canónica, el haz $C^0(F) = \lambda_* \lambda^* F$ es acíclico y se tiene un morfismo natural $F \longrightarrow C^0(F)$ que es un isomorfismo en los puntos de X^i.

Demostración: Sólo hay que probar que $C^0(F)$ es acíclico, ello es consecuencia, en virtud del primero de los lemas anteriores, de que λ^*F es flasco sobre los abiertos $U_a^i = U_a \cap X^i$. En efecto, dada una sección $s \in \Gamma(U_a^i, \lambda^*F)$, el soporte $|s|$ es cerrado en X^i, en virtud del segundo lema, pues los puntos donde λ^*F tiene fibra no nula son cerrados en X^i, luego s

puede extenderse por cero fuera de U_a^i sin dejar de ser continua. **

Teorema : Todo haz F de grupos abelianos sobre $X = \mathrm{Esp}\,B$ tiene canónicamente asociado un complejo de haces acíclicos, $C^{\bullet}(F) = \{C^j(F)\}_{j \geq 0}$, el complejo de Cousin de F , que verifica:

a) Si la codimensión del soporte de F es i , la codimensión del soporte de $C^j(F)$ es $\geq j+i$. En particular, $C^j(F) = 0$ si $j > n-i$.

b) Existe una aumentación $\varepsilon : F \longrightarrow C^0(F)$ que es isomorfismo en los puntos de codimensión $\leq i$.

Demostración: El término $C^0(F)$ se obtiene como vimos en el teorema anterior. Si $F_1 = C^0(F)/F$, sea $C^1(F) = C^0(F_1)$, y así sucesivamente. **

Corolario: Cualquiera que sea el haz F sobre $X = \mathrm{Esp}\,B$, se tiene $H^i(X,F) = 0$ para $i > n$, es decir la dimensión cohomológica de $\mathrm{Esp}\,B$ es $\leq n$.

Demostración: De hecho, si la codimensión del soporte de F es k , se verifica $H^i(X,F) = 0$ para $i > n-k$. Si $k = n$, se tiene $F = C^0(F)$, luego $H^i(X,F) = 0$ para $i > 0$. Supongamos ahora el teorema cierto para todos los haces cuyo soporte tenga codimensión $\geq k+1$ y sea F con soporte de codimensión k . El núcleo y el conúcleo de la aumentación $\varepsilon : F \longrightarrow C^0(F)$ tienen soporte de

codimensión $\geqslant k+1$; por tanto, aplicando la hipótesis de inducción a $\operatorname{coker} \varepsilon$, se obtiene de la sucesión exacta $0 \longrightarrow \operatorname{Im} \varepsilon \longrightarrow C^0(F) \longrightarrow \operatorname{coker} \varepsilon \longrightarrow 0$ que $H^i(X, \operatorname{Im} \varepsilon) = 0$ para $i > n-k$, puesto que $C^0(F)$ es acíclico. Teniendo esto en cuenta, resulta de la sucesión
$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \varepsilon \longrightarrow F \longrightarrow \operatorname{Im} \varepsilon \longrightarrow 0$, aplicando la hipótesis de inducción a $\operatorname{Ker} \varepsilon$, que $H^i(X,F) = 0$ para $i > n-k$. **

<u>Corolario</u>: Un espacio noetheriano X de dimensión n tiene dimensión cohomológica $\leqslant n$.

<u>Demostración</u>: Si A es la topología de X, aunque la inyección $X \hookrightarrow \operatorname{Esp} A$ no es un homeomorfismo en general (cuando lo es, X se dice espacio de Zariski), es un isomorfismo entre sus topologías y a un recubrimiento de X le corresponde un recubrimiento de $\operatorname{Esp} A$, luego las categorías de haces sobre X o sobre $\operatorname{Esp} A$ son indistinguibles; por tanto, a nivel cohomológico podemos suponer $X = \operatorname{Esp} A$ y aplicando lo anterior se concluye.**

<u>Acotación cohomológica en espacios compactos.</u>

<u>Teorema del retracto continuo</u>: Si X es un espacio <u>compacto y separado</u>, cualquiera que sea la base B de X la inyección $\lambda: X \hookrightarrow \operatorname{Esp} B$ admite un retracto continuo $\rho: \operatorname{Esp} B \longrightarrow X$.

