La Serie Universitaria de la Fundación Juan March presenta resúmenes, realizados por el propio autor, de algunos estudios e investigaciones llevados a cabo por los becarios de la Fundación y aprobados por los Asesores Secretarios de los distintos Departamentos.

El texto íntegro de las Memorias correspondientes se encuentra en la Biblioteca de la Fundación (Castelló, 77. Madrid-6).

La lista completa de los trabajos aprobados se presenta, en forma de fichas, en los Cuadernos Bibliográficos que publica la Fundación Juan March.

Los trabajos publicados en Serie Universitaria abarcan las siguientes especialidades: Arquitectura y Urbanismo; Artes Plásticas; Biología; Ciencias Agrarias; Ciencias Sociales; Comunicación Social; Derecho; Economía; Filosofía; Física; Geología; Historia; Ingeniería; Literatura y Filología; Matemáticas; Medicina, Farmacia y Veterinaria; Música; Química; Teología. A ellas corresponden los colores de la cubierta.

Edición no venal de 300 ejemplares que se reparte gratuitamente a investigadores, Bibliotecas y Centros especializados de toda España.

Fundación Juan March

143 Técnicas de prolongación analítica en el problema de reconstrucción del objeto en óptica/Manuel Nieto Vesperinas

SERIE UNIVERSITARIA

Fundación Juan March

Manuel Nieto Vesperinas

Técnicas de prolongación analítica en el problema de reconstrucción del objeto en óptica.

143

Fundación Juan March
Serie Universitaria

143

Manuel Nieto Vesperinas

Técnicas de prolongación analítica en el problema de reconstrucción del objeto en óptica.

Fundación Juan March
Castelló, 77. Teléf. 225 44 55
Madrid - 6

Este trabajo fue realizado con una Beca de la Convocatoria de España, 1979, individual.
Departamento de FISICA
Centro de trabajo: Instituto de Optica del C.S.I.C. y Universidad Complutense de Madrid.

Depósito Legal: M - 42090 - 1980
I.S.B.N.: 84 - 7075 - 190 - 5
Impresión: Gráficas Ibérica, Tarragona, 34 - Madrid - 7

Presentamos la solución al problema de reconstrucción del objeto mediante técnicas de prolongación analítica.

La prolongación analítica de la amplitud compleja de la radiación dispersada por el objeto lleva al estudio de sus ceros, que la describen completamente. Esto implica un estudio previo de las propiedades de analiticidad de dicha función en un espacio complejo de cuatro dimensiones.

Se proponen métodos de reconstrucción en una dimensión basados en el estudio de estos ceros y en las características principales de analiticidad de la función de onda. Estos conducen a una interpretación del límite de resolución de Rayleigh que permite la extrapolación analítica de los datos más allá de la región accesible a la medida, permitiendo superresolución.

La distribución estadística de los ceros para dispersores aleatorios se estudia mediante un modelo de scattering múltiple y una evaluación del contraste de speckle.

Finalmente se estudian las posibles extensiones del tratamiento unidimensional a la reconstrucción de objetos bi y tridimensionales.

INDICE

1. Introducción

El proceso de dispersión (scattering) de radiación electromagnética o de Broglie constituye uno de los métodos más eficaces y comúnmente empleados para obtener información sobre la estructura de un sistema físico. En principio, la radiación dispersada por un material contiene toda la información, a escala de su longitud de onda, sobre la constitución de éste. El problema fundamental consiste entonces en la detección de esta radiación dispersada extrayendo la mayor cantidad de información posible.

Actualmente existen en Optica dos cuestiones fundamentales que forman lo que se conoce cómo "scattering inverso" éstas son: el problema de la fase y el problema de resolución.

El problema de la fase implica la determinación de la distribución espacial de la amplitud compleja de la radiación dispersada; esto requiere la representación de la función de onda a partir de datos discretos. A frecuencias ópticas esto requiere que la información de la fase sea posible o determinable. La fase es muy importante pues proporciona la estructura local del objeto (o potencial) dispersor. Una vez que la fase ha sido determinada todavía quedan dos pasos a seguir. El primero consiste en la inversión de la integral de scattering, de acuerdo con las condiciones límites del problema, con el fin de obtener la onda del objeto (1), este problema ha sido extensamente estudiado por Devaney y Wolf (2), y puede encontrarse un extenso informe sobre su estado actual en (3). La onda del objeto es la encodificación de la radiación incidente en el interior del medio dispersor. En general, la determinación de la estructura del objeto o potencial a partir de la denominada onda del objeto no es un problema trivial, salvo en el caso en que se puede utilizar la primera aproximación de Born. Entonces existe entre ambas una simple relación de proporcionalidad. Cuando existe scattering múltiple y términos de Born de orden superior se requieren; la determinación de los parámetros intensivos del objeto requiere el conocimiento de la radiación incidente. Esto es, de las condiciones iniciales del problema.

El problema de resolución está relacionado con el detalle con que puede reproducirse la función que caracteriza el objeto dispersor. Clásicamente esta resolución ha sido considerada en el mejor de los casos igual a la mitad de la longitud de onda de la radiación empleada (4). Esto debido a la limitada extensión del espacio de medida. Este problema de resolución está intimamente relacionado con el problema de la fase. En realidad, ambos constituyen un único proyecto, esto es, la localización de los ceros de la función de onda dispersada extendida en el plano complejo de su argumento analíticamente (5). Es pues preciso estudiar las propiedades analíticas de la amplitud compleja de la radiación dispersada y las propiedades de la distribución de sus ceros en el plano complejo. De hecho, como se verá más adelante, los ceros juegan un papel informativo análogo al de los puntos de muestreo de Shannon de la teoría de la comunicación (6,7), que aparecen a la frecuencia de Nyquist.

En las secciones siguientes se presentan los resultados obtenidos durante la investigación de estos problemas desde el comienzo de su estudio con la Fundación Juan March.

En la sección 2 se discutirá la relación entre la ecuación de ondas, que describe la propagación del campo dispersado por el medio, y las características de analiticidad de su amplitud compleja. En ella se verá que la integral de Helmholtz-Kirchhoff, que constituye la versión matemática del principio de Huygens, no es otra que una integral de Cauchy generalizada en el plano complejo asociado al plano de propagación y que en este plano la función de onda es una función analítica generalizada,(8).

En la sección 3 se estudiará la analiticidad de la amplitud compleja dispersada y su variación con la propagación desde el objeto hasta la región de detección. Se verá que por el hecho de satisfacer el campo una ecuación elíptica, (la ecuación de ondas de Helmholtz), con las correspondientes condiciones de contorno, la función de onda es una función entera, de orden infinito en principio; de manera que este orden decrece a medida que la onda se propaga hasta que en las regiones de Fresnel y Fraunhofer se queda reducido a la unidad, de manera que la amplitud compleja es en estas regiones una función entera de tipo exponencial.

Las funciones enteras de tipo exponencial vienen completamente caracterizadas por la distribución de sus ceros en el plano complejo. En la sección 4 se presentan los resultados obtenidos relativos al comportamiento de estos ceros y su relevancia en la determinación del objeto.

En la sección 5 se exponen los dos métodos empleados para la determinación de la fase de la amplitud compleja dispersada y la reconstrucción de objetos basada en el estudio de los ceros ; exponiéndose asímismo su influencia en el límite de resolución con que esta reconstrucción se realiza. Este límite se compara con el límite clásico de Rayleigh.

Cuando el objeto dispersor es un medio aleatorio, tal como un medio amorfo o una superficie rugosa, la figura de difracción correspondiente a la radiación dispersada contiene speckle, esta oscilación aleatoria de la intensidad es la manifestación de la existencia de ceros de la función de onda en el plano complejo (9) Es pues de interés conocer con detalle el proceso de scattering en este tipo de medios. Una teoría de scattering simple ha sido ya expuesta anteriormente por Beckmann y Spizzichino en superficies rugosas (10) y por Ross y el presente autor (11,12). Ahora se ha hecho un estudio de superficies rugosas con scattering múltiple tratándose aquellos casos en que el primer orden (la aproximación de Kirchhoff) falla. Estudiándose la estadística del speckle en el marco de esta teoría. Estos resultados se exponen en la sección 6.

Finalmente en las secciones 7 y 8 se presentan los resultados del estudio correspondiente a la extensión a dos dimensiones y tres dimensiones de la reconstrucción de objetos. En la sección 7 se presenta la extensión a dos dimensiones de la transformada de Hilbert logarítmica que relaciona la fase con la amplitud de la función de onda dispersada permitiendo la obtención de la primera en función de la intensidad medida bajo ciertas circunstancias (13). En la sección 8 se presentan los resultados de reconstrucción de objetos a partir de proyecciones unidimensionales, discutiéndose el alcance del método y su significado en los procesos de scattering.

2. Pseudoanaliticidad de la amplitud compleja dispersada

Consideraremos ondas cilíndricas de manera que el problema pueda tratarse en un plano (x,y). La propagación de la onda en este plano está gobernada por la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 E(x,y) + k^2 E(x,y) = 0 \qquad (1)$$

Esta es una ecuación elíptica y puede escribirse en forma del sistema :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x} - \frac{\partial E_2}{\partial y} &= \pm i k E_2 \\ \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial E_2}{\partial x} &= \pm i k E_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Las ecuaciones (2) son ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas para la parte real E_1 y la parte imaginaria E_2 de la función de onda E. cuando el número de ondas k es cero entonces la función $E(z_2), z_2 = x + iy$, es una función analítica y E_1, E_2 y $E(x , y)$ son armónicas, esto es satisfacen la ecuación de Laplace. El sistema (2) se reduce entonces a las conocidas ecuaciones de Cauchy-Riemann para E_1 y E_2.

La función

$$E(z_2) = E_1(x,y) + i E_2(x,y) \tag{3}$$

con E_1 y E_2 tales que satisfacen (2) se denomina una función analítica generalizada (14) o tambien una función pseudoanalítica(15)

Introduciendo los operadores

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial z_2^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^* \equiv \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{4}$$

las ecuaciones (2) se pueden estudiar en el plano complejo z_2=x+i y Mediante (4) las (2) se reducen a :

$$\frac{\partial E}{\partial z_2^*} = \mp \frac{k}{2} E^* \tag{5}$$

Cerca de $z_2 = \infty$ se tiene

$$E(z_2) = O\left(|z_2|^{-1}\right) \tag{6}$$

Sean ahora $\Omega_1(z_2, t)$ y $\Omega_2(z_2, t)$ los núcleos fundamentales, soluciones a :

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_2^*} = \mp \frac{k}{2} \Omega_2^* \tag{7a}$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_2^*} = \mp \frac{k}{2} \Omega_1^* \tag{7b}$$

que satisfacen

$$\Omega_1(z_2,t) = \frac{1}{t-z_2} + O\left(|z_2-t|^{-2/p}\right)$$
$$\Omega_2(z_2,t) = O\left(|z_2-t|^{-2/p}\right) \qquad (8)$$

de modo que :

$$\lim_{z_2\to t} (t-z_2)\left[\Omega_1(z_2,t) + \Omega_2(z_2,t)\right] = 1$$
$$\lim_{z_2\to t} (t-z_2)\left[\Omega_1(z_2,t) - \Omega_1(z_2,t)\right] = 1 \qquad (9)$$

Por medio de estos núcleos cualquier solución a la ecuación (5) puede escribirse por medio de la denominada fórmula de Cauchy generalizada (14):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\Omega_1(z_2,\zeta_2)E(\zeta_2)\,d\zeta_2 - \Omega_2(z_2,\zeta_2)E^*(\zeta_2)\,d\zeta_2^*\right]$$
$$= \begin{cases} E(z_2), & z_2\in D^+ \\ 1/2\,E(z_2), & z_2\in\Gamma \\ 0, & z_2\in D^- \end{cases} \quad , \quad D^- = \mathbb{C} - [D^+\cup\Gamma] \qquad (10)$$

que es la expresión que necesitaremos para obtener la integral de Rayleigh–Sommerfeld en el plano complejo.

