

La Serie Universitaria de la Fundación Juan March presenta resúmenes, realizados por el propio autor, de algunos estudios e investigaciones llevados a cabo por los becarios de la Fundación y aprobados por los Asesores Secretarios de los distintos Departamentos.

El texto íntegro de las Memorias correspondientes se encuentra en la Biblioteca de la Fundación (Castelló, 77. Madrid-6).

La lista completa de los trabajos aprobados se presenta, en forma de fichas, en los Cuadernos Bibliográficos que publica la Fundación Juan March.

*Los trabajos publicados en Serie Universitaria abarcan las siguientes especialidades:
Arquitectura y Urbanismo; Artes Plásticas;
Biología; Ciencias Agrarias; Ciencias Sociales;
Comunicación Social; Derecho; Economía; Filosofía;
Física; Geología; Historia; Ingeniería;
Literatura y Filología; Matemáticas; Medicina,
Farmacia y Veterinaria; Música; Química; Teología.
A ellas corresponden los colores de la cubierta.*

Edición no venal de 300 ejemplares
que se reparte gratuitamente a investigadores,
Bibliotecas y Centros especializados de toda España.

Fundación Juan March



FJM-Uni 163-Fer
Estudio analítico del movimiento de r
Ferrándiz Leal, José Manuel.
1031530



Biblioteca FJM

Fundación Juan March (Madrid)

163 Estudio analítico del movimiento de rotación lunar / José Manuel Ferrándiz Leal

SERIE UNIVERSITARIA



Fundación Juan March

José Manuel Ferrándiz Leal

**Estudio analítico del movimiento
de rotación lunar**

FJM
Uni-
163
Fer
163

Fundación Juan March
Serie Universitaria



163

José Manuel Ferrándiz Leal

Estudio analítico del movimiento
de rotación lunar



Fundación Juan March
Castelló, 77. Telef. 225 44 55
Madrid - 6

*Este trabajo fue realizado con una Beca de la
Convocatoria de España, 1979, individual
Departamento de MATEMÁTICAS
Centro de Trabajo: Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos de la
Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza.*

Los textos publicados en esta Serie Universitaria son elaborados por los propios autores e impresos por reproducción fotostática.

Depósito Legal: M - 31420 - 1981

I.S.B.N.: 84 - 7075 - 215 - 4

Impresión: Gráficas Ibérica, Tarragona, 34, Madrid-7

I N D I C E

	<u>Página</u>
CAPITULO I: INTRODUCCION	7
CAPITULO II: FORMULACION HAMILTONIANA DEL PROBLEMA DE LA ROTACION LUNAR	16
2.1. Referencia a un equinoccio móvil	17
2.2. Principales influencias perturbadoras	19
2.3. Expresión del potencial en variables de Andoyer	21
CAPITULO III: INTEGRACION DE PRIMER ORDEN	24
3.1. Transformación del hamiltoniano	24
3.2. Análisis de los distintos términos de la perturbación	27
3.3. Eliminación de los términos periódicos ordinarios	28
3.4. Libraciones en torno al equilibrio	30
CAPITULO IV: EXTENSION A ORDENES SUPERIORES DE PERTURBACION	34
4.1. Eliminación de los términos periódicos no resonantes	36
4.2. Eliminación de los términos resonantes débiles de primer orden.	37
4.3. Eliminación de los términos débilmente resonantes de segundo orden.	37
V. BIBLIOGRAFIA	39

CAPITULO I.- INTRODUCCION

En la primera mitad del siglo XVII, Galileo Galilei observó con el telescopio de su invención, que los puntos del disco lunar cambiaban de posición, aproximándose, bien hacia el este, bien hacia el oeste del limbo. Algo más tarde, el famoso selénografo John Hevelius apreció oscilaciones semejantes de los accidentes de la superficie lunar, en dirección norte-sur. Con ésto, el problema de la cartografía lunar revelaba su dependencia del estudio de la rotación de nuestro satélite alrededor del centro de masas. Quizá la primera explicación de estas libraciones se encuentra en los Principia de Newton (1.686). donde se atribuyen al hecho de que, mientras la velocidad orbital de la Luna es variable, la rotación se efectuaría de un modo uniforme, alrededor de un eje inclinado con respecto al plano de la órbita. Fué, sin embargo, Jean Dominique Cassini quien dió en 1.693 una descripción sencilla y elegante de la rotación lunar como superposición de dos movimientos uniformes, sincronizados con el período sidéreo y la precesión de su órbita, y que en nuestros días sigue utilizándose como primera aproximación de dicho movimiento. Esta primera teoría de la libración fué publicada por su hijo en 1.721, y en esencia puede resumirse en las dos leyes siguientes:

- 1) La Luna gira uniformemente alrededor de su eje polar, con un período igual al período sidéreo medio de su movimiento orbital relativo a la Tierra.

- 2) El nodo descendente del ecuador lunar, respecto a la eclíptica

tica, tiene un movimiento de precesión en coincidencia con el nodo ascendente de su órbita.

Cassini dió para la inclinación constante del ecuador lunar respecto a la eclíptica el valor de $2^{\circ},5$ sobreestimando así en un grado la magnitud de los valores usuales en la actualidad. A finales del pasado siglo, las leyes anteriores fueron modificadas en el sentido de añadir una tercera ley, afirmando que la citada inclinación era constante (Tisserand, 1.891).

La primera publicación de datos de observación que confirmaran estas leyes parece deberse a Tobías Mayer (1.750), quién mejoró la estimación de Cassini sobre la inclinación del ecuador lunar asignándole un valor de $1^{\circ}29'$, inferior en unos $230''$ al aceptado hoy. Con ésto, las libraciones podían predecirse con una precisión cercana a $1''$ de ángulo geocéntrico.

El conocimiento teórico de la libración lunar progresó con bastante rapidez, ya que en aquellas fechas comenzaron a desarrollarse las teorías sobre movimiento de sólidos. Así, mientras D'Alembert discutió el movimiento de un cuerpo rígido, Euler derivó las ecuaciones diferenciales que llevan su nombre, y que han sido frecuentemente aplicadas en estos estudios. Por su parte, Lagrange construyó en 1780 la primera teoría precisa de la libración lunar, sobre la base de la ley de gravitación de Newton, que fué suplementanda más tarde por trabajos de Laplace y Poisson. Dicha teoría, recogida en el tratado de Tisserand (1.891), proporcionaba una precisión superior a la de las observaciones, durante un período que se prolonga casi hasta 1.970, lo que le da un puesto relevante, dada la gran cantidad de observaciones realizadas en ese espacio de tiempo.

Así, en 1.839 Bessel inició el uso del heliómetro para las observaciones de la rotación lunar, que fué continuado por sus discípulos Schlutter y Wichman (1.846, 1.847). Merece especial mención la labor de Hartwig, que dejó tres series de observaciones heliométricas del crater Mosting A : la de Strassburgo, con 42 noches de observación en un período que abarca de 1.877 a 1.879, la de Dorpat, con 36 observaciones de 1.884 a 1.885, y la tercera, que comprende 266 observaciones desde 1.880 hasta

1.922, y que es la mayor serie realizada por un solo observador. Finalmente hay que citar el gran programa heliométrico desarrollado en el observatorio Engelhardt de Kazan, con unas 1.100 observaciones efectuadas entre 1.895 y 1.963 por diversos astrónomos.

A pesar de que, como hemos señalado, la teoría de Lagrange podía considerarse perfecta desde el punto de vista de las observaciones heliométricas, continuaron elaborándose teorías mejoradas de la libración lunar desde el comienzo del presente siglo. En estas, las coordenadas del centro de masas lunar se expresan como series de Poisson con coeficientes numéricos y argumentos literales, por lo que se clasifican habitualmente como "semianalíticas", denominación quizás algo imprecisa, porque los métodos de integración empleados son muy diversos, variando desde los analíticos a otros predominantemente numéricos.

Entre ellas, cabe destacar como básica la teoría de Hayn, cuya primera versión apareció en 1.902, y que fué mejorada en 1.920. En ésta, se procede a una integración de las ecuaciones de Euler para la rotación, suponiendo que la posición del centro de masas lunar viene dada por la teoría de Hansen, y se posibilita dicha integración merced a varios artificios, que incluyen una linealización previa. Sus resultados son bastante buenos - (Eckhardt, 1.980), y fueron confirmados, aunque solo parcialmente, por Jonson (1.917), quien empleó las coordenadas rectangulares y las ecuaciones de Langrange, como haría más tarde Jeffreys (1.955). Aunque este último autor no llegó a dar los valores numéricos finales de las cantidades requeridas, son varios los artículos de Jeffreys relacionados con las libraciones (1.936, 1.957, 1.961, 1.962, 1.970, 1.972).