Demostración: Un ideal primo $p \subset B$ es una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita, luego $\bigcap_{c\in p} c \neq \emptyset$. Además, por estar en un espacio separado, la intersección $\bigcap_{c\in p} c$ sólo puede contener un punto. En efecto, sea c un cerrado de p y sean x, x' dos puntos distintos de dicho cerrado; por definición de espacio separado, c se puede expresar como el producto (unión) de otros dos cerrados d y d' de B , tales que $x \notin d$ y $x' \notin d'$; ahora bien, p es primo, luego ha de contener a d ó a d' , con lo cual ó bien $x \notin \bigcap_{c\in p} c$ ó bien $x' \notin \bigcap_{c\in p} c$. En conclusión, la intersección de los cerrados de p contiene un punto unicamente, luego se puede definir $\rho(p) = \bigcap_{c\in p} c$.
Para probar que ρ es continua bastará con ver que $\rho^{-1}(b)$ es cerrado en $\operatorname{Esp} B$, para los cerrados $b \in B$. En efecto, si q_b es el ideal formado por los cerrados de B que son entornos de b , resulta que $\rho^{-1}(b) = (q_b)_0$, usando que X es un espacio normal. **

Corolario: Sean X un espacio compacto y separado, B una base de X y $\lambda : X \hookrightarrow \operatorname{Esp} B$ como antes. Para todo haz F sobre X , se tienen isomorfismos $H^i(X,F) \xrightarrow{\sim} H^i(\operatorname{Esp} B, \lambda_* F)$ para $i \geq 0$.

Demostración: Sea $\rho : \operatorname{Esp} B \longrightarrow X$ el retracto continuo. Dada una resolución inyectiva de $\lambda_* F$, $\lambda_* F \longrightarrow I^\bullet$, $\rho_* I^\bullet$ será una resolución inyectiva de $\rho_*(\lambda_* F) = F$, y como $\Gamma(\rho_* I^\bullet) = \Gamma(I^\bullet)$, se concluye. **

<u>Teorema</u>: Un espacio X compacto y separado de dimensión n tiene dimensión cohomológica $\leqslant n$.

<u>Demostración</u>: Sea B una base n-dimensional de X; en virtud del corolario anterior podemos suponer $X = \text{Esp}\, B$, con lo que se concluye. **

<u>Corolario</u>: Si X es un espacio localmente compacto y separado de dimensión n, su dimensión cohomológica "con soportes compactos" es $\leqslant n$.

<u>Demostración</u>: Dado un haz F sobre X y dado un compacto $K \subset X$, sea F_K el haz sobre X obtenido al suspender F sobre K y luego prolongar por cero fuera de K. Es claro que $F = \varinjlim F_K$, por tanto

$$H_c^i(X,F) = \varinjlim H_c^i(X,F_K) = \varinjlim H^i(K,F_K)$$

luego para $i > n$ se tiene $H_c^i(X,F) = 0$, aplicando el teorema anterior. **

<u>Corolario</u>: Si X es un espacio localmente compacto y paracompacto de dimensión n, su dimensión cohomológica es $\leqslant n$.

<u>Demostración</u>: En los espacios paracompactos la dimensión cohomológica tiene carácter local (ver [5], th. 4.14.1., pág. 196), luego se concluye aplicando el

teorema anterior. **

Dimensión de los espacios euclídeos.

Sabemos ya que la recta real $\mathbb{R}$ tiene dimensión 1, luego aplicando el teorema del producto se obtiene la acotación $\dim \mathbb{R}^n \leqslant n$, cualquiera que sea n; de hecho se da la igualdad como probaremos a continuación.

Teorema: El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n.