Las soluciones de (8) que satisfacen las condiciones (9) y (10) son :

$$\Omega_1(z_2,t) = \pm\pi i\,\frac{k}{2}\,\frac{|t-z_2|}{t-z_2}\,H_1^{(1)(2)}(k|t-z_2|) \qquad (11\ a)$$

$$\Omega_2(z_2,t) = \pm\pi i\,\frac{k}{2}\,H_0^{(1)(2)}(k|t-z_2|) \qquad (11\ b)$$

donde $H_0^{(1)}$ y $H_0^{(2)}$ son las funciones de Hankel primera y segunda de orden cero. Análogamente, $H_1^{(1)}$ y $H_2^{(2)}$ son las funciones de Hankel primera y segunda de orden uno.

Consideremos ahora el contorno formado por el eje real que contiene la línea del objeto difractante y un semicírculo en el semiplano superior cuyo radio se hará infinito. Usaremos la integral (10) con los núcleos centrados en z_2 y la restaremos la integral con los núcleos en el punto complejo conjugado z_2. Esto es análogo al uso de la función de Green de Sommerfeld (16). De acuerdo con esto se tiene :

$$
\begin{aligned}
E(z_2) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\pi i k}{2} \Big[& E(\zeta_2) \frac{|\zeta_2 - z_2|}{\zeta_2 - z_2} H_1^{(1)(2)}(k|\zeta_2 - z_2|)\, d\zeta_2 \\
& - E^*(\zeta_2) H_0^{(1)(2)}(k|\zeta_2 - z_2|)\, d\zeta_2^* \\
& - E(\zeta_2) \frac{|\zeta_2 - z_2^*|}{\zeta_2 - z_2^*} H_1^{(1)(2)}(k|\zeta_2 - z_2^*|)\, d\zeta_2 \\
& + E^*(\zeta_2) H_0^{(1)(2)}(k|\zeta_2 - z_2^*|)\, d\zeta_2^* \Big] \quad , \quad (\zeta_2 = \xi + i\eta_2)
\end{aligned} \tag{12}
$$

Puesto que $|\xi - z_2| = |\xi - z_2^*|$ las H_0 se cancelan entre sí ya que debido a (6) la integral (12) se reduce a la evaluada en el eje real, es decir :

$$
\begin{aligned}
E(z_2) &= \pm \frac{k}{4} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) \left[\frac{|\xi - z_2|}{\xi - z_2} - \frac{|\xi - z_2^*|}{\xi - z_2^*} \right] H_1^{(1)(2)}(k|\xi - z_2|)\, d\xi \\
&= \pm \frac{ik}{2} y_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\xi)}{\sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2}} H_1^{(1)(2)}\left(k\sqrt{(\xi - x)^2 + \eta^2}\right) d\xi
\end{aligned} \tag{13}
$$

La (13) es idéntica a la formulación de Hygens-Fresnel por medio de la fórmula de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld (17). Además la (13) contiene el factor de inclinación

$$
ik \cos(\underline{n}, \underline{\zeta_2} z_2) = ik \frac{y_2}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y_2^2}} \tag{14}
$$

siendo $\underline{n}$ la normal unitaria al eje x y $\underline{\xi_2 z_2}$ el vector $(\xi - x, y_2)$
Además :

$$\pm i \frac{k}{2} \cos(\underline{n}, \underline{\xi_2 z_2}) \; H_1^{\binom{(1)}{(2)}}\left(k\sqrt{(\xi-x)^2 + y_2^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \underline{n}} G(|\underline{\xi}_2 - z_2|)\right]_{\eta_2 = 0} \tag{15}$$

donde $G(|\xi_2 - z_2|)$ es la función de Green de Sommerfeld para ondas cilíndricas:

$$G(|\xi_2 - z_2|) = \pm \pi i \left[H_0^{\binom{(1)}{(2)}}\left(k\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta_2 - y_2)^2}\right) \right.$$

$$\left. - H_0^{\binom{(1)}{(2)}}\left(k\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta_2 - y_2)^2}\right)\right] \tag{16}$$

la cual proporciona la (13) cuando se sustituye en la ecuación de Hemholtz-Kirchhoff:

$$E(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) \left.\frac{\partial G}{\partial \underline{n}}\right|_{\eta_2 = 0} d\xi \tag{17}$$

Ambas representaciones son, pues, equivalentes.

Hemos visto que la amplitud compleja es, pues, una función pseudoanalítica en el plano en que se considera la propagación $z_2 = x + i\,y$. Resta ahora por estudiar su comportamiento en el plano transversal, esto es en el perpendicular al z_2. Este será el objeto de la siguiente sección.

3. Analiticidad de la función de onda de la radiación dispersada.

En la sección anterior hemos visto que el campo dispersado por el objeto satisface la ecuación (1) con condiciones límite apropiadas. Una de ellas es la condición de radiación de Sommerfeld:

$$\lim_{r \to \infty} \left(\frac{\partial E}{\partial r} - ikE \right) = 0 \qquad (18)$$

La otra condición viene dada por el valor de la función de onda en el dispersor, (lo que conlleva el conocimiento de la radiación incidente). Más concretamente, en orden a tener una función continua y diferenciable, pueden darse los valores de E en un círculo circunscrito a los bordes del objeto; la solución a (1) fuera de este círculo se conoce como solución exterior a la ecuación de Helmholtz (1). Dadas las características de esta ecuación dicha solución corresponde a una ecuación elíptica y es por tanto,(cf. Ref.18)una función analítica en toda región finita del plano complejo $z_1 = x + i\tau$. Donde ahora se ha considerado la propagación en el plano (x,y) y τ es un eje normal a este plano . Esta es toda la información que puede obtenerse del análisis de la ecuación de ondas; nada puede decirse en principio respecto al orden y el tipo de esta función entera (cf.Ref.19). Además, nada puede decirse tampoco en cuanto a la analiticidad de E en la región interior al objeto comprendida entre el círculo circunscrito y el círculo inscrito a sus bordes. De hecho es bien sabido (20,-21) que si la solución exterior es analítica y E también lo es en la región entre los dos círculos mencionados, entonces se verifican las condiciones para la validez de la hipótesis de Rayleigh esto es, la prolongación analítica de E a puntos interiores al círculo inscrito a los bordes del objeto. Siendo este un paso importante para la obtención del objeto o potencial dispersor a partir de la onda del objeto una vez que la fase de E ha sido hallada y la ecuación integral del scattering invertida.

Para encontrar el orden y el tipo de la solución exterior E se tiene que recurrir a la integral de Kirchhoff en la versión de Rayleigh-Sommerfeld:

$$E(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V G(\underline{r} - \underline{r}') \, \theta(\underline{r}') E(\underline{r}') d^3\underline{r}' + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G}{\partial \underline{n}} E(\underline{r}') d^2\underline{r}' \qquad (19)$$

Donde la superficie S corresponde al scattering por una superficie y el volumen V al scattering por un objeto que ocupa un cierto volumen. En el primer caso el segundo término puede hacerse desaparecer y en el segundo caso puede anularse el primero. G es la función de Green y $\theta(\underline{r}')$ es la función que define el objeto o potencial. El producto $\theta(\underline{r}') E(\underline{r}')$ es la onda del objeto. Tomemos por ejemplo el caso de dispersión por un volumen; (lo que sigue se podría igualmente aplicar al scattering por una superficie). Tomemos la función de Green para ondas esféricas:

$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{e^{ikR}}{R} \tag{20}$$

donde

$$R = |\underline{r}-\underline{r}'| \tag{21}$$

siendo $\underline{r}'$ un punto genérico del dispersor y $\underline{r}$ el punto de observación. Desarrollemos (21) en una serie:

$$|\underline{r}-\underline{r}'| = r\left[1 + \frac{r'^2 - 2r(\underline{r}\cdot\underline{m})}{2r^2} + \frac{(r'^2-2r(\underline{r}'\cdot\underline{m}))^2}{8r^4} + \frac{(r'^2-2r(\underline{r}'\cdot\underline{m}))^3}{16r^6} + \cdots\right] \quad ; \quad \underline{m} = \frac{1}{r}\underline{r} \tag{22}$$

Sustituyendo (22) en (20) y ésta en la primera integral de (19)se obtiene :

$$E(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \theta(\underline{r}')E(\underline{r}')\frac{1}{r}\exp\left[r\left(1+\frac{r'^2-2r(\underline{r}'\cdot\underline{m})}{2r^2} + \frac{(r'^2-2r(\underline{r}'\cdot\underline{m}))^2}{8r^4} + \frac{(r'^2-2r(\underline{r}'\cdot m))^3}{16r^6} + \cdots\right)\right] \tag{23}$$

A partir de (23) se deduce que :

$$\lim_{r\to\infty} E(r) = O\left[\exp(R_{max}+\varepsilon)^p\right] \tag{24}$$

donde p es el máximo grado del polinomio considerado en la serie (22). El truncamiento de esta serie después del segundo término se conoce cómo aproximación de Fresnel, mientras que cuando se desprecia, dentro de esta aproximación, el término cuadrático en r' se obtiene la aproximación del campo en la región lejana (Fraunhofer). Se deduce de todo esto que cuanto más cerca se considera la onda dispersada del objeto más términos de la serie(22) se han de considerar y por lo tanto mayor es el orden de E. Nada más emerger del objeto, la amplitud compleja extendida en el plano complejo es pues una función entera de orden infinito. A medida que ésta se aleja del objeto su orden va decreciendo según se van despreciando términos de orden superior de la serie (22), hasta que al final, en la región de Fresnel y en la región de Fraunhofer, E se convierte en una función entera de orden uno, esto es de tipo exponencial. La propagación reduce por tanto el orden de la función de onda.

En (24) R_{max} es la máxima dimensión del volumen de scattering, y de acuerdo con esta ecuación (cf. tambien ref. 19) es el tipo de la función E. ε es una cantidad tan pequeña como se quiera.

4. Los ceros del campo dispersado

Se ha visto en la sección anterior que el campo dispersado en la región de Fresnel (o Fraunhofer) es una función entera de tipo exponencial. Escribiremos en esta región E cómo :

$$E(x) = \int_{-a}^{a} f(t)\, e^{i\frac{kt^2}{2d}}\, e^{-ikt x}\, dt \qquad (25)$$

donde, y en lo que sigue, consideraremos una dimensión. Considerando las posibles extensiones a dos y tres dimensiones en las secciones 7 y 8.