La teoría de Hayn fué modificada por Koziel (1.948, 1.962), utilizando la solución de Brown para describir el movimiento orbital y acompañándola con métodos mejorados de reducción de observaciones y ajuste de parámetros (1.967, 1.970), que le llevaron incluso a obtener expresiones de las libraciones libres. Con

todo, esta parte de su trabajo ha sido muy criticada por diversos autores, como Kopal, Arthur, etc., ya que siendo la resolución del heliómetro de 1" aproximadamente, no parece correcto intentar obtener errores del orden de unas centésimas de segundo, pues ello equivaldría a efectuar la hipótesis de que todos los errores de observación son aleatorios.

Por otra parte, el método de Hayn da lugar a la aparición de pequeños divisores, que ponen en cuestión algunas de las hipótesis de trabajo de dicho autor y perjudican la bondad de la solución.

Muy próximas a estas teorías se encuentran, las primeras versiones de Eckhardt (1.965, 1.967), quien utiliza unas ecuaciones diferenciales semejantes a las de Euler, con las variables τ , p_1 y p_2 (libración en longitud, y cosenos directores primero y segundo del polo de la eclíptica, en el sistema lunar de ejes principales) como incógnitas. Estas ecuaciones son modificadas para llevarlas a la forma

$$T x = y + (T - R) x$$

donde T y R son operadores diferenciales, el primero lineal e inversible, y la solución se halla por aproximaciones sucesivas en un computador digital. Naturalmente, subsisten en ella - problemas análogos de pequeños divisores.

Un grupo aparte está constituido por el conjunto de teorías que se desarrollaron en las dos últimas décadas en la Unión Soviética, siguiendo una línea bien diferente. Destacan los artículos de Kondurar (1.962, 1.964), Ossipof (1.969, 1.970, 1.973) y Erokshin (1.974), quienes consideran conjuntamente los movimientos orbital y de rotación de la Luna, sin recurrir a la aproximación usual de suponer el primero de ellos como independiente del segundo.

Esta forma de plantear el problema es la natural en el estudio del movimiento de un sólido, aunque debido a la extrema dificultad de la integración correspondiente, es de hecho la menos utilizada. Su aplicación a la teoría lunar es recomendada por -

Kondurar, debido a la precisión alcanzada por la teoría de Brown, que incluso parece aumentada en la actualidad por algunas nuevas integraciones.

En estos últimos estudios se emplean métodos no canónicos de perturbaciones basados en el del pequeño parámetro de Poincaré, y se aprovecha la proximidad del movimiento a una de las soluciones de equilibrio dinámico denominadas regulares por Duboshin (1.958). En general no se considera la influencia solar, o se concreta en unas hipótesis restringidas del tipo de Hill. Los resultados son bastante limitados, pudiendo esto atribuirse al manejo de variables inadecuadas para la aplicación de métodos de perturbaciones más potentes y precisos, que permitieran calcular separadamente las perturbaciones seculares y periódicas.

Un planteamiento análogo del problema, pero con un tratamiento bien diferente se encuentra en el estudio del sistema Tierra-Luna realizado por el autor(1979), donde se trata el movimiento conjunto en forma hamiltoniana, aunque despreciando la influencia del Sol, por lo que puede considerarse como un primer paso de una teoría más general del sistema Tierra-Luna-Sol.

El panorama expuesto sufrió un cambio radical con la instalación, sobre la superficie lunar, de diversos reflectores y transmisores de radio, llevada a cabo en las misiones Apollo. Esto permitió comenzar en 1969 un gigantesco programa de observación, integrado en el experimento LURE (Lunar Laser Ranging Experiment), que se centró desde 1970 en el Observatorio McDonald. En él se aplican principalmente los métodos de laser a la medida de distancias Tierra-Luna, junto con otros métodos como los de interferometría diferencial VLBI (very long baseline interferometry). En la actualidad, se estima que la distancia Tierra-Luna se puede determinar con un error medio de unos 13 cm. (Williams, 1977), que se espera rebajar a solo 3 cm. en los próximos años (Kovalevsky, 1977), habiéndose aumentado así la precisión global de las antiguas observaciones heliométricas en un factor de 10^3 a 10^4 . Ante esto, las teorías clásicas se re-

velan insuficientes, y las que se desarrollan en la actualidad apenas pueden incluir, con la exactitud requerida, las mayores influencias, proporcionando residuos medios del orden de 30 a 40 cm.

Las técnicas empleadas en estas observaciones son de gran complejidad, pudiendo encontrarse una descripción bastante completa en un artículo de Mulholland (1.977). Los datos medidos son esencialmente dos: el instante en que el laser fué disparado, y el de detección de un fotón reflejado en los reflectores colocados sobre la Luna. Además, resulta necesario conocer una primera aproximación del instante de regreso del fotón, lo cual supone complicados cálculos. Si la primera medida de tiempo se realiza en tiempo universal coordinado (U. T.C.), hay que obtener los instantes correspondientes en otras dos escalas, de tiempo universal UT1 y tiempo de efemérides (E T), llevando en cuenta la corrección relativista. También se debe conocer la posición precisa del emisor, que incluye los efectos de nutación, precesión, rotación de la Tierra y mareas, así como la del reflector lunar, lo cual supone disponer de una primera aproximación de su posición en el espacio, teniendo en cuenta naturalmente las libraciones, y de nuevo la posición del receptor. Considerando estos factores y algunos otros, así como diversas correcciones empíricas e instrumentales, se obtiene un instante (calculado) de regreso del fotón, que interviene en la reducción y filtrado de los datos, y se compara con el observado.

La diferencia entre ambos corresponderá en parte a las limitaciones de los modelos matemáticos empleados, y también a los naturales errores aleatorios. A partir de estos residuos deben mejorarse los parámetros de las teorías utilizadas, o contrastar otras nuevas, así como perfeccionar el conocimiento de otros efectos no despreciables, como variaciones en la escala de tiempo, posición del telescopio y del reflector, estado de la atmósfera, mareas lunares, aceleraciones seculares, etc.

En general se emplean integraciones numéricas para obtener el instante calculado de detección y, ciñéndonos a las relati-

vas a la libraci3n, podemos citar las teorías de alta precisi3n de Williams (1.977) o Capallo et alt. (1.980), ambas numéricas, o las semianalíticas de Eckhardt (1.972, 1.980), utilizadas ocasionalmente. Sin embargo, resulta conveniente el empleo de teorías analíticas o semianalíticas, pues presentan algunas ventajas, ya que pueden ser usadas para separar las libraciones libres y forzadas, determinando de modo más preciso algunos parámetros implicados, como los de inercia de la Luna, las constantes de las libraciones libres, etc., y además son más reveladoras de la dinámica del sistema. Por ello se están desarrollando en la actualidad varias teorías semianalíticas. Entre ellas, debemos señalar en primer lugar la denominada Serie 500 de Eckhardt (1.980), que incluye los armónicos hasta el tercer orden, y emplea la solución A.L.E. de Deprit, Henrard y Room (1.972) para especificar la órbita lunar, con las correcciones planetarias y correspondientes a la figura de la Tierra de la teoría I.L.E. de Eckert et alt. (1.954, 1.966), derivada principalmente de Brown. Además obtiene correcciones que contienen efectos de los armónicos de cuarto orden y de no rigidez. El método utilizado para obtener la solución es el mismo de sus primeras teorías, efectuando las integraciones por aproximaciones sucesivas en un computador de alta velocidad, y asignando desde un principio valores numéricos a los parámetros lunares considerados, por lo cual no puede considerarse como analítica en un alto grado.

Un método más analítico es el empleado por Migus (1.975, 1.977) aunque finalmente recurre a la integración por iteraciones. Más interesante desde nuestro punto de vista resulta el trabajo iniciado por Henrard y Moons (1.978), que sienta las bases para una teoría hamiltoniana que está siendo desarrollada por Moons para obtener resultados de alta precisión. En ella se comienza por desarrollar el hamiltoniano en serie de potencias en torno a la posición de equilibrio medio, con el fin de hallar las frecuencias fundamentales de las libraciones libres e introducir variables de acción-ángulo, y, tras expresar de nuevo la perturbación

como una serie de Poisson, se aplican métodos de perturbaciones basados en las series de Lie. Los resultados obtenidos - por Moons (1.980) nos fueron remitidos después de concluir el presente trabajo, e incluyen los armónicos lunares hasta el tercer orden, presentando ligeras discrepancias con las soluciones citadas, de Eckhardt y Migus. Por otra parte, el movimiento orbital se toma de la solución de Chapront-Touzé (1979).