Demostración: Bastará probar que $\dim \mathbb{R}^n \geqslant n$, lo cual resultará, en virtud de la acotación cohomológica, si sobre $\mathbb{R}^n$ se encuentra un haz F tal que $H_c^n(\mathbb{R}^n, F) \neq 0$. En efecto, si U es la bola unidad abierta de $\mathbb{R}^n$, cuya frontera es la esfera S^{n-1}, de la sucesión exacta de haces sobre $\mathbb{R}^n$, $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{S^{n-1}} \longrightarrow 0$ se deduce que $H_c^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}_U) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}_U) = H^{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, (suponemos $n \geqslant 2$, pues para $n = 1$ ya está probado el teorema). **

4. Relación con las dimensiones clásicas.

El objetivo primordial de este capítulo es probar que la teoría de la dimensión de espacios metrizables y separables, cuya referencia fundamental es el libro de Hurewicz y Wallman, es un caso particular de nuestra teoría general. Empezaremos recordando los dos conceptos básicos de la teoría clásica de la dimensión:

a) La dimensión inductiva de un espacio X es el entero $\operatorname{ind} X \geq -1$, caracterizado por las propiedades:

1ª) $\operatorname{ind} X = -1$ si y solo si $X = \emptyset$.

2ª) $\operatorname{ind} X \leq n$ si y solo si existe una base de abiertos $\{U_j\}_{j \in J}$, cuyas fronteras $\{F(U_j)\}$ verifican $\operatorname{ind} F(U_j) \leq n-1$.

b) La dimensión de recubrimiento de X, $\operatorname{dr} X$, es el menor de los enteros $\{n\}$ con la propiedad de que todo recubrimiento abierto finito admite un refinamiento, también finito, del cual $n+2$ abiertos no se cortan.

Observación: En la definición a) se puede sustituir base de abiertos por base de cerrados, dado que tomando complementarios de los abiertos de una base se obtiene una base de cerrados con las mismas fronteras.

Teorema: Para todo espacio X se verifica la acotación $\operatorname{ind} X \leq \dim X$.

Demostración: Basta aplicar el teorema de la frontera probado en el capítulo 2, teniendo en cuenta la observación anterior. **

Teorema: Si X es un espacio regular y de base numerable, es decir metrizable y separable, se verifica $\operatorname{dr} X \leqslant \operatorname{ind} X$.

Demostración: Ver [1], pág. 54, teorema V1. **

Como anunciamos al principio del capítulo se trata de probar el siguiente:

Teorema fundamental: Para todo espacio metrizable y separable X se verifica $\dim X = \operatorname{dr} X = \operatorname{ind} X$.

La demostración de este teorema quedará completa, en virtud de los teoremas anteriores, si probamos la acotación $\dim X \leqslant \operatorname{dr} X$; ésto resultará como consecuencia de los profundos teoremas de inmersión y existencia del espacio n-dimensional universal de Hurewicz.

En lo que sigue, salvo que se indique lo contrario, todo espacio se supondrá metrizable y separable.

El espacio n-dimensional universal X_n.

Dado un entero $n \geqslant 0$, sea I el cubo unidad de $\mathbb{R}^{2n+1}$ y X_n el subespacio de I formado por los puntos con n, o menos, coordenadas racionales.

El espacio X_n se dice que es un espacio n-dimensional universal, en virtud del siguiente teorema:

Teorema: Todo espacio X tal que $\mathrm{dr}\, X \leq n$ se sumerge en X_n, es decir hay una inyección continua $X \hookrightarrow X_n$ que es un homeomorfismo de X con su imagen.

Demostración: Ver [1], pág. 65, teorema V5. **

Estudiemos la dimensión (en nuestro sentido) de X_n.
En el cubo unidad $I \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ elijamos la base B engendrada por los semiespacios cerrados de ecuación $x_i \leq \alpha$ ó $x_i \geq \alpha$, para $i = 1,2,\ldots,n+1$ y α un número racional arbitrario.
La aplicación natural $j: I \hookrightarrow \mathrm{Esp}\, B$ identifica a I con $\mathrm{Esp}_M B$, es decir el subespacio de puntos cerrados de $\mathrm{Esp}\, B$; esto no es más que traducir el hecho de que I es compacto y separado. Para completar una descripción de $\mathrm{Esp}\, B$ bastará estudiar las localidades B_{p_x} para cada $x \in I$. En este sentido obtendremos que la dimensión de Krull de B_{p_x} coincide con el número de coordenadas racionales del punto x.
En primer lugar observemos que B_{p_x} es una topología finita, pues sólo un número finito de semiespacios $x_i \leq \alpha$ ó $x_i \geq \alpha$ contienen a x en su frontera, mientras que los que le contienen en su interior todos dan germen 0 en B_{p_x}. Así pues, los ideales primos de B_{p_x} se corresponden con los