La ecuación (25) constituye una transformada finita de Fourier de la onda del objeto:

$$f(t) = O(t)\, E(t)$$

Es bien sabido (22), que una función de clase E (es decir, de tipo exponencial), viene completamente definida por medio de sus ceros en el plano complejo $z_1 = x + i\tau$ en la forma de un producto de Hadamard. Para obtener el objeto o la onda del objeto $f(t)$ es pues preciso determinar los ceros de $E(z_1)$ y luego invertir la integral (25).

El producto de Hadamard es :

$$E(z) = C z^q \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

donde las z_n son las posiciones de los ceros de $E(z_1)$. A partir de ahora denotaremos z_1 simplemente por z entendiendo que nos referimos al plano $x + i\tau$. El exponente q especifica la multiplicidad del cero en el origen. A partir de (25), (26) y (27) se deduce que toda la información sobre $f(t)$ es codificada por estos ceros. A continuación examinaremos la man.ra en que esto se realiza, comenzando por las propiedades generales y asintóticas de las distribuciones de ceros. Por conveniencia solo se ha investigado el espacio de Fraunhofer pero las conclusiones pueden ser facilmente extendidas a la región de Fresnel multiplicando $f(t)$ por $\exp(ikt^2/2d)$. Este último factor no se considerá por tanto en (25) en lo que sigue.

Integrando dos veces por partes la (25) se tiene

$$E(z) = \left[\frac{f(t)\, e^{-ikzt}}{-ikz} \right]_{-a}^{a} + \left[\frac{f'(t)\, e^{-ikzt}}{k^2 z^2} \right]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} \frac{f''(t)\, e^{-ikzt}}{k^2 z^2}\, dt \qquad (28)$$

considerando $f(a)\;,\; f(-a) \neq 0 \quad y \quad |z| \to \infty$

$$E(z) = \frac{f(a)\, e^{-ikza} - f(-a)\, e^{ikza}}{-ikz} \qquad (29)$$

un cálculo sencillo da :

$$E(z) = \frac{2}{kz} \exp\left[1/2 \operatorname{Log}\left(f(-a)/f(a) \right) \right] \times \operatorname{sen}\left(kza - i \operatorname{Log}\left(f(-a)/f(a) \right) \right) \qquad (30)$$

por lo tanto, asintóticamente los ceros estan dados por :

$$z_n = \frac{1}{ka} \left[n\pi + i \operatorname{Log}\left(f(-a)/f(a) \right) \right] \qquad (31)$$

A partir de (31) se deduce que el espaciado entre ceros es π/ka lo que permite definir una densidad de ceros:

$$D = \lim_{r \to \infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{ka}{\pi} = \frac{2a}{\lambda} \qquad (32)$$

La posición asintótica de los ceros está en $y = 1/ka \log\left|\frac{f(-a)}{f(a)}\right|$ la parte imaginaria de $\log|f(-a)/f(a)|$ desplaza la coordenada x de los ceros a partir de $n\pi/ka$.

La distribución de ceros más simple es cuando todos se encuentran en $z_n = n\pi/ka$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Esta red fundamental de ceros genera la función sin (kaz) la que determina el intervalo (-a.a) definido por dos deltas de Dirac $ia/|a|\,\delta(t-a)$ y $-ia/|a|\,\delta(t+a)$ .Cuando se quita un cero del origen se obtiene a partir del producto (27) la función sinc o función de Bessel de orden cero. Esta es la transformada Fourier del objeto más simple posible, esto es, un rectángulo dentro del intervalo (-a,a). Esta configuración fundamental de ceros da el máximo número de ceros que puede asociarse con un objeto físico confinado en (-a,a); denominamos esto un complemento completo de ceros. El crecimiento asintótico de $j_0(z)$ está dado por 1/z. El uso de esta red es equivalente a considerar la onda del objeto siempre de cuadrado integrable. En general, el comportamiento asintótico de E(z) está determinado por el primer término no nulo en (28). Si el crecimiento está dado por $1/z^2$, se sigue que f(a) = f(-a) = 0 . Sólo hay dos ceros en que esto ocurra. El primero es cuando un cero de E (z) se quita, cómo puede verse a partir de (27), dando una distribución asintótica descrita por :

$$z_n = \frac{1}{ka}\left[n\pi + i \operatorname{Log}\left(f'(-a)/f'(a)\right)\right] \qquad (33)$$

El segundo caso surge cuando E(z) tiene un complemento completo de ceros. En este caso f(t) se escribe en la forma de una convolución : $f(t) = g(t) * h(t)$. Las transformadas G(z) y H(z) admiten entonces sus propias distribuciones asintóticas de ceros haciendo la ecuación (33) inadecuada. Por ejemplo, dos distribuciones de ceros dadas por (31) pueden estar presentes y los ceros de E(z) pueden tener aintóticamente hacia dos rectas. En principio se podrian distinguir estos dos casos estudiando la variación de E(z) con k : sería k^{-1} y k^{-2} respectivamente.

En general, si el comportamiento asintótico de E(z) es de la forma $1/z^{n+1}$, se sigue que los primeros n términos de (28) , y por tanto las n primeras derivadas de f(t) en t = $\pm$ a, son cero. Esto ocurrirá bien quitando n ceros o si existe una convolución en f(t), mediante una combinación de convoluciones y movimiento de ceros.

Si se introduce un cero en E(z), el comportamiento asintótico se modificará. Si había presente un complemento completo de ceros, el cero adicional quita la integrabilidad cuadrática de E(z), haciendo a esta función carente de sentido físico.

Si f(t) o cualquiera de sus derivadas tiene una discontinuidad, esta se manifestará como una función δ en la subsecuente derivada; su efecto es correr una infinidad de ceros, aunque no necesariamente todos ellos. Una δ en el origen traslada todos los ceros asintóticos a otras líneas.

Pasaremos a continuación a examinar la forma en que se codifica la información en el objeto; empezando con el efecto de quitar ceros de la configuración del sinc. Quitando el m-esimo cero se obtiene

$$E(z) = \frac{2am}{m\pi - kaz}\, j_0(kaz) \tag{34}$$

que, bajo una transformación Fourier corresponde a la onda del objeto dada por

$$f(t) = P_0(t/a)\left[1 - \cos m\pi\, e^{i\frac{m\pi t}{a}}\right] \tag{35}$$

Puede verse facilmente que el quitar dos ceros, por ejemplo el m-ésimo y el p-ésimo genera

$$E(z) = \frac{2am\pi^2}{(m\pi - kaz)(p\pi - kaz)}\, j_0(kaz) \tag{36}$$

que da

$$f(t) = P_0(t/a)\left[1 - \frac{p}{p-m}\cos m\pi\, e^{i\frac{m\pi t}{a}} - \frac{m}{m-p}\cos p\pi\, e^{i\frac{p\pi t}{a}}\right] \tag{37}$$

En el espacio t del objeto se codifica información real cuando los ceros son simétricos respecto del eje imaginario. Por tanto si en la ecuación (37) es p =-m entonces

$$f(t) = P_0(t/a)\left[1 - \cos m\pi \cos \frac{m\pi t}{a}\right] \qquad (38)$$

que representa un armónico par superpuesto al rectángulo $P_o(t/a)$ Debe mencionarse que en el espacio t no puede generarse información impar o imaginaria quitando ceros.

La exclusión de varios ceros conduce a la expregión general

$$f(t) = P_0(t/a)\left[1 - \sum_p \left(\prod_{q\neq p} \frac{q}{q-p}\right) \cos p\pi \; e^{i\frac{p\pi t}{a}}\right] \qquad (39)$$

Es tambien de sumo interés la información codificada cambiando los ceros de sitio en lugar de quitarlos de la posición básica correspondiente al sinc. Si el m-ésimo cero se desplaza de $m\pi/ka$ a $x_m + i\tau_m$:

$$E(z) = 2am\pi \frac{j_0(kaz)}{m\pi - kaz}\left(1 - \frac{z}{x_m + i\tau_m}\right) \qquad (40)$$

Usando la expresión

$$\mathcal{F}^{1}\left\{(iz)^n E(z)\right\} = \frac{d^n}{dt^n}\left(\mathcal{F}^{1}\left\{E(z)\right\}\right) \qquad (41)$$

se obtiene

$$f(t) = P_0(t/a)\left[1 - \left(1 + \frac{m\pi/ka}{x_m + i\tau_m}\right)\cos m\pi \; e^{i\frac{m\pi t}{a}}\right. \qquad (42)$$

En general cambiando varios ceros se tiene

$$f(t) = P_0(t/a)\left[1 - \sum_p \left(\prod_{q\neq p}\frac{q}{q-p}\right)\prod_q\left(1 - \frac{p\pi}{ka}\frac{1}{x_q + i\tau_q}\right)\cos p\pi \; e^{i\frac{p\pi t}{a}}\right. \qquad (43)$$

Cuando se cambian varios ceros a gran distancia de su posición fundamental (y tambien cuando se quitan), f(t) se hace muy pequeña en la proximidad de t = $\pm$a, esta región aumenta con el número m de ceros desplazados. Para estimar este efecto, supongamos que P = Max(p) habiendo M valores de p. En la proximidad de t = $\pm$ a , f(t) se comportará como

$$f(t) \cong \left[\frac{d^{M+1}}{dt^{M+1}} f(t) \right]_{t=\pm a} \frac{(t \pm a)^{M+1}}{(M+1)!} =$$

$$\left[\sum_{p} \left(\frac{ip\pi}{a} \right)^{M+1} \left(\prod_{q \neq p} \frac{q}{q-p} \cos p\pi \, e^{i\frac{p\pi t}{a}} \right) \right] \frac{(t+a)^{M+1}}{(M+1)!} \qquad (44)$$

donde se ha usado (39).

Considerando exclusivamente la contribución mayor en (44)

$$|f(t)| = \left(\frac{P\pi}{a} \right)^{M+1} \left| \prod_{q \neq p} \frac{q}{q-p} \right| \frac{(t+a)^{M+1}}{(M+1)!} \qquad (45)$$

Aparte del factor constante, f(t) es pequeña para una región que crece conforme lo hace M y, para un M dado, con P decreciente; este efecto puede observarse. En la práctica, f(t) se obtiene siempre ópticamente o computacionalmente a partir de un record finito del espacio z. Por tanto la función f(t) que se obtiene es a su vez de clase E. Este caracter analítico de la onda del objeto reproducida hace este estrechamiento todavía más pronunciado. Este es tambien el límite de resolución de Rayleigh (en el sentido de Shannon) con que puede reconstruirse el objeto, (23).

5. Métodos de localización de ceros y reconstrucción de objetos

Habiendo visto la significación de los ceros de la amplitud compleja dispersada E(z), con el fin de determinar esta función en módulo (intensidad) y fase, es preciso localizar dichos ceros. Obviamente, la localización de ceros reales es trivial, pues ellos aparecen como ceros de la intensidad medida de la radiación dispersada. El problema es la localización de los ceros en el pla

no complejo z fuera del eje real y es de lo que trataremos en esta sección (24,25,26). Dos situaciones pueden distinguirse:
a) La onda del objeto o la de la imagen se puede procesar.