En este estudio se ha intentado elaborar una teoría que pudiera calificarse como "más analítica" que las anteriores. En ella se aplica fundamentalmente el método de Deprit al problema expresado en las variables canónicas de Andoyer, y se pospone el cálculo de las frecuencias naturales de oscilación, y las libraciones libres, que en este problema expresan el movimiento secular, a las últimas fases de la integración, una vez obtenidas casi todas las perturbaciones periódicas. De este modo pueden evitarse los problemas inherentes a los desarrollos en serie, y truncaciones consiguientes, previos a la integración propiamente dicha en el esquema ideado por Henrard y Moons. Se incluyen los armónicos del potencial lunar hasta el tercer orden, y también el movimiento de la eclíptica y el punto vernal, que parece ser despreciado por Moons, aunque su influencia es superior a la de algunos términos de tercer orden. Las series finales no se expresan solamente en los argumentos habituales, l , l' , F , D y H , sino que se conservan las variables de Andoyer, con el fin de poder asignar valores numéricos a las diferencias $\lambda - h$ a partir de las soluciones correspondientes a las libraciones libres, sin tomar por tanto tal diferencia como nula, ya que la amplitud de la oscilación libre correspondiente a $\lambda - h$ puede estimarse que es del orden de, $\text{sen } 1^\circ$, $\approx 0,026$.

Para concluir esta introducción, parece conveniente efectuar una breve referencia a la trascendencia de los estudios sobre libraciones, que puede ampliarse en Kovalevsky (1.977). Una teoría precisa, preferentemente analítica, permitiría obtener de forma satisfactoria las libraciones libres, cuyas constantes han sido determinadas parcialmente por Calame (1.976, 1.977).

De su conocimiento se derivarían consecuencias sobre la evaluación del factor de disipación Q , y la existencia y -magnitud de mecanismos de excitación, como son los impactos meteoríticos (Peale, 1.975, 1.976; Calame y Mulholland, 1978). Además, permitiría conocer con mayor precisión los parámetros de inercia de la Luna, así como el cociente C/mR^2 , que es de suma importancia para discutir la estructura interna de nuestro satélite. Naturalmente, los datos orbitales de satélites artificiales son también de gran interés para este fin, y se utilizan, en ocasiones en conexión con las -medidas por laser o VLBI. Los trabajos relacionados con estos temas son frecuentes en los últimos años (Sjogren, 1.971; Ferrari, 1.977; Bills y Ferrari, 1.977; Blackshear y Gapszynski, 1.977).

Por otra parte, se impulsa el progreso de la selenodesia, con el establecimiento de puntos normales de referencia (Abbot et al., 1.973; Shelus et al., 1.975; Mulholland et al., 1.975), y la mejora de la cartografía lunar, que es de gran importancia, no solo por los proyectos espaciales, sino por los programas de ocultaciones de estrellas, en los cuales es necesario conocer con precisión el perfil del limbo lunar.

Además, pueden obtenerse otros muchos resultados, entre los que destacan las correcciones a la escala de tiempo (King et al., 1.978), mejora de las posiciones de observatorios terrestres y del eje instantáneo de rotación de la Tierra, así como los referentes a las mareas lunares y aceleraciones seculares (Calame y Mulholland, 1.978; Williams et al., 1.978), posible variación de la constante de gravitación y verificación del principio de equivalencia para cuerpos masivos (Williams et al., 1.976; Shapiro et al., 1.976), determinación del número de Love lunar h_2 , y una extensa lista que da idea de las importantes repercusiones de los actuales estudios sobre la rotación lunar y temas afines.

CAPITULO II.- FORMULACION HAMILTONIANA DEL PROBLEMA DE LA ROTACION LUNAR.

Como la Luna es un cuerpo asimétrico, las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento orbital de su centro de masas y la rotación alrededor de dicho punto no son independientes, por lo que en principio han de integrarse simultáneamente. Sin embargo, en la mayoría de los problemas de Mecánica Celeste puede seguirse un procedimiento más simple, que consiste en obtener en primer lugar una solución para el movimiento orbital, con ciertas simplificaciones, y estudiar luego la rotación alrededor del c.d.m., considerando entonces sus coordenadas como funciones conocidas del tiempo. Con ello se desprecia el efecto de la rotación sobre el movimiento orbital, aunque en muchos casos se obtiene una aproximación suficiente. Además, en el problema lunar, las expresiones precisas de su movimiento orbital contienen correcciones que incluyen entre otros el efecto de la asimetría de los campos de potencial terrestre y lunar, por lo que se puede adoptar perfectamente este método de trabajo, que es el seguido en casi todas las investigaciones conocidas. En consecuencia la primera hipótesis consiste en suponer conocido el movimiento orbital de la Luna, que se tomará de la teoría de Brown (1910) revisada por Eckert o la S.A.L.E. de Henrard (1978).

Además, al desarrollar el potencial lunar, se supondrá que la Tierra y el Sol son cuerpos puntuales, lo que da lugar a la aparición de ciertas inexactitudes en el desarrollo de aquél. Considerando la expresión del potencial mutuo de dos sólidos tal como se da en Borderies (1978), los primeros términos despreciados

son los armónicos de cuarto orden factorizados por productos de los parámetros de inercia de segundo orden de la Tierra y la Luna, cuyo orden relativo al hamiltoniano no perturbado, viene a ser de 10^{-9} , por lo que su contribución a la solución habría de ser del orden de 10^{-4} segundos de arco. Esta simplificación es habitual en todos los estudios que conocemos, y puede considerarse lo suficientemente justificada como para no dejarse influir por los resultados de ciertas simulaciones numéricas de Breedlove (1977), que dieron para algunos de tales términos contribuciones de amplitud próxima a $0''.01'$

2.1. Referencia a un equinoccio móvil.

De acuerdo con el planteamiento precedente del problema, y escogiendo como variables canónicas las $(\lambda, \mu, \nu, \Lambda, M, N)$ de Andoyer (1923) -Cid y Correas (1973)- referidas a un equinoccio fijo (Figura 1), el hamiltoniano puede escribirse en la forma

$$H = T + V$$

siendo la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}(M^2 - N^2) \left\{ \left(\frac{\text{sen}^2 \nu}{A} + \frac{\text{cos}^2 \nu}{B} \right) + \frac{N^2}{2C} \right\} \quad (2.1)$$

Como las teorías que proporcionan el movimiento del c.d.m. de la Luna están referidas a un sistema de coordenadas eclípticas de la época, resulta conveniente expresar el hamiltoniano completo en la misma referencia. Esto puede lograrse sustituyendo las variables $(\lambda, \mu, \nu, \Lambda, M, N)$ por otras análogas, designadas con $(')$ (Figura 1), que pueden interpretarse como variables de - - Andoyer relacionando el sistema eclíptico de la época con el de ejes principales.

Efectuando un nuevo cambio

$$\lambda'' = \lambda' + \Psi(t) + \Pi(t) \qquad \Lambda'' = \Lambda'$$

donde Ψ es la precisión general en longitud, el nuevo hamiltoniano

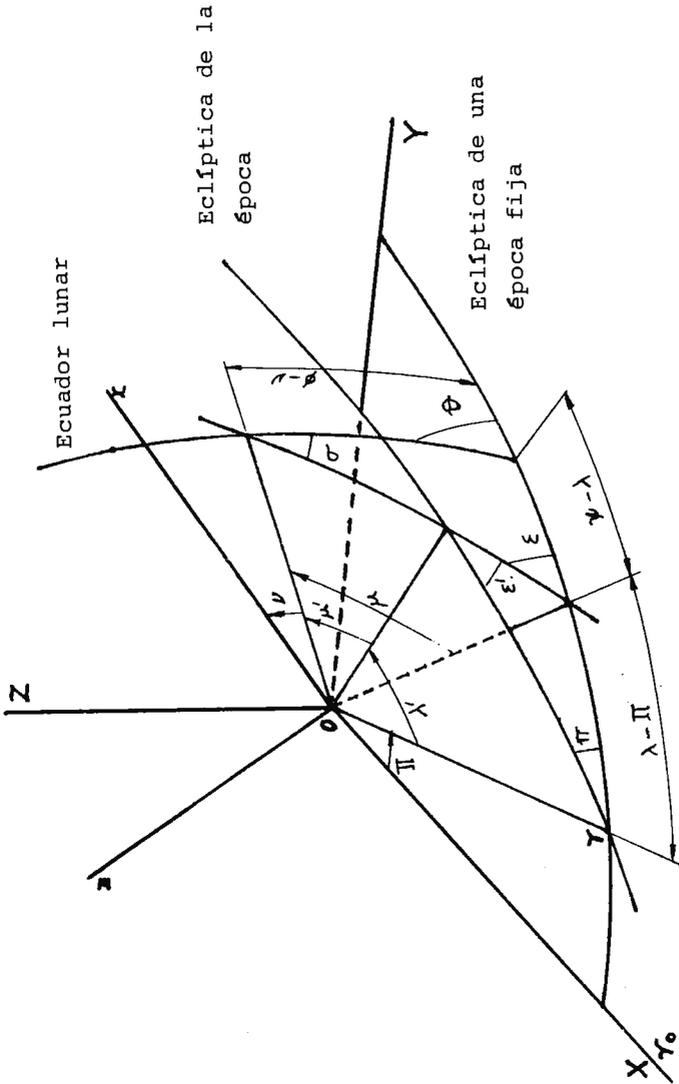


FIGURA 1

niano será ahora $F = T + V + E$, donde,

$$E = \frac{d\Pi}{dt} \{ \Lambda \cos \pi + M \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \pi \cos(\lambda - \Psi(t) - \Pi(t)) \} \\ + \frac{d\pi}{dt} M \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen}(\lambda - \Psi(t)) - \left(\frac{d\Psi}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} \right) \Lambda$$