gérmenes irreducibles; éstos son, precisamente, los gérmenes de cerrados del tipo $x_i = \alpha_i$ para cierto número de coordenadas y $x_i \geqslant \alpha_i$ ó $x_i \leqslant \alpha_i$ para otras, que, además, contienen al punto x en su frontera, es decir que las α_i sean las coordenadas correspondientes del punto x. Dos de tales gérmenes sólo pueden "contenerse" estrictamente si son de dimensiones diferentes. Si las coordenadas racionales del punto x son $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$, el germen irreducible mínimo de B_{p_x}, generador del ideal maximal, será el de ecuación $x_{i_1} = \alpha_{i_1}, \ldots, x_{i_k} = \alpha_{i_k}$, mientras que los maximales, es decir los generadores de los ideales minimales, son los gérmenes definidos por k desigualdades $x_{i_j} \leqslant \alpha_{i_j}$ ó $x_{i_j} \geqslant \alpha_{i_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$; puesto que aquél tiene dimensión $(2n+1) - k$ y éstos $2n+1$, resulta que la dimensión de B_{p_x} es exactamente k = número de coordenadas racionales de x, como habíamos anunciado.

Sea ahora $S \subset B$ el sistema multiplicativo engendrado por los cerrados del tipo $x_{i_1} = \alpha_{i_1}, \ldots, x_{i_m} = \alpha_{i_m}$, $m \geqslant n+1$, y denotamos por $\bar{B}$ la localización de B por el sistema S. En dicha localización desaparecen los puntos de $\operatorname{Esp} B$ de codimensión $m \geqslant n+1$, puesto que contienen elementos del sistema S, luego la dimensión de $\bar{B}$ es exactamente n.

Por último observemos que los cerrados de B especializados a X_n forman una base de cerrados de éste, y que en dicha especialización los cerrados del sistema S van al 1; en consecuencia se obtiene una base B' en X_n que es imagen homomorfa de B y de $\bar{B}$, luego se tiene $\dim B' \leqslant \dim \bar{B} = n$, con lo que se concluye lo siguiente

Teorema: La dimensión de X_n es $\leqslant n$.

Demostración del teorema fundamental: Ya disponíamos de las acotaciones $\dim X \geqslant \operatorname{ind} X \geqslant \operatorname{dr} X$; bastará, pues, probar que $\operatorname{dr} X \geqslant \dim X$. En efecto, si $\operatorname{dr} X = n$, existe una inmersión $X \hookrightarrow X_n$, luego se verifica $\dim X \leqslant \dim X_n$; dado que $\dim X_n \leqslant n$ se concluye. **

Corolario: Todo espacio X se sumerge en un espacio compacto de la misma dimensión.

Demostración: Esto es sabido para la dimensión inductiva [1], pág. 65, teorema V6. **

Corolario: La dimensión de un espacio metrizable y separable acota su dimensión cohomológica.

Demostración: Teniendo en cuenta el corolario anterior y el hecho de que en espacios métricos la dimensión cohomológica es compatible con especializaciones (ver [5], th. 4.14.2), se puede suponer que el espacio es compacto, en cuyo caso ya hemos probado que la dimensión topológica acota a la cohomológica. **

Proposición: Si un espacio X es suma disjunta de una fami lia de subespacios cerrados $\{F_i\}_{i\in I}$, y hay un número n tal que $\dim F_i \leqslant n$ para toda i, entonces $\dim X \leqslant n$.