Esta es, en general la situación a frecuencias ópticas e inferiores, siempre que el objeto no sea demasiado pequeño. Aparte del término cuadrático en t, si en la (25) se multiplica f(t) por la función exponencial exp($-$ k τ t) se obtiene

$$E(x+i\tau) = \int_{-a}^{a} f(t)\, e^{-ikt(x+i\tau)}\, dt \qquad (46)$$

A bajas frecuencias esto se puede hacer computacionalmente. A frecuencias ópticas, sin embargo, solamente puede aplicarse un procedimiento directo de filtraje, consistente en modular f(t) según indica (46). Para cada valor de τ el eje de observación se traslada del eje real que era para $\tau = 0$, al x + i τ : se observa entonces la intensidad $|E(x+i\tau)|^2$ cuyos ceros serán los ceros complejos de E(z) en la línea x + i τ . Barriendo el plano complejo, se van localizando sucesivamente los ceros complejos de E(z) que caen en el correspondiente eje x + i τ , los que aparecen como ceros reales en la intensidad observable. En el caso óptico unidimensional, este procedimiento requiere una serie de filtros o, preferiblemente usando un filtro bidimensional y realizando una transformada Fourier unidimensional, en canal múltiple, según el método descrito por Yu (27) (§ 7.2) descrito también en (24) y (26).

Este procesado en tiempo real tiene la ventaja de sólo requerir medidas geométricas de las coordenadas de cada cero.

b) Las intensidades dispersadas son susceptibles de ser procesadas.

Esta es la situación en algunos problemas ópticos y ciertamente la siempre presente a altas frecuencias del espectro electromagnético. Los ceros de la intensidad $I(z) = E(z)\,E^*(z^*)$ son los de E(z) y los de $E^*(z^*)$ ocurriendo en posiciones complejas conjugadas.

Es posible localizar los ceros de I(z) usando un procedimiento similar al descrito anteriormente, es decir, midiendo $|I(z)|^2$

Puesto que

$$I(x) = |E(x)|^2 = \int_{-2a}^{2a} f(\tau)\, e^{-ikx\rho}\, d\rho \qquad (47)$$

donde

$$f(\rho) = \int_{-a+|\rho|}^{a} f^*(t)\, f(t+\rho)\, dt \qquad (48)$$

se puede aplicar el filtro exponencial a la función de correlación $f(\rho)$. El método puede restringirse a un sólo semiplano debido a la simetría de los ceros respecto del eje real. Sin embargo esta simetría introduce una doble ambiguedad para cada cero complejo localizado cuando se trata de asignar su ordenada. Esta falta de información se ve claramente en el producto de Hadamard (27)

$$I(z) = |E(z)|^2 = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(x_n - x)^2 + \tau_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \qquad (48')$$

que depende de $|y_n|$ en vez de y_n. Por tanto si se localizan N ceros complejos de I(z), hay 2^N posibles E(z) que corresponden a la misma I(z). Esta es la ambiguedad fundamental en problemas inversos cuando solamente los datos de la intensidad son accesibles.

Para encontrar estos ceros se necesitarían en principio 2^N operaciones para identificar cuales son los que estan en el semiplano correcto, consistentess en la comparación de todas las intensidades con el mismo conocimiento *a priori* (28). Un método rápido y simple puede sin embargo desarrollarse (29) para un dispersor débil, en el que es válida la primera aproximación de Born el cual reduce las 2^N operaciones requeridas a solamente 2N. Este procedimiento necesita información adicional en otro espacio, por ejemplo el conocimiento de una intensidad en un plano de Fresnel. Una vez que los ceros de I(z) se localizan en el plano complejo correspondiente a la región de Fraunhofer el algoritmo utilizado comienza considerando la aproximación cero de E(z) suponiendo que todos los ceros estan situados en la red básica en $z_n = n\pi/ka$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

La primera aproximación para E(z) se obtiene moviendo el z_1 a las dos posibles posiciones, respectivamente en el semiplano superior y en el semiplano inferior. Se calculan las dos posibles intensidades Fresnel y aquella que más se aproxima a la intensidad Fresnel medida a priori se selecciona como determinante del signo de y_1 . Con esta y_1 , el signo de y_2 se selecciona por idéntico procedimiento; de este modo, repitiendo el proceso se van obteniendo los signos de todas las y_n . Una condición suficiente para que el método funcione es que los ceros se comporten, en primera aproximación, independientemente. Esto implica que los ceros no se encuentren muy alejados de las posiciones correspondientes a la red básica del sinc. Físicamente, ésta es la situación correspondiente a dispersores débiles.

Una mejora de este método, que permite la localización de ceros para cualquier dispersor, parece posible utilizando el método de conjugación de fases (30), que ofrece la posibilidad de encontrar la parte real de E(x).

6. Estadística de figuras de speckle.

Cuando el objeto dispersor consiste en un medio aleatorio, tal como un material con un volumen de índice de refracción inhomogéneo (31) o una superficie rugosa, aparece en la distribución de intensidad dispersada una estructura de speckle (32). En general, la presencia de ceros complejos tiene la manifestación física en el eje real consistente en una oscilación de la intensidad (5). Cuando dicha oscilación es aleatoria, corresponde a la figura de speckle observada. Un estudio de la estadística de esta intensidad da por lo tanto información sobre la estadística de la distribución de ceros y su manifestación en el eje real.

La estadística de figuras de speckle ha sido estudiada por diversos autores (33-42) experimentalmente y teóricamente dentro del marco de la aproximación de Kirchhoff dada por Beckmann y Spizzichino (10). Sin embargo, nada se sabe sobre el caso en que existe scattering múltiple. Este problema ha sido recientemente abordado por nosotros y en esta sección pasamos a exponer los principales resultados del estudio.

Sean $\underline{k}_0 = (\underline{K}, -q_0)$ y $\underline{k}_{\underline{Q}} = (\underline{K}+\underline{Q}, q)$ los vectores de onda correspondientes a la radiación incidente y difractada respectivamente en la superficie rugosa de vector de posición $\underline{r} = (\underline{R}, Z = D(\underline{R}))$, $D(\underline{R})$ denotando la corrugación de la superficie.

La expresión para la intensidad media dispersada $\langle I(\underline{Q})\rangle$ en cuarto orden de la rugosidad σ ha sido hallada (44) y da:

$$\begin{aligned}\langle I(Q)\rangle = & \left[1-4q_0^2\sigma^2+8q_0^4\sigma^4\right]\delta_{\underline{Q},0} \\ & +\frac{4\pi T^2}{S}\Big[e^{-Q^2T^2/4}\,q_0\,\mathrm{Re}\,q\,\sigma^2 \\ & -e^{-Q^2T^2/4}\,q_0\,\mathrm{Re}\,q\,(q_0+\mathrm{Re}\,q)^2\sigma^4\Big] \\ & +\frac{2\pi T^2}{S}\,e^{-Q^2T^2/8}\,q_0\,\mathrm{Re}\,q\left(\frac{3}{2}q_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,q^2\right)\sigma^4\end{aligned} \qquad (49)$$

Es interesante estudiar lo que pasa en (49) en la dirección especular en ese caso se tiene:

$$\begin{aligned}\langle I(\underline{Q}=\underline{0})\rangle = & \left[1-4q_0^2\sigma^2+8q_0^4\sigma^4\right]\delta_{\underline{Q},0} \\ & +\frac{\pi T^2}{S}\left[4q_0^2\sigma^2-12\,q_0^4\sigma^4\right]\end{aligned} \qquad (50)$$

que es idéntica a la expresión obtenida con la aproximación de Kirchhoff . Por lo tanto la intensidad dada con la aproximación de Kirchhoff es exacta en la dirección especular. Este es un resultado muy importante, ya que es en esta dirección en la que se hacen la mayoría de las medidas de speckle en superficies ópticas (cf. Refs.40-42).

Para obtener información de la estadística del speckle no basta sin embargo con la intensidad media. Deben conocerse además momentos de orden superior. En general, el cálculo de éstos se hace pronto muy complicado. Sin embargo una buena información puede obtenerse a partir de la denominada relación señal-ruido o contraste de speckle, que para el caso de una distribución de amplitud compleja gaussiana no circular, (hipótesis válida siempre que el área de la superficie iluminada sea suficientemente grande, en virtud del teorema del límite central) , es (38,39):

$$\rho^2 = \frac{\langle I^2\rangle-\langle I\rangle^2}{\langle I\rangle^2} = 1-2\frac{\langle I(\underline{Q}=\underline{0})\rangle^2}{\langle I(\underline{Q})\rangle^2}+\frac{|\langle A^2(\underline{Q})\rangle|^2}{\langle I(\underline{Q})\rangle^2} \qquad (51)$$

Que en el caso de estadística gaussiana circular se convierte (39) en:

$$\rho^2 = 1 - \frac{\langle I(\underline{Q}=\underline{0})\rangle^2}{\langle I(\underline{Q})\rangle^2} \tag{52}$$

En orden a determinar (51) es preciso calcular tambien el momento $\langle A^2\rangle$. Siguiendo un cálculo similar al desarrollado para $\langle I\rangle$ se obtiene :

$$\langle A^2(\underline{Q})\rangle = \Big[(1 - 4q_0^2\sigma^2 + 8q_0^4\sigma^4) + \frac{\pi T^2}{S}(-2q_0^2\sigma^2 + 10q_0^4\sigma^4)\Big]\delta_{\underline{Q},0} \tag{53}$$

Debe observarse que $\langle A^2\rangle$ es especular, o sea cero fuera de $\underline{Q}=\underline{0}$. Segundo, para el límite $q_0^2T^2 \gg 4$, para el que se ha calculado (53), el valor de $\langle A^2\rangle$ coincide con el obtenido con la teoría de Beckmann-Kirchhoff que da :

$$\langle A^2(\underline{q})\rangle = e^{-4q_0^2\sigma^2}\Big[1 + \frac{\pi T^2}{S}\,\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \times \frac{(q_0+q)^{2n}}{n!\,n}\,\sigma^{2n}\Big] \tag{54}$$

En conclusión, la teoría de Kirchhoff debe ser adecuada para la interpretación de medidas experimentales en la dirección especular. Cerca del origen, pues, parece que el scattering múltiple no afecta a la distribución de ceros. Esto es importante pues entonces en regiones próximas al origen el algoritmo de reconstrucción descrito en la sección anterior debe funcionar incluso para dispersores fuertes.

7. La transformada de Hilbert Logarítmica: El problema de la fase en dos y más dimensiones.

Se ha visto en los párrafos anteriores el poder de las consideraciones de analiticidad de la función de onda correspondiente a la radiación dispersada en lo que se refiere a la reconstrucción del objeto. Según el teorema de Paley - Wiener, el campo dispersado en la región de Fraunhofer, dado por (25) es una función entera de tipo exponencial; este resultado ya se ha discutido en la sección 3. En consecuencia puede demostrarse (49) que existe una transformación de Hilbert logarítmica entre el módulo $|E(x)|$ y la fase $\varphi(x)$ de $E(x)$.