Las funciones del tiempo π , Π y Ψ pueden obtenerse de fórmulas usuales, como las de Newcombe (1900) ó Kinoshita (1975).

2.2. Principales influencias perturbadoras.

En las hipótesis anteriores, la presencia de la Tierra en el campo gravitatorio lunar contribuye al potencial V con un sumando V_E que puede descomponerse en la forma

$$V_E = V_2 + \sum_{n=3}^{\infty} V_n \quad (2.2)$$

siendo

$$V_2 = \frac{GM_E}{r^3} \left\{ \frac{2 \text{ C-A-B}}{2} P_2(\operatorname{sen} \delta) + \frac{\text{A-B}}{4} P_2^2(\operatorname{sen} \delta) \cos 2\alpha \right\} \\ V_n = \frac{GM_E m R^n}{r^{n+1}} \left\{ J_n P_n(\operatorname{sen} \delta) - \sum_{m=1}^n P_n^m(\operatorname{sen} \delta) [C_{nm} \cos m\alpha + S_{nm} \operatorname{sen} m\alpha] \right\} \quad (2.3)$$

En las fórmulas precedentes G es la constante de gravitación; M_E y m las masas respectivas de la Tierra y la Luna; R el radio medio lunar; C_{nm} , S_{nm} , los coeficientes del potencial lunar; r la distancia entre los c.d.m. de ambos astros, α y δ la longitud y latitud selenocéntricas de la Tierra, referidas al sistema de ejes principales lunares; y P_n^m los polinomios asociados de Legendre.

Teniendo en cuenta las relaciones

$$\frac{V_2}{T} \sim \frac{M_E}{m + M_E} \frac{2 C-A-B}{2 C}, \quad \frac{V_n}{V_2} \sim \frac{J_n}{J_2} \left(\frac{R}{a} \right)^{n-2}$$

se deduce que los órdenes de los primeros armónicos de (2.2), relativos al término no perturbado, son aproximadamente

$$\frac{V_2}{T} \sim 5 \cdot 10^{-4} \quad \frac{V_3}{T} \sim 10^{-7} \quad \frac{V_4}{T} \sim 10^{-9} \quad (2.4)$$

Por su parte, el efecto directo del Sol proporciona un término aditivo V_S de V , cuya expresión es análoga a la de V_E . Designando por M_S , a' , la masa del Sol y el semieje mayor de su órbita, respectivamente, y teniendo en cuenta la igualdad

$$\frac{M_S}{M_E} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 = 0,056$$

el orden de este término resulta ser

$$\frac{V_S}{T} \sim 3 \cdot 10^{-6} \quad (2.5)$$

Además, como la razón del tercer armónico con respecto al segundo es $7 \cdot 10^{-7}$, basta considerar en V_S únicamente el término principal, que representaremos con este mismo símbolo.

Junto a estas perturbaciones existen otras de menor magnitud y difícilmente evaluables. La más importante procede de la elasticidad de la Luna, que se deforma bajo la acción de fuerzas derivadas de su potencial centrífugo V_C y de un potencial de mareas V_T ("tidal potential") inducido por la Tierra, pudiendo acumularse estos efectos a los precedentes si se añade al potencial $V_E + V_S$ un término $\delta V = V_C + V_T$, cuyo orden viene a ser

$$\delta V \sim 1,9 \cdot 10^{-5} h_2 \sim 3,8 \cdot 10^{-7} \quad (2.6)$$

si se toma, como valor más probable para el número de Love h_2 , el de 0,02 indicado por Harrison (1963). Dada la incertidumbre en el conocimiento del valor de h_2 , y la pequeña magnitud de la perturbación anterior, en este estudio se ha prescindido de su efecto, considerando, pues, la Luna como un sólido rígido. Además, como señala Kovalevsky (1977), la detección de las mareas lunares sería de gran dificultad, pues originarían desplazamientos superficiales de unos pocos centímetros, y posiblemente una variación de la rotación del orden de pocas centésimas de segundo de arco y período de un mes anomalístico (Peale, 1973), que se vería enmascarada por un término considerable del mismo período.

En cuanto a otras influencias, como podrían ser las planetarias, son de mucha menor magnitud (a lo sumo 10^{-10}), por lo que tampoco se han considerado, quedando la perturbación constituida por el potencial V , reducido a la suma de V_2 , V_3 y V_S , junto con la corrección aditiva E debida al movimiento de los planos fundamentales.

2.3. Expresión del potencial en variables de Andoyer.

El desarrollo del potencial en las variables canónicas consideradas se simplifica con el auxilio de una versión modificada del teorema de Wigner (1959) sobre transformación de armónicos esféricos bajo rotaciones del sistema de referencia, que puede encontrarse en Kinoshita et al. (1974). Aplicándola reiteradamente, resultan las igualdades siguientes

$$P_n^m(\sin \delta) e^{im\alpha} = \sum_{\rho, \tau = \pm 1} \sum_{m', m'' = 0}^{\infty} Q_n^{(m, m')}(\rho, \cos \sigma) \times Q_n^{(m', m'')}(\tau, \cos \epsilon) P_n^{m''}(\sin \beta') \exp\{i[m''\rho\tau(L' - \lambda) - m\nu - m'\rho\mu + \frac{\pi}{2}(m - m') + \frac{\pi}{2}\rho(m' - m'')]\}$$

donde L' y β' son la longitud y latitud selenocéntricas del cuerpo perturbador, y $Q_n^{(m,m')}$ los polinomios modificados de Jacobi (Kinoshita et al., 1974).

Con esto, la posición del cuerpo perturbador aparece solo en términos de la forma $P_n^m(\sin \beta') \exp(imL')$ y factores $1/r^{n+1}$. Limitándonos por brevedad al término V_2 de origen terrestre, las funciones anteriores pueden obtenerse a partir de las expresiones que para la parte periódica de la longitud, la latitud, y el seno de la paralaje lunar a/r proporcionan algunas teorías, como la clásica de Brown (1896, 1910), o las recientes de Henrard (1972, 1978).

Tales expresiones son series de Poisson con coeficientes numéricos, y argumentos que son combinaciones lineales de las variables D , l' , λ y F , habituales en la teoría lunar. Debido a ello, la obtención de las funciones de L' , β' y r necesarias requiere engorrosos cálculos, que implican numerosas operaciones con series de Poisson, y en particular productos de series de longitud considerable. Ante la imposibilidad práctica de su realización por cálculo manual, se construyó un reducido manipulador simbólico que permite efectuar automáticamente las operaciones fundamentales con series del tipo considerado, incluyendo su truncación automática en el límite de error deseado, así como los procesos básicos de definición, almacenamiento y destrucción, entre otros. Los cálculos se efectuaron en un ordenador del tipo - - PDP 11/t 55 del Centro de Cálculo de la Universidad de Zaragoza, tomando los coeficientes numéricos en simple precisión, y utilizando como datos de entrada las series proporcionadas por la teoría S.A.L.E. de Henrard (1978), con precisión de 1" para latitud y longitud y de 0", 15 para el seno de la paralaje, lo que debe proporcionar una exactitud relativa aproximada de 10^{-6} , en el desarrollo de V_2 .

De este modo se llega a una expresión de V como serie de Poisson, cuyos términos son de la forma

$$K A_i^{(j)} X(\sigma) Y(\epsilon) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\alpha + \theta_i^{(j)})$$

donde K es un parámetro de inercia, $A_i^{(j)}$ coeficientes numéricos, X e Y funciones respectivas de los ángulos σ y ϵ , dependientes de los momentos, y $\alpha, \theta_i^{(j)}$, argumentos combinación lineal de las variables de Andoyer y de las D, ℓ', ℓ, F y h , respectivamente.