Demostración: Sea B_i una base de F_i tal que $\dim B_i = \dim F_i$. Denotemos por B la base de X formada por los cerrados de cada B_i, los complementarios de cada F_i y las uniones e intersecciones finitas de todos ellos. Si p es un ideal maximal de B puede ocurrir que contenga algún cerrado F_i o que no; discutamos las dos posibilidades empezando por la segunda:

a) Un ideal primo que no contenga a ningún F_i solo puede existir si la familia $\{F_i\}_{i\in I}$ es infinita. En este caso, siendo p maximal, habrá de estar engendrado por los complementarios de cada uno de los F_i; por tanto, se tendrá $B_p = \{0,1\}$, ya que al localizar por p se anulan los complementarios de los F_i.

b) Si p contiene algún F_i, para estudiar la localidad B_p podemos localizar previamente por el cerrado complementario de F_i. La localización de B por dicho cerrado es isomorfa a B_i, luego B_p es isomorfa a una localidad de B_i; por tanto, B_p es de dimensión $\leqslant n$. **

Corolario: Una variedad topológica paracompacta n-dimensional tiene dimensión topológica n.

Demostración: Toda variedad paracompacta es reunión disjunta de subvariedades abiertas de base numerable, cada una de las cuales es un espacio metrizable y separable de dimensión inductiva n , como es bien conocido. **

BIBLIOGRAFIA

[1] W. Hurewicz - H. Wallman. "Dimension theory". Princeton Univ. Press.

[2] J. Nagata. "Modern dimension theory". Noordhott. Groningen.

[3] K. Nagami. "Dimension theory". Academic Press.

[4] A. Grothendieck - J. Dieudonne. "Elements Geometrie Algebrique".

[5] R. Godement. "Topologie algebrique et theorie des faisceaux". Hermann. Paris.

[6] A. López Villacampa. Tesis. Publicacions de la Secció de Matemátiques, Universitat Autónoma de Barcelona.

FUNDACION JUAN MARCH
SERIE UNIVERSITARIA

TITULOS PUBLICADOS

Serie Marrón

(Filosofía, Teología, Historia, Artes Plásticas, Música, Literatura y Filología)

1 Fierro, A.:
Semántica del lenguaje religioso.

10 Torres Monreal, F.:
El teatro español en Francia (1935-1973).

12 Curto Herrero, F. Fco.:
Los libros españoles de caballerías en el siglo XVI.

14 Valle Rodríguez, C. del:
La obra gramatical de Abraham Ibnᶜ Ezra.

16 Solís Santos, C.:
El significado teórico de los términos descriptivos.

18 García Montalvo, P.:
La imaginación natural (estudios sobre la literatura fantástica norteamericana).

21 Durán-Lóriga, M.:
El hombre y el diseño industrial.

32 Acosta Méndez, E.:
Estudios sobre la moral de Epicuro y el Aristóteles esotérico.

40 Estefanía Alvarez, M.ª del D. N.:
Estructuras de la épica latina.

53 Herrera Hernández, M.ª T.:
Compendio de la salud humana de Johannes de Ketham.

54 Flaquer Montequi, R.:
Breve introducción a la historia del Señorío de Buitrago.

60 Alcalá Galvé, A.:
El sistema de Servet.

61 Mourão-Ferreira, D., y Ferreira, V.:
Dos estudios sobre literatura portuguesa contemporánea.

62 Manzano Arjona, M.ª:
Sistemas intermedios.

67 Acero Fernández, J. J.:
La teoría de los juegos semánticos. Una presentación.

68 Ortega López, M.:
El problema de la tierra en el expediente de Ley Agraria.

70 Martín Zorraquino, M.ª A.:
Construcciones pronominales anómalas.

71 Fernández Bastarreche, F.:
Sociología del ejército español en el siglo XIX.

72 García Casanova, J. F.:
La filosofía hegeliana en la España del siglo XIX.

73 Meya Llopart, M.:
Procesamiento de datos lingüísticos. Modelo de traducción automática del español al alemán.

75 Artola Gallego, M.:
El modelo constitucional español del siglo XIX.

77 Almagro-Gorbea, M., y otros:
C-14 y Prehistoria de la Península ibérica.

94 Falcón Márquez, T.:
La Catedral de Sevilla.

98 Vega Cernuda, S. D.:
J. S. Bach y los sistemas contrapuntísticos.

100 Alonso Tapia, J.:
El desorden formal de pensamiento en la esquizofrenia.

102 Puentes Florido, F.:
Rafael Cansinos Assens (novelista, poeta, crítico, ensayista y traductor).

Serie Verde

(Matemáticas, Física, Química, Biología, Medicina)