En consecuencia, dado que las ecuaciones son válidas si $E(z)$ no posee ceros en un semiplano del plano complejo $z = x + i\tau$, se puede obtener la fase a partir del módulo, dado por la intensidad medida, de la amplitud compleja dispersada cuando la extensión analítica de ésta en el plano complejo z posee un semiplano libre de ceros. En este caso especial éste es el modo más directo de obtener la propia función de onda de la radiación dispersada y, mediante la integral de scattering, obtener por una inversión la onda del objeto o la propia función del objeto. En este sentido, este método sería alternativo a los procedimientos descritos en la sección 5. De hecho, éste fue el primer método sugerido por Wolf en 1962,(50) en relación con el problema de la fase en la teoría de la coherencia parcial, (vease una exposición detallada de este problema en la ref.51), y posteriormente por Burge et al. en 1974 (52). Sin embargo, es siempre difícil saber cuando existe un semiplano libre de ceros. Solamente existe una condición suficiente para asegurarlo, a saber, cuando se superpone una onda de referencia coherentemente a la onda dispersada por el objeto. Esto es un holograma, y esta es la demostración matemática formal de por qué la holografía funciona tan bien en la solución al problema de la fase.

Es de interés, por tanto, generalizar las relaciones de dispersión a dos y más dimensiones, que son el número que en general exigen los problemas reales que se encuentran en la práctica. Estas son (vease ref.13):

$$\phi(x_1, x_2) = \phi(0,0) + \frac{x_1 x_2}{\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x'_1, x'_2)}{(x'_1 - x_1)(x'_2 - x_2)}\, dx'_1\, dx'_2$$
$$- \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Log}|E(x'_1, x'_2)|}{x'_2 (x'_2 - x_2)}\, dx'_2 - \frac{x_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Log}|E(x'_1, x'_2)|}{x'_1 (x'_1 - x_1)}\, dx'_1 \qquad (55a)$$

$$\operatorname{Log}|E(x_1,x_2)| = \frac{x_1 x_2}{\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Log}|E(x'_1,x'_2)|}{x'_1 x'_2 (x'_1-x_1)(x'_2-x_2)} dx'_1 dx'_2$$

$$+ \frac{x_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x'_1,x_2)}{x'_1(x'_1-x_1)} dx'_1 + \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x_1,x'_2)}{x'_2(x'_2-x_2)} dx'_2 \qquad (55\,b)$$

$$+ \operatorname{Log}|E(0,0)|$$

Que son las transformadas de Hilbert logarítmicas bidimensionales Estas ecuaciones no son solubles para $\phi(x_1,x_2)$ ni para $\operatorname{Log}|E(x_1,x_2)|$ Por tanto, a diferencia del caso unidimensional, no existen relaciones de dispersión solubles entre el módulo medible de $E(x_1,x_2)$ y su fase en dos dimensiones. Esto mismo es igualmente válido en tres o más dimensiones.

En el caso en que la función de onda es factorizable

$$E(x_1,x_2) = E_1(x_1)\, E_2(x_2) \qquad (56)$$

siendo

$$E_1(x_1) = |E_1(x_1)|\, e^{i\phi(x_1)} \qquad (57\,a)$$

$$E_2(x_2) = |E_2(x_2)|\, e^{i\phi_2(x_2)} \qquad (57\,b)$$

de manera que

$$|F(x_1,x_2)| = |F(x_1)|\,|F(x_2)| \qquad (58\,a)$$

$$\phi(x_1,x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2) \qquad (58\,b)$$

se obtiene:

$$\phi(x_1,x_2) = \phi_1(0) + \phi_2(0) - \frac{x_1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Log}|E_1(x'_1)|}{x'_1(x'_1-x_1)} dx'_1 \qquad (59\,a)$$

$$- \frac{x_2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Log}|E_2(x'_2)|}{x'_2(x'_2-x_2)} dx'_2$$

$$\operatorname{Log} |E(x_1, x_2)| = \operatorname{Log} |E_1(0)| + \operatorname{Log} |E_2(0)|$$

$$+ \frac{x_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_1(x_1')}{x_1'(x_1' - x_1)} dx_1 + \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_2(x_2')}{x_2'(x_2' - x_2)} dx_2' \qquad (59b)$$

que es el caso más simple en que el problema bidimensional puede resolverse.

En conclusión puede decirse que el esquema basado en las relaciones de dispersión, no proporciona expresiones para obtener la fase a partir de la intensidad medida en dos dimensiones, ya que las transformadas constituyen ecuaciones integrales singulares sin solución única. Por lo tanto en aquellos casos en que se desee aplicar las relaciones de dispersión para el cálculo de la fase y la reconstrucción del objeto, se deberán usar las transformadas de Hilbert unidimensionales dividiendo el objeto en tiras unidimensionales y reconstruyendo cada una de estas hasta que la zona multidimensional ocupada por el objeto sea totalmente reconstruida. Puesto que cada una de estas tiras unidimensionales tendrá una transformada de Hilbert unidimensional el teorema de Paley-Wiener se podrá aplicar. En el próximo párrafo trataremos con más detalle la reconstrucción de objetos mediante tiras unidimensionales, como veremos, esto se puede llevar a cabo mediante proyecciones en la región de Fraunhofer.

8. Soluciones a los problemas de reconstrucción de objetos en dos y tres dimensiones .

En esta sección vamos a exponer los resultados relativos a la reconstrucción de objetos en dos y tres dimensiones. La aplicación de la teoría de prolongación analítica en el plano complejo a dos y tres dimensiones implica la introducción de espacios complejos de cuatro y seis dimensiones respectivamente estudiando en ellos las distribuciones de las variedades que constituyen los ceros en dichos espacios. Esta es una tarea formidable. Es deseable por tanto la posibilidad de aplicar las técnicas de prolongación analítica unidimensionales de manera que el estudio realizado y expuesto en los párrafos anteriores sea directamente aplicable a estos problemas de objetos con mayor número de dimensiones. Esto es posible en muchos casos como se verá a continuación .

Sea f (t_1 , t_2) la onda bidimensional del objeto. La amplitud compleja de la radiación dispersda en la región de Fraunhofer es

$$E(x_1,x_2)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(t_1,t_2)\,e^{ik(t_1x_1+t_2x_2)}\,dt_1\,dt_2 \qquad (60)$$

Conviene distinguir varias situaciones :
a) La función f (t_1 , t_2) o su imagen se puede procesar.

En este caso la función f(t_1 , t_2) se puede dividir en tiras unidimensionales de la forma $f(t_1,t_2)\,\delta(t_2-K)$
Para cada una de estas tiras se pueden entonces aplicar los métodos descritos en la sección 5, o la transformada de Hilbert unidimensional si se sabe a priori que se posee un semiplano libre de ceros. Para cada K, se reconstruye entonces una tira $f(t_1,t_2)$ $\times\,\delta(t_2-K)$ de manera que la función bidimensional f(t_1 , t_2) llega completamente a reconstruirse yuxtaponiendo estas tiras.

b) Un procedimiento alternativo, mediante el que se evita el procesado en el espacio del objeto o la imagen, y utiliza por consiguiente solamente la información en el espacio de Fourier (Fraunhofer o Fresnel) consiste en utilizar proyecciones en dicho espacio. Se define la proyección G (x_1) de E (x_1 , x_2) mediante

$$G(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} E(x_1,x_2)\,dx_2 = E(x_1,x_2) ** \delta(x_1) \qquad (61)$$

donde el doble asterisco denota convolución doble, esto es, respecto de x_1 y de x_2 . Esto corresponde a la tira unidimensional del objeto

$$f(t_1,t_2)\,\delta(t_2)= f(t_1,0)\,\delta(t_2) \qquad (62)$$

como puede comprobarse tomando la transformada Fourier bidimensional de (62).

Obviamente la función G (x_1) es una función bidimensional , constante a lo largo de la dirección x_2 . La operación (61) puede realizarse colocando una lente cilíndrica en frente de E(x_1,x_2)

con el eje a lo largo de la dirección x_1. Efectuando sucesivas traslaciones del objeto en la dirección t_2 se van seleccionando las tiras unidimensionales que se desean reconstruir y su superposición proporciona el objeto bidimensional.

Otra posibilidad consiste en rotar la dirección de integración en (61) mediante un giro de ejes bajo sucesivos ángulos.

En cuanto a la determinación de la función $g(x_1)$ deben distinguirse dos situaciones :

i) La función $G(x_1)$ se puede procesar.

Puesto que la función $G(x_1)$ es igual a la función $G(x_1,x_2) \times \delta(x_2-K)$ repetida uniformemente a lo largo de la dirección x_2, se puede insertar un filtro exponencial en el plano de esta función de manera que se obtenga una representación de su transformada Fourier en el plano complejo mostrando sus ceros tal y como se indicó en la sección 5, obteniendo de esta manera $G(x_1,x_2)\delta(x_2-K)$ a partir de los ceros en el espacio conjugado.

ii) Solamente la intensidad $|G(x_1,x_2)|^2$ se puede procesar.

En este caso se debe utilizar el algoritmo iterativo descrito en la sección 5. Este implica la medida de una proyección de la transformada Fresnel $E_d(x_1,x_2)$:

$$E_d(x_1,x_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(t_1,t_2)\, e^{i\frac{k}{2d}(t_1^2+t_2^2)}\, e^{ik(t_1x_1+t_2x_2)}\, dt_1\, dt_2 \qquad (63)$$

Es decir, una proyección dada por :

$$G_d(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} E_d(x_1,x_2)\, dx_2 \qquad (64)$$

que da en el espacio (t_1,t_2) la tira unidimensional :

$$f(t_1,t_2)\, e^{i\frac{k}{2d}(t_1^2+K^2)}\, \delta(t_2-K) \qquad (65)$$

Por lo tanto, comparando la intensidad Fresnel reconstruida $|G_d(x_1)|^2$ con la intensidad Fresnel medida dada por (92) se puede determinar la función y por tanto las tiras unidimensionales sucesivas que reconstruyen la función bidimensional $f(t_1, t_2)$.

C) Si la amplitud compleja dispersada no se puede procesar, de manera que solamente se puede disponer de intensidades de la forma $|E(x_1,x_2)|^2$, entonces se requerirá un tratamiento completo usando la teoría de funciones enteras de dos variables complejas, así como información a priori adicional. Esta última consiste en el conocimiento de la forma de la apertura y una intensidad Fresnel. Suponiendo un dispersor débil y escogiendo, por ejemplo una apertura circular, los círculos de ceros (correspondiente a la función de Bessel circular que da dicha apertura), pueden localizarse utilizando una extensión del método presentado en la sección 5.

Pasaremos a continuación a presentar los principales resultados en cuanto a la reconstrucción de objetos tridimensionales. Dos situaciones importantes cabe distinguir:

A) Optica geométrica. En este límite dos situaciones hay que señalar :

i) Propagación rectilínea, que es el caso tratado por la tomografía convencional (55-63), la cual ha sido ya extensamente estudiada por lo que no nos ocupamos de ella aquí.

ii) Propagación descrita por la ecuación eikonal (17) este es un caso no estudiado completamente todavía, sin embargo tampoco nos ocupamos de él aquí.