CAPITULO III.- INTEGRACION DE PRIMER ORDEN

La integración de las ecuaciones que rigen la rotación lunar es un problema sumamente complejo, ya que el hamiltoniano del mismo puede considerarse como perturbación de un problema altamente degenerado, a causa de los fenómenos de resonancia que presenta. En este capítulo se procede a una integración de primer orden, despreciando los armónicos de tercer orden debidos a la acción de la Tierra, que proporciona una precisión teórica de unos $0",5$ en la representación de las libraciones forzadas, algo superior a la de las teorías clásicas de la etapa heliométrica.

El método empleado consta esencialmente de dos fases. En la primera, tras una adecuada transformación y clasificación de los términos del hamiltoniano, se aplica el método de Deprit a la eliminación de los términos periódicos ordinarios, mientras que en la segunda se estudian las libraciones libres en torno al equilibrio definido por las leyes de Cassini. Este procedimiento es susceptible de ser extendido a órdenes superiores de perturbación, como se hará en el capítulo siguiente, y se desarrollará brevemente en los párrafos sucesivos.

3.1. Transformación del hamiltoniano.

En el presente problema, el hamiltoniano puede escribirse en la forma

$$H = T + V_2 + V_S + E_0$$

donde los términos de perturbación son de la forma

$$E_0 = - \frac{d\Psi}{dt} \Lambda - \frac{d\Pi}{dt} \Lambda + \frac{d\Pi}{dt} \Lambda \cos \pi$$

$$V_2 = K_1 \left\{ \frac{1}{2} (3 c_\sigma^2 - 1) U_{00} - \frac{1}{2} s_{2\sigma} U_{10} + \frac{1}{4} s_\sigma^2 U_{20} \right\} \\ + K_2 \left\{ \frac{3}{2} s_\sigma^2 U_{02} + \sum_{\rho = \pm 1} \left[\rho s_\sigma (1 + \rho c_\sigma) U_{1,2\rho} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} (1 + \rho c_\sigma)^2 U_{2,2\rho} \right] \right\} \quad (3.1)$$

siendo la expresión de V_S análoga a la de V_2 , y habiéndose empleado las notaciones $s_x = \sin x$, $c_x = \cos x$. Por su parte, las constantes y funciones contenidas en (3.1) se definen así

$$K_1 = \frac{3G M_E}{a^3} \frac{2 C-A-B}{2} \quad K_2 = - \frac{3G M_E}{a^3} \frac{A-B}{4}$$

$$U_{mn} = \sum_{i,j} \sum_{\tau = \pm 1} B_{im}^{(j)} \cos(m\mu + n\nu + j\tau\lambda - \tau\theta_i^{(j)}) \quad (3.2)$$

donde, $\theta_i^{(j)}$ representan adecuadas combinaciones lineales de los argumentos F , l' , l , D y h , considerados funciones explícitas del tiempo, y los coeficientes $B_{im}^{(j)}$ son productos de ciertas funciones de ε por unos coeficientes numéricos $A_i^{(j)}$, obtenidos en los desarrollos de las series de Poisson indicadas al final del capítulo anterior.

Esta expresión del hamiltoniano presenta los inconvenientes de contener variables angulares en el término no perturbado, y depender explícitamente del tiempo. El primero de ellos puede salvarse descomponiendo T , dada en (2.1), en la forma $T = H_0 + U$, siendo

$$H_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) M^2$$

$$U = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{C} - \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) N^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (M^2 - N^2) \cos 2v \quad (3.3)$$

e incorporando U a la perturbación.

El segundo puede soslayarse introduciendo el formalismo homográfico (Sheifele, 1970). Para mayor claridad se ha procedido previamente a adimensionar el hamiltoniano, definiendo unos nuevos momentos y un nuevo tiempo s por las relaciones

$$M' = \frac{1}{C\omega} M, \text{ etc} \quad s = \omega t \quad (3.4)$$

así como un nuevo hamiltoniano $H' = H/C\omega^2$, siendo $\omega = n$ la velocidad angular media de rotación de la Luna.

Considerando entonces las variables L, ℓ', g, h , como nuevas variables canónicas, y designando sus momentos conjugados por $P_L, P_{\ell'}, P_g, P_h$, se obtiene un nuevo hamiltoniano conservativo sin más que añadir al anterior la expresión $P_L + n'P_{\ell'} + n_g P_g + n_h P_h$, habiéndose tomado para los movimientos medios de las variables ℓ', g y h , en la escala de tiempo s , los valores

$$\begin{aligned} n' &= 0,074 \ 801 \ 329 \\ n_g &= 0,012 \ 472 \ 7585 \\ n_h &= -0,004 \ 021 \ 3226 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Con ésto puede descomponerse la función hamiltoniana en la forma $H = H_0 + H_1$, siendo ahora

$$H_0 = \frac{C}{4} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) M^2 + P_L + n'P_{\ell'} + n_g P_g + n_h P_h$$

$$H_1 = V_2 + V_S + E_0 + U \quad (3.6)$$

donde se han suprimido los símbolos (') que debían afectar a

algunas componentes, que se obtienen sin más que reemplazar, en las expresiones de V_2 y V_S , las constantes K_i , K'_i , correspondientes a los términos terrestres y solares, por unas nuevas constantes k_i , k'_i , cocientes de las anteriores por $C\omega^2$, y las derivadas temporales en E_0 por derivadas con respecto a s .

Los valores de las constantes que figuran en (3.6) resultan ser

$$k_1 = 0,001530348$$

$$k_2 = 0,0001708641$$

$$k'_1 = 8,6449 \cdot 10^{-6}$$

$$k'_2 = 9,652 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{C}{2} \left(\frac{2}{C} - \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) = -0,000515$$

$$\frac{C}{2} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) = -0,000105$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = 2,9014 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{d\Pi}{ds} = -5,0219 \cdot 10^{-7} \quad (3.7)$$

habiéndose tomado $n = 1732\ 559\ 353''$, 56 por signo juliano como valor del movimiento medio en longitud de la Luna.

3.2. Análisis de los distintos términos de la perturbación.

Indicando con el símbolo $\langle x \rangle$ el valor medio de una cierta variable x , los fenómenos de resonancia asociados al movimiento lunar pueden concretarse, de acuerdo con las leyes de Cassini, en las equivalencias

$$\langle \mu + \nu + \lambda \rangle = \langle L + 180^\circ \rangle$$

$$\langle \lambda \rangle = \langle h + 180^\circ \rangle$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \text{cte} \approx 1^\circ 30'$$

La presencia del sumando 180° en algunos términos se debe a que las variables de Andoyer están referidas al nodo ascendente del ecuador lunar.

Al desarrollar V en las variables de Andoyer e introducir las series de Poisson que proporcionan el movimiento orbital,

resultan varios tipos de términos que, de acuerdo con la terminología habitual (Garfinkel, 1966), se clasifican como seculares y periódicos, pudiendo distinguirse entre los últimos los de corto y largo período y los resonantes, tanto débiles como profundos. De acuerdo con esto, se considera H_1 descompuesto en varios sumandos que agrupan los términos de cada uno de los tipos referidos.

3.3. Eliminación de los términos periódicos ordinarios.

En esta fase de la integración se efectúan varias aplicaciones del método de Deprit, que conducen a la eliminación de los términos citados en el epígrafe, incluyendo entre éstos los débilmente resonantes.

Como es sabido, el método de perturbaciones de A. Deprit (1969) procede mediante la determinación recurrente de una función generatriz, y la correspondiente transformación canónica de las variables, de modo que el hamiltoniano inicial se transforma en un nuevo hamiltoniano más fácilmente integrable $H' = H'_0 + H'_1$, y proporciona una solución asintótica válida en intervalos de tiempo del orden del inverso de la perturbación. Con el fin de obtener con mayor precisión el movimiento secular, suele combinarse con un método de promedios, de modo que se escoge como H'_1 la parte no periódica de H_1 respecto de las variables angulares cuyos momentos conjugados están presentes en H_0 .

En la práctica la función generatriz W de la transformación de Lie-Deprit correspondiente puede determinarse a partir de las ecuaciones del método, que en los primeros órdenes son:

$$\begin{aligned} H_0 &= H'_0 \\ \{H_0, W_1\} &= H'_1 - H_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $\{.,.\}$ denotan los paréntesis de Poisson. Tales ecuaciones admiten la solución

$$W_1 = \int (H_1 - H'_1) dt \quad (3.9)$$

suponiéndose al calcular dicha integral que las variables canónicas están dadas por la solución del sistema no perturbado (véase Hori, 1966; Camarena et al., 1976).