2 Mulet, A.:
Calculador en una operación de rectificación discontinua.

4 Santiuste, J. M.:
Combustión de compuestos oxigenados.

5 Vicent López, J. L.:
Películas ferromagnéticas a baja temperatura.

7 Salvá Lacombe, J. A.:
Mantenimiento del hígado dador in vitro en cirugía experimental.

8 Plá Carrera, J.:
Estructuras algebraicas de los sistemas lógicos deductivos.

11 Drake Moyano, J. M.:
Simulación electrónica del aparato vestibular.

19 Purroy Unanua, A.:
Estudios sobre la hormona Natriurética.

20 Serrano Molina, J. S.:
Análisis de acciones miocárdicas de bloqueantes Beta-adrenérgicos.

22 Pascual Acosta, A.:
Algunos tópicos sobre teoría de la información.

25 I Semana de Biología:
Neurobiología.

26 I Semana de Biología:
Genética.

27 I Semana de Biología:
Genética.

28 Zugasti Arbizu, V.:
Analizador diferencial digital para control en tiempo real.

29 Alonso, J. A.:
Transferencia de carga en aleaciones binarias.

30 Sebastián Franco, J. L.:
Estabilidad de osciladores no sinusoidales en el rango de microondas.

39 Blasco Olcina, J. L.:
Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos.

44 Sánchez Rodríguez, L.:
Estudio de mutantes de saccharomyces cerevisiae.

45 Acha Catalina, J. I.:
Sistema automático para la exploración del campo visual.

47 García-Sancho Martín, F. J.:
Uso del ácido salicílico para la medida del pH intracelular.

48 García García, A.:
Relación entre iones calcio, fármacos ionóforos y liberación de noradrenalina.

49 Trillas, E., y Alsina, C.:
Introducción a los espacios métricos generalizados.

50 Pando Ramos, E.:
Síntesis de antibióticos aminoglicosídicos modificados.

51 Orozco, F., y López-Fanjul, C.:
Utilización óptima de las diferencias genéticas entre razas en la mejora.

52 Gallego Fernández, A.:
Adaptación visual.

55 Castellet Solanas, M.:
Una contribución al estudio de las teorías de cohomología generalizadas.

56 Sánchez Lazo, P.:
Fructosa 1,6 Bisfosfatasa de hígado de conejo: modificación por proteasas lisosomales.

57 Carrasco Llamas, L.:
Estudios sobre la expresión genética de virus animales.

59 Afonso Rodríguez, C. N.:
Efectos magneto-ópticos de simetría par en metales ferromagnéticos.

63 Vidal Costa, F.:
A la escucha de los sonidos cerca de $T\lambda$ en el 4_{He} líquido.

65 Andréu Morales, J. M.:
Una proteína asociada a membrana y sus subunidades.

66 Blázquez Fernández, E.:
Desarrollo ontogénico de los receptores de membrana para insulina y glucagón.

69 Vallejo Vicente, M.:
Razas vacunas autóctonas en vías de extinción.

76 Martín Pérez, R. C.:
Estudio de la susceptibilidad magnetoeléctrica en el Cr_2O_3 policristalino.

80 Guerra Suárez, M.ª D.:
Reacción de Amidas con compuestos organoalumínicos.

82 Lamas de León, L.:
Mecanismo de las reacciones de iodación y acoplamiento en el tiroides.

84 Repollés Moliner, J.:
Nitrosación de aminas secundarias como factor de carcinogénesis ambiental.

86 II Semana de Biología:
Flora y fauna acuáticas.

87 II Semana de Biología:
Botánica.

88 II Semana de Biología:
Zoología.

89 II Semana de Biología:
Zoología.

91 Viéitez Martín, J. M.:
Ecología comparada de dos playas de las Rías de Pontevedra y Vigo.

92 Cortijo Mérida, M., y García Blanco, F.:
Estudios estructurales de la glucógeno fosforilasa b.

93 Aguilar Benítez de Lugo, E.:
Regulación de la secreción de LH y prolactina en cuadros anovulatorios experimentales.

95 Bueno de las Heras, J. L.:
Empleo de polielectrolitos para la floculación de suspensiones de partículas de carbón.

96 Núñez Alvarez, C., y Ballester Pérez, A.:
Lixiviación del cinabrio mediante el empleo de agentes complejantes.

101 Fernández de Heredia, C.:
Regulación de la expresión genética a nivel de transcripción durante la diferenciación de Artemia salina.