Estrictamente considerado, el punto A es un caso particular del punto B que pasamos a exponer a continuación:

B) Objetos dispersadores.

La relación existente entre la onda del objeto y el campo dispersado en la región de Fraunhofer es, aparte de un factor de inclinación:

$$E(\underline{x}) = \int_V d^3\underline{t}\; f(\underline{t})\; e^{ik\underline{t}\cdot\underline{x}} \qquad (66)$$

La obtención de $f(\underline{t})$ es mucho más dificil en tres dimensiones en comparación con una y dos dimensiones, debido a la imposibilidad de invertir la ecuación (66). Es bien sabido (64,65) que las tres componentes de $\underline{x}$ no son independientes ya que son los cosenos directores del punto de observación, los cuales determinan la esfera de Ewald. Por lo tanto el campo dispersado, a pesar de su estructura tridimensional en el espacio, es esencialmente una función bidimensional. Esto no es sorprendente puesto que la amplitud compleja satisface la ecuación de ondas o más exactamente es una función pseudoanalítica en el espacio complejo asociado al de propagación, de manera que dados los valores de dicha función en una superficie bidimensional, automáticamente determina los valores en cualquier otro punto del espacio tridimensional. En consecuencia, a partir de información bidimensional en el espacio $\underline{x}$ no es posible recobrar la estructura tridimensional del objeto.

Veamos el método propuesto por nosotros en orden a resolver este problema:

Supongamos que las medidas se realizan en el plano ecuatorial $x_3 = 0$. Con esto se obtiene a partir de (66):

$$E(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\, dt_2\, e^{ik(t_1 x_1 + t_2 x_2)} \int_{-\infty}^{\infty} dt_3\, f(\underline{t}) \tag{67}$$

Donde se ha tenido en cuenta que, puesto que,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{68}$$

se tiene

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad ; \quad x_3 = 0$$

Para obtener la proyección $\int_{-\infty}^{\infty} f(\underline{t})\, dt_3$ a partir de $E(x_1)$ caben dos posibilidades. La primera es considerar un plano de realizano la operación :

$$\delta(t_2 - t_2^0) \int_{-\infty}^{\infty} f(\underline{t})\, dt_3 = \delta(t_2 - t_2^0) \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2^0, t_3)\, dt_3 \tag{69}$$

lo que sugiere iluminar el objeto con una onda plana de frente de onda unidimensional, (el objeto dispersor debe ser en este caso un dispersor débil para que este método sea operativo).La orientación de la onda debe ser tal que su frente se oriente en la dirección del eje t_3 y se propage en el plano t_2^o en dirección t_1 .

Se tiene así la situación unidimensional

$$E(x_1) = e^{-ikx_2t_2^o} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 \; f(t_1, t_2^o, t_3)\, e^{-ikx_1t_1} \tag{70}$$

ecuación que da la función $\int_{-\infty}^{\infty} dt_3\, f(t_1, t_2^o, t_3)$. Todavía queda la obtención de la onda del objeto $f(t_1, t_2^o, t_3)$ a partir de la proyección anterior. Esto puede conseguirse mediante una transformación de Radon (62,63). Para realizarla es necesario llevar a cabo las medidas en una sucesión de planos, para un rango de valores de x_3 ; es decir girando el círculo de medida alrededor del eje t_2. Este procedimiento puede repetirse para una sucesión de valores de t_2 para obtener la reconstrucción completa de la estructura tridimensional.

La segunda posibilidad de resolver el problema bidimensional dado por la ecuación (68) consiste en iluminar el objeto con una onda plana tridimensional, esto es, con un frente de onda bidimensional, en este caso no se efectúa la operación (69). Entonces la inversión de la operación (68) no se puede realizar ya que ahora la amplitud compleja $E(x_1, x_2)$ es una función de una variable. Para convertirla en una función de dos variables es necesario variar ladirección o frecuencia del haz incidente. Esto genera una familia de funciones unidimensionales equivalente a una sola función de dos dimensiones. Este método puede considerarse en este sentido equivalente al propuesto por Wolf (64) y por Dandliker y Weiss (65).

El primer método propuesto aquí es la generalización directa del problema bidimensional. El segundo método puede considerarse como una generalización del primero. Es todavía posible idear un tercer procedimiento, basado en el desarrollado por Wolf en (64) consistente en determinar la amplitud compleja dispersada no en un círculo, sino en un plano y usar despues, en lugar de un procedimiento holográfico como él proponia, usar el método propuesto en el apartado b de esta sección; el cual puede en este considerarse en este sentido como una alternativa al método holográfico, sólo posible cuando existe un haz de referencia disponible, esto es, cuando se sabe *a priori* que puede crearse un semiplano libre de ceros.

9. Conclusiones

En el presente trabajo se han expuesto los resultados principales relativos al problema de reconstrucción del objeto en Optica mediante prolongación analítica de la función de onda del campo dispersado en el plano complejo. Esto ha requerido un estudio profundo de las características principales de dicha función en lo relativo a su analiticidad.

Del estudio se pueden inferir, por tanto, las siguientes conclusiones :

1) La amplitud compleja dispersada puede extenderse analíticamente en un espacio complejo de cuatro dimensiones, (cuando su argumento es unidimensional), en el que se pueden deducir diversas propiedades importantes : La función de onda es una función analítica generalizada, o pseüdoanalítica en una proyección del espacio complejo y, como tal satisface la ecuación de Rayleigh--Sommerfeld que da la descripción de propagación de acuerdo con el principio de Huygens-Fresnel. En el otro plano complejo de dicho espacio es una función entera, de orden infinito en principio hasta que llega a través de supropagación a la región de Fresnel y Fraunhofer, a partir de la que se convierte en una función entera de tipo exponencial, esto es, de clase E. Como tal viene descrita en términos de sus ceros mediante la representación de Hadamard.

2) Los ceros codifican toda la información que transporta la señal desde que es dispersada por el objeto hasta la región de detección. El desplazamiento de cualquier cero a partir de la red básica correspondiente al sinc codifica un armónico. La información en el objeto es por tanto la combinación de estos armónicos y depende por tanto de la "perturbación" en las posiciones de estos ceros respecto de la red básica. Un cero puede considerarse que representa un grado de libertad de la señal. La descripción tradicional (66) considera que los grados de libertad estan aproximadamente dados por el producto espacio-anchura de banda. El modelo que se basa en los ceros establece un número de grados de libertad determinado por el número de ceros localizables en el intervalo de medida. Ambas definiciones son esencialmente la misma. La codificación de la información de una señal por medio de los ceros es sólo una de las posibles representaciones de la señal, es decir, aquella que hace uso de su analiticidad.

3) Las representaciones de Shannon y Hadamard son por tanto equivalentes, de hecho la ecuación (39) no es otra que la expresión del teorema de Shannon, esto es evidente sin más que tomar en ella las transformadas Fourier de ambos miembros para ver lo que pasa en el espacio del espectro. Sin embargo la información que se tiene en la descripción mediante ceros es puramente estructural mientras que aquella en término de los puntos de muestreo de Shannon es métrica y estructural, es decir información que re-- quiere no solamente la localización sino tambien el valor de la medida del correspondiente armónico asociado. Esto quiere decir que la descripción en términos de los ceros reduce toda la información a estructural o geométrica relativa a la posición de cada cero. Por lo tanto la situación óptima en un experimento será aquella en que se localicen todos los ceros posibles de la señal así como todos sus posibles valores de muestreo en el eje real, ésta es la llave para la continuación analítica de la señal más allá del límite clásico de Rayleigh. En efecto, el producto de Hadamard da los valores de la función en todo punto del plano complejo, y en particular sobre el eje real. Sin embargo ninguno de estos valores es exacto a menos que se hallan encontrado los infinitos ceros e introducido su contribución como factores de dicho producto. Sin embargo, ajustando los valores en el interior del intervalo de medida a aquellos obtenidos experimentalmente, y dada la unicidad de la extrapolación analítica fuera de dicho intervalo por el principio de continuidad analítica para la señal, se pueden obtener a partir del producto de Hadamard valores fuera de la región accesible a la experimentación.

4) El modelo de los ceros resulta de gran valor para encontrar la fase en los casos en que ésta no puede medirse directamente. El esquema de Shannon sin embargo permite una infinidad de fases posibles asociadas a cada punto de muestreo. Por el contrario, los ceros codifican ópticamente la información de la amplitud compleja dispersada; de hecho una transparencia representando la distribución de los ceros puede considerarse como el holograma más simple posible.

5) Hay dos formas posibles de mostrar la posición de los ceros de la amplitud compleja, cada una de ellas depende de las condiciones del problema. Estas son el algoritmo iterativo y el filtro exponencial descrito en la sección 5. Los objetos a los que en principio parecen ajustarse mejor estos métodos, son aquellos que pueden describirse como de la primera aproximación de Born. No obstante se ha hecho en la sección seis un estudio detallado de objetos que actúan como dispersores fuertes, siendo estos ob

jetos estudiados superficies rugosas, y se ha llegado a la conclusión que el contraste de speckle, que es la manifestación de la distribución de ceros sobre el eje real, no varía en la dirección especular, esto induce a pensar que la distribución de ceros cerca del origen no cambia apreciablemente respecto a si se considera el objeto un dispersor débil o se hace un formalismo de scattering múltiple con él. La diferencia se hace más acusada a medida que se va a regiones correspondientes a frecuencias espaciales más altas.

6) Cuando la función de onda no posee ceros en un semiplano se puede establecer en una dimensión una relación de dispersión que da la fase en función de la intensidad medida. Este esquema se ha estudiado en dos dimensiones y se ha encontrado que no es válido ya que dichas relaciones de dispersión constituyen ecuaciones integrales singulares del tipo Cauchy sin solución única. Por tanto, una aplicación de las relaciones de dispersión requiere necesariamente objetos unidimensionales, o si no, la división del objeto en tiras unidimensionales.

7) La reconstrucción de objetos bidimensionales y tridimensionales puede siempre realizarse por medio de la superposición de tiras unidimensionales reconstruidas por medio de proyecciones de la amplitud compleja dispersada cuando esta amplitud compleja sea tal que se pueda procesar. Esto requiere el uso de una lente cilíndrica y la medida en el valor cero del argumento de la transformación unidimensional que dicha lente realiza. El campo dispersado por objetos tridimensionales es esencialmente bidimensional, a pesar de su estructura en un espacio de tres dimensiones. Esto por un lado es un inconveniente, ya que solo experimento, (esto es, una sola medida) no puede dar información suficiente para la reconstrucción sin ambiguedad del objeto tridimensional, sin embargo esto es por otro lado una ventaja, ya que la reconstrucción de la señal se reduce a un espacio de dos dimensiones y puede por consiguiente llevarse a cabo mediante proyecciones unidimensionales. El formalismo unidimensional es por lo tanto aplicable a la reconstrucción de objetos bidimensionales y tridimensionales siempre que se puedan medir intensidades correspondientes a estas proyecciones unidimensionales.