Como puede apreciarse, no es posible eliminar los términos resonantes profundos por este procedimiento, pues dan lugar a la aparición de pequeños divisores, al ser sus frecuencias próximas a cero, y con ello la solución asintótica perdería su validez.

Por otra parte, las ecuaciones de perturbación pueden calcularse por las fórmulas

$$\Delta p = p - p' = - \frac{\partial W_1}{\partial q'} \quad \Delta q = q - q' = \frac{\partial W_1}{\partial p'} \quad (3.10)$$

donde p y q representan un momento genérico y su variable conjugada, p' y q' el par de variables correspondientes al efectuar la transformación canónica de generatriz $W = W_1$, y esta función se supone expresada en las nuevas variables mediante la sustitución literal de las antiguas por las nuevas.

A causa de la proximidad del vector momento angular a uno de los ejes principales de inercia, y a la pequeña inclinación del ecuador lunar con respecto a la eclíptica, al calcular las ecuaciones de perturbación (3.10) para las variables de Andoyer, se originan pequeños divisores en el seno de los ángulos σ y ϵ . Para evitar este problema, y aprovechando la invariancia canónica del método, se calculan las ecuaciones de perturbación en unas nuevas variables canónicas (γ_i , γ_i) (Ferrándiz, 1979) definidas por medio de las igualdades:

$$\gamma_1 = M$$

$$\gamma_1 = \mu + \nu + \lambda$$

$$\gamma_2 = \sqrt{2(M-N)} \cos \nu$$

$$\gamma_2 = - \sqrt{2(M-N)} \operatorname{sen} \nu$$

$$\gamma_3 = \sqrt{2(M-\Lambda)} \cos v \qquad \qquad \qquad \gamma_3 = -\sqrt{2(M-\Lambda)} \sin \lambda \qquad (3.11)$$

en las que no se presentan singularidades

Como puede apreciarse, esta transformación es análoga a la realizada por Cid(1969) para el caso de variables orbitales de Delaunay con inclinación próxima a cero.

3.4. Libraciones en torno al equilibrio.

Para concluir la integración, basta estudiar las libraciones en torno al equilibrio definido en primera aproximación por las leyes de Cassini. Con este fin, se realiza una transformación canónica, de modo que las nuevas variables, semejantes a las empleadas por Henrard y Moons (1978), estén definidas por las igualdades

$$\begin{aligned} X_1 &= M - \alpha & x_1 &= \mu + v + \lambda - L - 180^\circ \\ X_2 &= \sqrt{2(M-N)} \cos v & x_2 &= -\sqrt{2(M-N)} \sin v \\ X_3 &= \sqrt{2(M-\Lambda)} \cos(\lambda - h - 180^\circ) - 2\beta & x_3 &= -\sqrt{2(M-\Lambda)} \sin(\lambda - h - 180^\circ) \\ P_L^+ &= P_L + M & L^+ &= L \\ P_g^+ &= P_g & g^+ &= g \\ P_h^+ &= P_h + M & h^+ &= h \\ P_\ell^+ &= P_\ell & \ell'^+ &= \ell' \end{aligned}$$

Las constantes α (próxima a 1) y β (próxima a $\sin \epsilon/2$), se introducen con el fin de que las coordenadas (X_i, x_i) oscilen alrededor de sus valores $(0,0)$ correspondientes a la posición de equilibrio medio. Por tanto, sus valores determinan el centro de libración. Desarrollando el hamiltoniano en serie de potencias de las nuevas variables, e igualando a cero los términos lineales en éstas, se halla

$$\alpha = 1,000\,004\,026\,441$$

$$\beta = 0,013\,426\,59364$$

A partir de estos valores se obtiene $\epsilon_0 = 1^\circ 32' 19",02$ como valor medio de la inclinación del plano de Andoyer con respecto a la eclíptica, comparable a los valores $1^\circ 32' 32",86$ de Eckhardt (1980), $1^\circ 32' 57"$ de Migus (1976) y $1^\circ 32' 49"$ de Henrard y Moons (1978). En realidad el valor dado por Eckhardt corresponde a la inclinación del ecuador lunar con respecto a la eclíptica, por lo que debería compararse con el valor medio de $\epsilon + \sigma$, que resulta ser $1^\circ 32' 29",61$, muy similar al antes citado.

A continuación, se procede a calcular las frecuencias naturales de oscilación del sistema. Para ésto, se determina una transformación canónica del tipo.

$$x_i = \alpha_i x'_i \qquad X_i = \frac{1}{\alpha_i} X'_i$$

de modo que los términos cuadráticos del hamiltoniano transformado sean de la forma

$$\frac{n_1}{2} (X'_1{}^2 + x'_1{}^2) + \frac{n_2}{2} (X'_2{}^2 + x'_2{}^2) + \frac{n_3}{2} (X'_3{}^2 + x'_3{}^2)$$

Se obtiene, para las constantes α_i y las frecuencias (relativas al movimiento medio n en longitud) de oscilación n_i los valores

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 6,204002501 & n_1 &= 2,598101248 \cdot 10^{-2} \\ \alpha_2 &= 0,637241147 & n_2 &= 1,012502967 \cdot 10^{-3} \\ \alpha_3 &= 1,000076128 & n_3 &= -3,108148282 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Los períodos correspondientes son 2,88 años, 73,88 años y 24,08 años, semejantes a los calculados por Henrard y Moons: 2,88; 75,23 y 24,14. Por su parte, Williams (1977) señala que existen tres tipos de libraciones libres: una en longitud, con un período de 2,9 años y dos en latitud, con períodos de 24 y 74 años, y análogas a la precesión de la Tierra y al "Chandler Wobble".

La solución final en las variables (X'_i, x'_i) con $s = nt$ es de la forma

$$X'_i = B_i \cos(n_i s + q_i) \quad x'_i = B_i \sin(n_i s + q_i)$$

debiendo determinarse las amplitudes B_i y fases iniciales q_i de las libraciones libres a partir de datos de observación, lo que exigiría analizar los datos del programa LURE utilizando para describir las libraciones la teoría propuesta.

De cualquier modo, puede obtenerse una estimación orientativa para sus valores comparando este modelo de libración con el utilizado en los cálculos de Calame (1976, 1977), comparación que consideramos es reveladora de algunos de los problemas que no han sido resueltos de forma satisfactoria en los análisis de dicha autora.

En efecto, Calame utiliza un modelo de libración libre del tipo

$$\delta\tau = A \sin(\omega t + g)$$

$$\delta p_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + g_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + g_2)$$

$$\delta p_2 = h_1 A_1 \cos(\omega_1 t + g_1) + h_2 A_2 \cos(\omega_2 t + g_2)$$

siendo A , A_i , g y g_i las constantes iniciales, $h_1 = 0,999$, y $h_2 = -2,486$, y donde los períodos correspondientes a ω , ω_1 y ω_2 son, respectivamente, de 2,9 años, 27,3 días y 75 años. Estos valores se han obtenido como frecuencias propias del sistema que resulta al linealizar y homogeneizar las ecuaciones diferenciales dadas por Eckhardt (1967).

Los análisis de datos de observación, con diversos modelos para las libraciones forzadas, le permitieron obtener las constantes de dos de tales libraciones libres, mientras que para el modo de 27,3 días los resultados eran absolutamente inconsistentes, atribuyendo Calame este hecho a correlaciones espúreas con libraciones forzadas de períodos muy próximos.

Expresado τ , p_1 y p_2 , en variables de Andoyer, se comprueba fácilmente que los modos de frecuencias ω y ω_2 corresponden inmediatamente a las oscilaciones libres en las variables (X_1, x_1) y

(X_2, x_2) . Esto nos permite obtener para sus constantes la estimación

$$\begin{aligned} B_1 &= 0'', 29 & q_1 &= 38^\circ, 5 \\ B_2 &= 9'', 94 & q_2 &= 165^\circ, 2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

si se fija el instante inicial en el día juliano 2440400,5 (28 de junio de 1969), mientras que para el valor medio de σ se halla $\sigma_0 = 10'', 59$, que, de acuerdo con los resultados clásicos (Tisserand, 1891), es considerablemente mayor el valor análogo para la Tierra, cifrado actualmente en $0'',3$ (Vicente, 1980).