103 Guix Pericas, M.:
Estudio morfométrico, óptico y ultraestructural de los inmunocitos en la enfermedad celíaca.

105 Llobera i Sande, M.:
Gluconeogénesis «in vivo» en ratas sometidas a distintos estados tiroideos.

106 Usón Finkenzeller, J. M.:
Estudio clásico de las correcciones radiactivas en el átomo de hidrógeno.

Serie Roja

(Geología, Ciencias Agrarias, Ingeniería, Arquitectura y Urbanismo)

3 Velasco, F.:
Skarns en el batolito de Santa Olalla.

6 Alemán Vega, J.:
Flujo inestable de los polímeros fundidos.

9 Fernández-Longoria Pinazo, F.:
El fenómeno de inercia en la renovación de la estructura urbana.

13 Fernández García, M.ª P.:
Estudio geomorfológico del Macizo Central de Gredos.

15 Ruiz López, F.:
Proyecto de inversión en una empresa de energía eléctrica.

23 Bastarreche Alfaro, M.:
Un modelo simple estático.

24 Martín Sánchez, J. M.:
Moderna teoría de control: método adaptativo-predictivo.

31 Zapata Ferrer, J.:
Estudio de los transistores FET de microondas en puerta común.

33 Ordóñez Delgado, S.:
Las Bauxitas españolas como mena de aluminio.

35 Jouvé de la Barreda, N.:
Obtención de series aneuploides en variedades españolas de trigo común.

36 Alarcón Alvarez, E.:
Efectos dinámicos aleatorios en túneles y obras subterráneas.

38 Lasa Dolhagaray, J. M., y Silván López, A.:
Factores que influyen en el espigado de la remolacha azucarera.

41 Sandoval Hernández, F.:
Comunicación por fibras ópticas.

42 Pero-Sanz Elorz, J. A.:
Representación tridimensional de texturas en chapas metálicas del sistema cúbico.

43 Santiago-Alvarez, C.:
Virus de insectos: multiplicación, aislamiento y bioensayo de Baculovirus.

46 Ruiz Altisent, M.:
Propiedades físicas de las variedades de tomate para recolección mecánica.

58 Serradilla Manrique, J. M.:
Crecimiento, eficacia biológica y variabilidad genética en poblaciones de dípteros.

64 Farré Muntaner, J. R.:
Simulación cardiovascular mediante un computador híbrido.

79 Fraga González, B. M.:
Las Giberelinas. Aportaciones al estudio de su ruta biosintética.

81 Yáñez Parareda, G.:
Sobre arquitectura solar.

83 Díez Viejobueno, C.:
La Economía y la Geomatemática en prospección geoquímica.

90 Pernas Galí, F.:
Master en Planificación y Diseño de Servicios Sanitarios.

97 Joyanes Pérez, M.ª G.:
Estudios sobre el valor nutritivo de la proteína del mejillón y de su concentrado proteico.

99 Fernández Escobar, R.:
Factores que afectan a la polinización y cuajado de frutos en olivo (Olea europaea L.).

104 Oriol Marfá i Pagés, J.:
Economía de la producción de flor cortada en la Comarca de el Meresme.

Serie Azul

(Derecho, Economía, Ciencias Sociales, Comunicación Social)

17 Ruiz Bravo, G.:
Modelos econométricos en el enfoque objetivos-instrumentos.

34 Durán López, F.:
Los grupos profesionales en la prestación de trabajo: obreros y empleados.

37 Lázaro Carreter, F., y otros:
Lenguaje en periodismo escrito.

74 Hernández Lafuente, A.:
La Constitución de 1931 y la autonomía regional.

78 Martín Serrano, M., y otros:
Seminario sobre Cultura en Periodismo.

85 Sirera Oliag, M.ª J.:
Las enseñanzas secundarias en el País Valenciano.