Referencias

1. G.Ross y M.Nieto-Vesperinas: Opt. Acta (en prensa).

2. A.J. Devaney: J. Math. Phys. 19 , 1526 (1978).
A.J. Devaney y E.Wolf.: Phys. Rev. D 8, 1044 (1973).

3. B.J. Hoenders: Topics in Current Physics 9, 41 (1978).

4. G. Ross: Phil. Trans. Toy. Soc. Lond. A 268 , 177 (1970).

5. G. Ross, M.A. Foddy, M.Nieto-Vesperinas y M.Wheeler:
Proc. Roy. Soc. Lond. A 360 , 25 (1978).

6. D. Gabor: J. Phys. E 8 , 73 (1975).

7. A. Papoulis: Systems and Transforms with Applications in Optics (Mc Graw Hill, New York 1968).

8. M.Nieto-Vesperinas, M.A. Vences, G. Ross y M.A. Fiddy:
Opt. Comm (en prensa).

9. G. Ross,M.A.Fiddy, N.Nieto-Vesperinas y M.Wheeler:
Optik 49 , 71 (1977).

10.P.Beckmann y A. Spizzichino: The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces (pergamon Press 1963).

11.G. Ross: Opt. Acta 15 , 451 (1968).

12.G. Ross y M.Nieto Vesperinas: Opt. Acta (en prensa).

13.M.Nieto-Vesperinas: Optik (en prensa).

14.I.N. Vekua: Generalized Analytic Functions (Pergamon Press 1962)

15.L.Bers: en "Methods of Mathematical Physics" (Por R.Courant y D.Hilbert), suplemento al capítulo 4 (Interscience 1962).

16.J.W. Goodman: Introduction to Fourier Optics
(Mc Graw Hill,New York 1968).

17.M. Born y E.Wolf: Principles of Optics (Pergamon Press 1975).

18.R.Courant y D.Hilbert: Methods of Mathematical Physics.Vol.2 (Interscience 1962).

19.R.P.Boas:Entire Functions (Academic Press,New York,1954).

20.R.F. Millar: Proc.Camb.Phil.Soc. 69 ,175 (1971).

21.R.F. Millar: Radio Sci. 8,785 (1973).

22.M.Nieto-Vesperinas: Ph.D. Tesis (University of London 1978).

23.G. Ross, M.A.Fiddy, M.Nieto-Vesperinas y A.Huiser:
Opt.Comm. (en prensa).

24.G.Ross, M.A. Fiddy y M.Nieto-Vesperinas: Opt Comm.(en prensa).

25.G.Ross, M.A. Fiddy Y M.Nieto-Vesperinas: Optics in Four Dimensions (en prensa).

26.M.A. Fiddy, G.Ross y M.Nieto-Vesperinas: Optics in Four Dimensions (en prensa).

27.F.T.S.Yu: Introduction to Diffraction,Information Proccessing and Holography (M.I.T. Press 1973).

28.H.A. Ferwerda: Topics in Current Physics 9 , 13 (1978).

29.G.Ross, M.A.Fiddy y M.Nieto-Vesperinas: Topics in Current Physics (Springer-Verlag) 20 , 1980.

30.A.Yariv: IEEE QE - 14 , 650 (1978).

31.A.Ishimaru: Wave Propagation and Scarrering in Random Media (Academic Press, New York 1978).

32.J.C.Dainty: Laser Speckle and Related Phenomena Topics in Applied Physics (Springer-Verlag 1976).

33.J.C. Dainty: Prog. in Opt. 14 (ed. E. Wolf) (North Holland1976)

34.W.T. Welford: Opt. Quant. Electron. 9 , 269 (1977).

35.P.J.Chandley : Opt. Quant. Electron. 8 , 323 (1976).

36.H.M. Pedersen: Opt. Acta 22 , 15 (1975).

37.H.M. Pedersen:Optc. Comm. 12 , 156 (1974).

38.J.W.Goodamn: Opt. Comm. 14 , 324 (1975).

39.H.M. Pedersen: Opt. Comm. 16 , 63 (1976).

40.H.Fujii y T. Asakura: Opt. Comm. 12 , 32 (1974).

41.H.Fujii, T. Asakura e Y.Shindo: Opt. Comm. 16 , 68 (1976).

42.J.Ohtsubo y T.Asakura: Opt. Comm. 25 , 315 (1978).

43.H.García, V.Celli y M.Nieto-Vesperinas : Opt. Comm. 30, 279 (1979).

44.M.Nieto-Vesperinas y N. García: J. Opt. Soc. Am.(en prensa).

45.M.Nieto-Vesperinas y N. García: Opt. Comm. 32 ,217 (1980).

46.N.García y N. Cabrera: Phys. Rev. B 18 , 576 (1978).

47.C.Lopez, F.J.Yndurain y N.García: Phys.Rev. B 18 970 (1978).

48.I.S.Gradshteyn y I.M. Ryzhik: Tables of Integrals Series and Products (Academic Press, New York,1965).

49.R.E. Burge, M. A.Fiddy, A.H. Greenaway y G.Ross: Proc Roy. Soc. Lond. A 350 , 191 (1976).

50.E.Wolf.Proc.Phys. Soc.Lond. 80 , 1269 (1962).

51.D.Khler y L.Mandel: J.Opt.Soc. Am.63 , 126 (1973).

52.R.E.Burge, M.A. Fiddy, A.H. Greenaway y G.Ross: J.Phys.D L 65, 7 (1974).

53.H.Cartan: Theorie Elementaire des Fonctions Analytiques d'une ou plusierus Variables Complexes (Hermann, Paris 1961).

54.F.D.Garkhov: Boundary Value Problems (Pergamon Press 1966).

55.M.Nieto-Vesperinas, M.Gea, G.Ross y M.A. Fiddy: Optics in Four Dimensions (en prensa).

56.B.J.Hoenders: Topics in Current Physics 9 , (1978).

57.P.D.Rowley:J.Opt.Soc.Am.59 , 1496 (1969).

58.M.V.Berry y D.F. Gibbs: Proc.Roy.Soc.Lond. A 314 , 143 (1970)

59.D.W.Sweeney y C.M.Vest: Appl.Opt. 12 , 2649 (1973).

60.G.T.Herman (editor): Image Reconstruction from Projections. Topics in Current Physics 32, Springer-Verlag 1979.

61.A.M.Cormack:J.Appl.Phys. 34 , 2722 (1963).

62.H.H.Barrett y W.Swindell: Proc IEEE 65 ,89 (1977).

63.R.Gordon y G.T.Herman: Int.Rev.Cytol.38 , 111 (1974).

64.E.Wolf: Opt.Comm. 1 , 153 (1969).

65.R.Dandliker y K.Weiss:Opt.Comm. 1 , 323 (1970).

66.B.R.Frieden:Progress in Optics 9 (ed. E. Wolf). (North Holland 1971).

67.M.Nieto-Vesperinas, G.Ross y M.A. Fiddy: Proc. 3rd Int.Conf. Physicochemical Hydrodynamics (Madrid 1980).

68.M.Nieto-Vesperinas y N.García: Opt.Comm. (en prensa).

FUNDACION JUAN MARCH
SERIE UNIVERSITARIA

TITULOS PUBLICADOS

Serie Marrón

(Filosofía, Teología, Historia, Artes Plásticas, Música, Literatura y Filología)

1 Fierro, A.:
Semántica del lenguaje religioso.

10 Torres Monreal, F.:
El teatro español en Francia (1935-1973).

12 Curto Herrero, F. Fco.:
Los libros españoles de caballerías en el siglo XVI.

14 Valle Rodríguez, C. del:
La obra gramatical de Abraham Ibnᶜ Ezra.

16 Solís Santos, C.:
El significado teórico de los términos descriptivos.

18 García Montalvo, P.:
La imaginación natural (estudios sobre la literatura fantástica norteamericana).

21 Durán-Lóriga, M.:
El hombre y el diseño industrial.

32 Acosta Méndez, E.:
Estudios sobre la moral de Epicuro y el Aristóteles esotérico.

40 Estefanía Alvarez, M.ª del D. N.:
Estructuras de la épica latina.

53 Herrera Hernández, M.ª T.:
Compendio de la salud humana de Johannes de Ketham.

54 Flaquer Montequi, R.:
Breve introducción a la historia del Señorío de Buitrago.

60 Alcalá Galvé, A.:
El sistema de Servet.

61 Mourão-Ferreira, D., y Ferreira, V.:
Dos estudios sobre literatura portuguesa contemporánea.

62 Manzano Arjona, M.ª:
Sistemas intermedios.

67 Acero Fernández, J. J.:
La teoría de los juegos semánticos. Una presentación.

68 Ortega López, M.:
El problema de la tierra en el expediente de Ley Agraria.

70 Martín Zorraquino, M.ª A.:
Construcciones pronominales anómalas.

71 Fernández Bastarreche, F.:
Sociología del ejército español en el siglo XIX.

72 García Casanova, J. F.:
La filosofía hegeliana en la España del siglo XIX.

73 Meya Llopart, M.:
Procesamiento de datos lingüísticos. Modelo de traducción automática del español al alemán.

75 Artola Gallego, M.:
El modelo constitucional español del siglo XIX.

77 Almagro-Gorbea, M., y otros:
C-14 y Prehistoria de la Península Ibérica.

94 Falcón Márquez, T.:
La Catedral de Sevilla.

98 Vega Cernuda, S. D.:
J. S. Bach y los sistemas contrapuntísticos.

100 Alonso Tapia, J.:
El desorden formal de pensamiento en la esquizofrenia.

102 Fuentes Florido, F.:
Rafael Cansinos Assens (novelista, poeta, crítico, ensayista y traductor).

110 Pitarch, A. J., y Dalmases Balañá, N.:
El diseño artístico y su influencia en la industria (arte e industria en España desde finales del siglo XVII hasta los inicios del XX).

113 Contreras Gay, J.:
Problemática militar en el interior de la península durante el siglo XVII. El modelo de Granada como organización militar de un municipio.

116 Laguillo Menéndez-Tolosa, R.:
Aspectos de la realeza mítica: el problema de la sucesión en Grecia antigua.

117 Janés Nadal, C.:
Vladimir Holan. Poesía.

118 Capel Martínez, R. M.ª:
La mujer española en el mundo del trabajo. 1900-1930.

119 Pere Julià:
El formalismo en psicolingüística: Reflexiones metodológicas.

126 Mir Curcó, C.:
Elecciones Legislativas en Lérida durante la Restauración y la II República: Geografía del voto.

130 Reyes Cano, R.:
Medievalismo y renacentismo en la obra poética de Cristóbal de Castillejo.

133 Portela Silva, E.:
La colonización cisterciense en Galicia (1142-1250).

134 Navarro Mauro, C.:
La terapia de pareja según la teoría sistémica.

138 Peláez Manuel, J.:
Las relaciones económicas entre Cataluña e Italia, desde 1472 a 1516, a través de los contratos de seguro marítimo.