En cuanto al modo de frecuencia ω_1 de Calame, se le asocia un grupo complejo de términos que incluyen factores de la forma $B_1 \sin(F \pm n_1 s)$ y $B_3 \sin(F \pm n_3 s)$, de los cuales los más importantes son los segundos, ya que B_3 ha de ser del orden de $\epsilon_0 = 0.026$, y que poseen unos períodos de 27,13 y 27,29 días, correspondiendo el último al de 27,3 días indicado por Calame. Esto parece indicar que quizás el modelo de su investigación sea demasiado simple, y que podría resultar conveniente el empleo de un modelo que contuviese de forma más explícita las verdaderas oscilaciones libres de las variables de acción-ángulo, análogo por tanto al propuesto en nuestra integración.

CAPITULO IV. EXTENSION A ORDENES SUPERIORES DE PERTURBACION

La precisión actual de las medidas laser de distancias Tierra-Luna, que puede estimarse en ± 10 cm. para los miles de observaciones de que se dispone, obliga a incluir en las teorías de las libraciones los términos con amplitudes del orden de $0",01$ a $0",02$, que posiblemente se reducirán en un futuro no muy lejano en un factor 2 ó 3. De ahí que se haga necesario - considerar perturbaciones del orden de 10^{-8} con respecto al término principal, por lo que deben incluirse los términos de tercer orden del desarrollo en armónicos esféricos del potencial lunar debido a la presencia de la Tierra. De acuerdo con ésto, en este capítulo se extienden los resultados del anterior incluyendo en el potencial de la rotación lunar el término correspondiente, que denotábamos por V_3 , y que pasa a - constituir un término de segundo orden de perturbación del hamiltoniano. Tendremos así:

$$H = H_0 + H_1 + H_2$$

El desarrollo de este nuevo componente del potencial puede obtenerse en forma análoga a la indicada en el apartado 2.3. para el término V_2 , en función de los parámetros de inercia lunares C_{nm} , S_{nm} , que, por conveniencias del desarrollo, son sustituidos por unas nuevas constantes adimensionales K_{nm} , L_{nm} . Para los primeros se han tomado los valores dados por Eckhardt (1.980), es decir,

$$C_{30} = - 10,4 \cdot 10^{-6}$$

$$C_{31} = 28,6 \cdot 10^{-6}$$

$$S_{31} = 8,8 \cdot 10^{-6}$$

$$C_{32} = 4,8 \cdot 10^{-6}$$

$$S_{32} = 1,7 \cdot 10^{-6}$$

$$C_{33} = 2,7 \cdot 10^{-6}$$

$$S_{33} = -1,1 \cdot 10^{-6}$$

Considerando las relaciones

$$R/a = 1/221, \quad C/mR^2 = 0,392 \quad M_E/m = 1/81,30$$

y teniendo en cuenta el factor de corrección $\lambda = 1,0027$, introducido por Jeffreys (1.961), se deducen los valores de las nuevas constantes consignados en la Tabla 4.1.

TABLA 4.1.

<u>Constante</u>	<u>Valor en radianes ($\cdot 10^{-7}$)</u>	<u>Valor en segundos</u>
K_{30}	7,135	0,1472
K_{31}	-19,620	-0,4047
K_{32}	6,037	0,1245
K_{33}	-8,232	0,1698
L_{31}	-2,915	0,0601
L_{32}	4,631	0,0955
L_{33}	1,886	0,0389

Este término H_2 , de segundo orden, contiene términos de los mismos tipos que los de H_1 , salvo seculares, como era de esperar, pues corresponde a armónicos de orden impar.

4.1. Eliminación de los términos periódicos no resonantes.

La eliminación de los términos periódicos no resonantes se efectúa por el método de Deprit, calculando la función generatriz hasta el segundo orden, es decir, $W=W_1 + W_2$

Sus componentes se determinan a partir de las ecuaciones

$$H_0 = H'_0$$

$$\{H_0, W_1\} = H'_1 - H_1$$

$$\{H_0, W_2\} = H'_2 - H_2 - \frac{1}{2} \{H_1 + H'_1, W_1\}$$

pudiendo calcularse las perturbaciones, sin singularidades en las variables (y_i, Y_i) , por medio de las relaciones

$$\Delta y_i = - \frac{\partial W_1}{\partial y_i} - \frac{\partial W_2}{\partial y_i} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial y_i}, W_1 \right\}$$

$$\Delta Y_i = \frac{\partial W_1}{\partial Y_i} + \frac{\partial W_2}{\partial Y_i} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial Y_i}, W_1 \right\}$$

es decir añadiendo a las ecuaciones de primer orden obtenidas en la integración del capítulo anterior una corrección constituida por términos de segundo orden.

Los cálculos correspondientes son de una extensión considerable, debido al gran número de desarrollos de paréntesis de Poisson que conllevan. Sin embargo, dado que la precisión que se pretende lograr para la integración presente es de $0''$, 01 , pueden abreviarse en gran manera estos cálculos, sin que por ello dejen de ser prolijos, prescindiendo de todos los términos cuyas contribuciones resultaran menores que una cantidad determinada, que fijamos en $0''$, 001 .

4.2. Eliminación de los términos resonantes débiles de primer orden

La eliminación de los términos débilmente resonantes es ahora de mayor complicación, dado el aumento de precisión de esta integración, y los problemas que ocasionan algunos de ellos. La eliminación de los términos de este tipo, contenidos en H_1 , se puede conseguir con dos aplicaciones del método de Deprit. En la primera se eliminan todos los términos resonantes débiles de H_1 , salvo dos de ellos, en los argumentos $\mu - \ell$ y $\mu + 2\nu - \ell$, ya que éstos darían lugar a otros de magnitudes 10^{-2} y 10^{-3} en la función generatriz, que obligarían a aproximar la transformación hasta el cuarto orden.

En una segunda aplicación del método de Deprit se elimina el par de términos citados, y se comprueba que, al contener estos $\sin \sigma$ y $\sin \epsilon$ como factores, basta calcular la función generatriz, y aproximar las ecuaciones de perturbación, hasta el tercer orden, con lo que se conservan todos los términos de contribuciones superiores a 10^{-3} segundos.

4.3. Eliminación de los términos débilmente resonantes de segundo orden.

Esta eliminación es aún más problemática que las anteriores, pues algunos de los términos implicados en ella darían lugar a cocientes de la forma $k_1/n_g = 0,125$ y $k_2/n_g = 0,014$ al calcular la generatriz. Por ello se haría necesario - aproximar la transformación de contacto hasta el cuarto orden, lo que es prácticamente irrealizable por cálculo manual, e incluso resultaría costoso aunque se dispusiera de un manipulador simbólico potente, como los de Henrard, Jefferys o Broucke.

Este problema puede paliarse si se agrupa H_0 junto con H_1' (que contiene los términos seculares y resonantes pro-

fundos de primer orden) en un nuevo término K_0 de orden cero. Esto da lugar a una mayor complicación en el cálculo de la función generatriz, que sin embargo, puede reducirse teniendo en cuenta la solución descrita en el apartado 3.4. para el movimiento secular correspondiente al hamiltoniano K_0 , ya que, debido a la pequeña magnitud de la amplitud B_1 , dada en (3.13.), es posible simplificarla tomando $x_1 = 0$ y M constante.

Haciendo $K_2 = H_2'$, puede calcularse la función generatriz W' como suma de dos componentes de segundo y cuarto orden, definidas por las ecuaciones

$$\{K_0, W'_2\} = K'_2 - K_2$$

$$\{K_0, W'_4\} = -\frac{1}{2} \{K_2 + K'_2, W'_2\}$$

aunque dada la dependencia funcional que resulta para W'_2 , se hace innecesario aproximar la transformación hasta el cuarto orden, lo que hace más práctico el artificio anterior.

Con esto se obtiene un hamiltoniano que contiene tan sólo términos seculares y resonantes profundos, y podría procederse al estudio del movimiento secular. Sin embargo, en el estado actual del problema, resulta suficiente la expresión de las libraciones libres dadas en la integración de primer orden, pues la inclusión de los términos de segundo orden daría lugar a variaciones indetectables que no compensarían el esfuerzo de cálculo requerido.