142 Reyero Hermosilla, C.:
Gregorio Martínez Sierra y su Teatro de Arte.

Serie Verde

(Matemáticas, Física, Química, Biología, Medicina)

2 Mulet, A.:
Calculador en una operación de rectificación discontinua.

4 Santiuste, J. M.:
Combustión de compuestos oxigenados.

5 Vicent López, J. L.:
Películas ferromagnéticas a baja temperatura.

7 Salvá Lacombe, J. A.:
Mantenimiento del hígado dador in vitro en cirugía experimental.

8 Plá Carrera, J.:
Estructuras algebraicas de los sistemas lógicos deductivos.

11 Drake Moyano, J. M.:
Simulación electrónica del aparato vestibular.

19 Purroy Unanua, A.:
Estudios sobre la hormona Natriurética.

20 Serrano Molina, J. S.:
Análisis de acciones miocárdicas de bloqueantes Beta-adrenérgicos.

22 Pascual Acosta, A.:
Algunos tópicos sobre teoría de la información.

25 I Semana de Biología:
Neurobiología.

26 I Semana de Biología:
Genética.

27 I Semana de Biología:
Genética.

28 Zugasti Arbizu, V.:
Analizador diferencial digital para control en tiempo real.

29 Alonso, J. A.:
Transferencia de carga en aleaciones binarias.

30 Sebastián Franco, J. L.:
Estabilidad de osciladores no sinusoidales en el rango de microondas.

39 Blasco Olcina, J. L.:
Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos.

44 Sánchez Rodríguez, L.:
Estudio de mutantes de saccharomyces cerevisiae.

45 Acha Catalina, J. I.:
Sistema automático para la exploración del campo visual.

47 García-Sancho Martín, F. J.:
Uso del ácido salicílico para la medida del pH intracelular.

48 García García, A.:
Relación entre iones calcio, fármacos ionóforos y liberación de noradrenalina.

49 Trillas, E., y Alsina C.:
Introducción a los espacios métricos generalizados.

50 Pando Ramos, E.:
Síntesis de antibióticos aminoglicosídicos modificados.

51 Orozco, F., y López-Fanjul, C.:
Utilización óptima de las diferencias genéticas entre razas en la mejora.

52 Gallego Fernández, A.:
Adaptación visual.

55 Castellet Solanas, M.:
Una contribución al estudio de las teorías de cohomología generalizadas.

56 Sánchez Lazo, P.:
Fructosa 1,6 Bisfosfatasa de hígado de conejo: modificación por proteasas lisosomales.

57 Carrasco Llamas, L.:
Estudios sobre la expresión genética de virus animales.

59 Afonso Rodríguez, C. N.:
Efectos magneto-ópticos de simetría par en metales ferromagnéticos.

63 Vidal Costa, F.:
A la escucha de los sonidos cerca de $T\lambda$ en el 4_{He} líquido.

65 Andréu Morales, J. M.:
Una proteína asociada a membrana y sus subunidades.

66 Blázquez Fernández, E.:
Desarrollo ontogénico de los receptores de membrana para insulina y glucagón.

69 Vallejo Vicente, M.:
Razas vacunas autóctonas en vías de extinción.

76 Martín Pérez, R. C.:
Estudio de la susceptibilidad magnetoeléctrica en el Cr_2O_3 policristalino.

80 Guerra Suárez, M.ª D.:
Reacción de Amidas con compuestos organoalumínicos.

82 Lamas de León, L.:
Mecanismo de las reacciones de iodación y acoplamiento en el tiroides.

84 Repollés Moliner, J.:
Nitrosación de aminas secundarias como factor de carcinogénesis ambiental.

86 II Semana de Biología:
Flora y fauna acuáticas.

87 II Semana de Biología:
Botánica.

88 II Semana de Biología:
Zoología.

89 II Semana de Biología:
Zoología.

91 Viéitez Martín, J. M.:
Ecología comparada de dos playas de las Rías de Pontevedra y Vigo.

92 Cortijo Mérida, M., y García Blanco, F.:
Estudios estructurales de la glucógeno fosforilasa b.

93 Aguilar Benítez de Lugo, E.:
Regulación de la secreción de LH y prolactina en cuadros anovulatorios experimentales.

95 Bueno de las Heras, J. L.:
Empleo de polielectrolitos para la floculación de suspensiones de partículas de carbón.

96 Núñez Alvarez, C., y Ballester Pérez, A.:
Lixiviación del cinabrio mediante el empleo de agentes complejantes.

101 Fernández de Heredia, C.:
Regulación de la expresión genética a nivel de transcripción durante la diferenciación de Artemia salina.

103 Guix Pericas, M.:
Estudio morfométrico, óptico y ultraestructural de los inmunocitos en la enfermedad celíaca.

105 Llobera i Sande, M.:
Gluconeogénesis «in vivo» en ratas sometidas a distintos estados tiroideos.

106 Usón Finkenzeller, J. M.:
Estudio clásico de las correcciones radiactivas en el átomo de hidrógeno.

107 Galián Jiménez, R.:
Teoría de la dimensión.

111 Obregón Perea, J. M.ª:
Detección precoz del hipotiroidismo congénito.

115 Cacicedo Egües, L.:
Mecanismos moleculares de acción de hormonas tiroideas sobre la regulación de la hormona tirótropa.

121 Rodríguez García, R.:
Caracterización de lisozimas de diferentes especies.

122 Carravedo Fantova, M.:
Introducción a las Orquídeas Españolas.

125 Martínez-Almoyna Rullán, C.:
Contribución al estudio de la Manometría Ano-rectal en niños normales y con alteraciones de la continencia anal.

127 Marro, J.:
Dinámica de transiciones de fase: Teoría y simulación numérica de la evolución temporal de aleaciones metálicas enfriadas rápidamente.

129 Gracia García, M.:
Estudio de cerámicas de interés arqueológico por espectroscopia Mössbauer.

131 García Sevilla, J. A.:
Receptores opiáceos, endorfinas y regulación de la síntesis de monoaminas en el sistema nervioso central.

132 Rodríguez de Bodas, A.:
Aplicación de la espectroscopía de RPE al estudio conformacional del ribosoma y el tRNA.

136 Aragón Reyes, J. J.:
Interacción del Ciclo de los Purín Nucleótidos con el Ciclo del Acido Cítrico en Músculo Esquelético de Rata durante el Ejercicio.

139 Genís Gálvez, J. M.:
Estudio citológico de la retina del camaleón.

140 Segura Cámara, P. M.:
Las sales de tiazolio ancladas a soporte polimérico insoluble como catalizadores en química orgánica.

141 Vicent López, J. L.:
Efectos anómalos de transporte eléctrico en conductores a baja temperatura.

Serie Roja

(Geología, Ciencias Agrarias, Ingeniería, Arquitectura y Urbanismo)

3 Velasco, F.:
Skarns en el batolito de Santa Olalla.

6 Alemán Vega, J.:
Flujo inestable de los polímeros fundidos.

9 Fernández-Longoria Pinazo, F.:
El fenómeno de inercia en la renovación de la estructura urbana.

13 Fernández García, M.ª P.:
Estudio geomorfológico del Macizo Central de Gredos.

15 Ruiz López, F.:
Proyecto de inversión en una empresa de energía eléctrica.

23 Bastarreche Alfaro, M.:
Un modelo simple estático.

24 Martín Sánchez, J. M.:
Moderna teoría de control: método adaptativo-predictivo.

31 Zapata Ferrer, J.:
Estudio de los transistores FET de microondas en puerta común.

33 Ordóñez Delgado, S.:
Las Bauxitas españolas como mena de aluminio.

35 Jouvé de la Barreda, N.:
Obtención de series aneuploides en variedades españolas de trigo común.

36 Alarcón Alvarez, E.:
Efectos dinámicos aleatorios en túneles y obras subterráneas.

38 Lasa Dolhagaray, J. M., y Silván López, A.:
Factores que influyen en el espigado de la remolacha azucarera.

41 Sandoval Hernández, F.:
Comunicación por fibras ópticas.

42 Pero-Sanz Elorz, J. A.:
Representación tridimensional de texturas en chapas metálicas del sistema cúbico.

43 Santiago-Alvarez, C.:
Virus de insectos: multiplicación, aislamiento y bioensayo de Baculovirus.

46 Ruiz Altisent, M.:
Propiedades físicas de las variedades de tomate para recolección mecánica.

58 Serradilla Manrique, J. M.:
Crecimiento, eficacia biológica y variabilidad genética en poblaciones de dípteros.

64 Farré Muntaner, J. R.:
Simulación cardiovascular mediante un computador híbrido.

79 Fraga González, B. M.:
Las Giberelinas. Aportaciones al estudio de su ruta biosintética.

81 Yáñez Parareda, G.:
Sobre arquitectura solar.

83 Díez Viejobueno, C.:
La Economía y la Geomatemática en prospección geoquímica.

90 Pernas Galí, F.:
Master en Planificación y Diseño de Servicios Sanitarios.

97 Joyanes Pérez, M.ª G.:
Estudio sobre el valor nutritivo de la proteína del mejillón y de su concentrado proteico.

99 Fernández Escobar, R.:
Factores que afectan a la polinización y cuajado de frutos en olivo (Olea europaea L.).

104 Oriol Marfá i Pagés, J.:
Economía de la producción de flor cortada en la Comarca de el Meresme.

109 García del Cura, M.ª A.:
Las sales sódicas, calcosódicas y magnésicas de la cuenca del Tajo.

112 García-Arenal Rodríguez, F.:
Mecanismos de defensa activa en las plantas ante los patógenos. Las Fitoalexinas en la interacción Phaseolus vulgaris-Botrytis cinerea.

114 Santos Guerra, A.:
Contribución al conocimiento de la flora y vegetación de la isla de Hierro (Islas Canarias).

120 Vendrell Saz, M.:
Propiedades ópticas de minerales absorbentes y su relación con las propiedades eléctricas.

123 Pulido Bosch, A.:
Datos hidrogeológicos sobre el borde occidental de Sierra Nevada.

137 Berga Casafont, Luis:
Estudio del comportamiento reológico de la sangre humana. Aplicaciones al flujo sanguíneo.

Serie Azul

(Derecho, Economía, Ciencias Sociales, Comunicación Social)

17 Ruiz Bravo, G.:
Modelos econométricos en el enfoque objetivos-instrumentos.

34 Durán López, F.:
Los grupos profesionales en la prestación de trabajo: obreros y empleados.

37 Lázaro Carreter, F., y otros:
Lenguaje en periodismo escrito.

74 Hernández Lafuente, A.:
La Constitución de 1931 y la autonomía regional.

78 Martín Serrano, M., y otros:
Seminario sobre Cultura en Periodismo.

85 Sirera Ollag, M.ª J.:
Las enseñanzas secundarias en el País Valenciano.

108 Orizo, F. A.:
Factores socio-culturales y comportamientos económicos.

124 Roldán Barber, H.:
La naturaleza jurídica del estado de necesidad en el Código Penal Español: critica a la teoría de la exigibilidad de la conducta adecuada a la norma.

128 De Esteban Alonso, J.:
Los condicionamientos e intensidad de la participación política.

135 Santillana del Barrio, I.:
Evaluación de los costes y beneficios de proyectos públicos: referencia al coste de oportunidad en situaciones de desempleo.