V. BIBLIOGRAFIA

- ABBOT, S. et alt. (1.973). Astron. J. 78, 784-793
- ANDOYER, H. (1.923). "Cours de Mécanique Céleste". Gauthier
Villars, París.
- BESSEL, F.W. (1.839). Astr. Nachr. 16, 257
- BILLS, B.G. y FERRARI, A.J. (1.977). J. Geophys. Res. 82,
1306-1314.
- BLACKSHEAR, W.T. y GAPCYNKI, J.P. (1.977). J. Geophys. Res.
82, 1699-1701
- BORDERIES, N. (1.978). Cel. Mech. 18, 295-307
- BREEDLOVE, W.J. (1.977) En "Scientific Applications of Lu-
nar Laser Ranging". (J.D. Mulholland,
ed), Reidel,; Dordrecht, p. 65-78
(abrev. SALUR).
- BROWN, E. (1.896) "An Introductory treatise on the Lunar
Theory", Cambridge Univ. Press.
- (1.910). Mem. Roy. Astron. Soc. 59, 1-103
- CALAME, O. (1.976). C.R. Acad. Sc. París, 282, Ser. B, 133-
-135.
- (1.976) The Moon 15, 343
- (1.977) En SALUR, op. cit. p. 53-62
- y MULHOLLAND, J.D. (1.978) Science 199, 875-877
- (1.978) Ibid. 199, 977-978.
- CAMARENA, V. et alt. (1.976) Vrania 286, 184-200
- (1.976) Ibid. 286, 201-211

- CAPPALLO, F. et al. (1.980) Moon & Planets, in press.
- CASSINI, J.D. (1.721) Mem. Acad. Roy. Sc. Paris, 108-126
- CHAPRONT-TOUZE, M. (1.976). Astronomy & Astrophysics (1979)
- CID, R. (1.969) Act. VIII Reun. Mat. Esp. 187-196
- _____ (1.969) Publ. Sem. Mat. Zaragoza, 10. 79-94
- _____ y CORREAS, J.M. (1.973). Act. I. Jorn. Mat. Hisp. Lus., 439-452.
- DEPRIT, A. (1.969) Cel. Mech. 1, 12-30
- DUBOSHIN, G.N. (1.958) Sov. Astron. 2, 239-250
- ECKERT, W.J. et al. (1.954) En "Improved Lunar Ephemeris 1.952-1.954", Washington, p. 283-363.
- _____ (1.966) Astron. J. 71, 314-322
- ECKHARDT, D.H. (1.965) Astron.J. 70, 466-471.
- _____ (1.967) En "Measure of the Moon". (Z.Kopal and C. Goudas, eds), Reidel, Dordrecht, p. 40-51.
- _____ (1.980) "Theory of the Libration of the Moon".
- EROKSHIN, G.I. (1.974) Sov. Astron. 17, 808-810
- FERRARI, A.J. (1.977). J. Geophys. Res. 82, 3065-3084
- FERRANDIZ, J.M. (1.979) Tesis Doctoral, Zaragoza.
- GARFINKEL, B. (1.966) Astron.J.; 71, 657-669
- HARTWIG, E. (1.880) "Beitrag zur Bestimmung der physichen Libration des Mondes", Karlsruhe.

- HAYN, F. (1.902) Abh. Sach. Ges. Wiss. 27, IX
- (1.923) Encykl. Math. Wiss., VI, 2, 20a.
1020-1043.
- HENRARD, J. (1.972) "Analytic. Lunar Ephemeris: A Report". Pub. Dept. Math. University of Namur, Belgium.
- (1.978) Cel. Mech. 17, 195-204
- (1.978) Pub. Dept., Math, University of Namur. Belgium, Report 78/8.
- (1.978) Ibid. Report. 78/11
- (1.979) Cel. Mech. 19, 337-315.
- y MOONS, M. (1.978) En "Dynamics of planets and Satellites and Theories of Their Motion", (V. Szebehely, ed.) Redidel, Dordrecht, p. 125-135.
- HEVELIUS, J. (1.647) "Selenographia", Danzing
- HORI, G.I. (1.966). Publ. Astron. Soc. Japan. 18, 287-295.
- JEFFREYS, H. (1.936) Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 87-8.
- (1.955) En "Vistas in Astronomy". (A. Beer, ed.) Pergamon Press, London, p. 189-194.
- (1.957) Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 117, 347-355
- (1.961) Ibid. 122, 421-432
- (1.970) The Moon, 1, 503.

- JEFFERYS, H. (1.972) En "The Moon" (S.K. Runcorn y H.C. Urey, eds), Reidel, Dordrecht, p. 11-12
- JONSON, A. (1.917) Medd. Lunds. Astr. Obs. 2, 15
- KING, R.W. et alt. (1.976). J. Geophys-Res. 81, 6251-6256
- (1.978) Ibid. 83. 3377-3381.
- KINOSHITA, H. (1.975). Simithsonian Astrophys Obs, Special Report, 364.
- et alt. (1.974). Annals Tokyo Astr. Obs. 14, 14-35.
- KONDURAR, V.I. (1.962). Sov. Astron. 5, 739-748.
- (1.964) Ibid. 7, 576-582.
- KOVALEVSKY, J. (1.977). En SALUR, pp. cit., 21-34
- KOZIEL, K. (1.948) Acta Astron. a (Cracow), 4, 61-139
- (1.962) En "Physics and Astronomy of the Moon" (Z. Kopal, ed.) Academic Press. p. 27-59.
- (1.967) Icarus 7, 1-28.
- (1.967) En "Measure of the Moon". op. cit. p. 3-11.
- (1.970) Postepy. Astrom. (Warsaw), 18, 189
- LAGRANGE, J.L. (1.980) Memories de l'Acad. de Berlin.
- MAYER, T. (1.750) "Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr, 1.748". Nuremberg.
- MIGUS, A. (1.976) The Moon 15, 165-181
- (1.977) En SALUR, op. cit., 79-86

- MOONS, M. (1.980) Pub. Dept. Mat., University of Namur, Belgium, Report 80/9.
- MULHOLLAND, J.D. (1.977). En SALUR, op. cit. 9-18.
- et alt. (1.975) *Astrom. J.* 80, 1087-1093.
- NEWCOMBE, S. (1.895). *Astrom. Papers. Am. Ephemeris* 6, pt. 1.
- NEWTON, I. (1.686). *Principia*, Lib. III.
- OSSIPOV, G.F. (1.969). *Sov. Astron.* 13, 129-134.
- (1.970). *Ibid.* 14, 336-339.
- (1.973). *Ibid.* 17, 281-284.
- PEALE, S.J. (1.975). *J. Geophys. Res.* 80, 4939-4946.
- (1.976). *Ibid.* 81, 1813-1827.
- POINCARÉ, H. (1.899) "Les méthodes nouvelles de la Mécanique Celeste". Gauthier-Villars, Paris.
- SHAPIRO, I.I. et alt. (1.976). *Phys. Res. Lett.* 36, 555-558.
- SHEIFELE, S. (1.970). *Cel. Mech.* 2, 296-310.
- SHELUS, P.J. et alt. (1.975). *Astron. J.* 80, 154-161
- SJOGREN, W. (1.971). *J. Geophys. Res.* 76, 7021-7026.
- TISSERAND, F. (1.889). "Traité de Mécanique Céleste". Gauthiers-Villars, Paris.
- VICENTE, R.O. (1.980). En "Nutation and the Earth's Rotation". (E.P. Fedvrov et alt., eds.), *Reidel*, Dordrecht, p. 139-151.
- WICHMAN, M. (1.846). *Astr. Nachr.* 26, 289.

WICHMAN, M. (1.847) Ibid 27.53 81 97 211

WIGNER, E.P. (1.959). "Group Theory". Academic Press.

WILLIAMS, J.G. et al. (1.976). Phys. Res. Lett. 36, 551-554

(1.978). Geophys. Res. Lett. 5,

943-946



FUNDACION JUAN MARCH

SERIE UNIVERSITARIA

TITULOS PUBLICADOS

Serie Verde

(Matemáticas, Física, Química, Biología, Medicina)

- | | | | |
|----|---|----|--|
| 2 | Mulet, A.:
Estudio del control y regulación, mediante un calculador numérico, de una operación de rectificación discontinua. | 28 | Zugasti Arbizu, V.:
Analizador diferencial digital para control en tiempo real. |
| 4 | Santiuste, J. M.:
Combustión de compuestos oxigenados. | 29 | Alonso, J. A.:
Transferencia de carga en aleaciones binarias. |
| 5 | Vicent López, J. L.:
Películas ferromagnéticas a baja temperatura. | 30 | Sebastián Franco, J. L.:
Estabilidad de osciladores no sinusoidales en el rango de microondas. |
| 7 | Salvá Lacombe, J. A.:
Mantenimiento del hígado dador in vitro en cirugía experimental. | 39 | Blasco Olcina, J. L.:
Compacidad numerable y pseudocompacidad del producto de dos espacios topológicos. |
| 8 | Plá Carrera, J.:
Estructuras algebraicas de los sistemas lógicos deductivos. | 44 | Sánchez Rodríguez, L.:
Estudio de mutantes de saccharomyces cerevisiae. |
| 11 | Drake Moyano, J. M.:
Simulación electrónica del aparato vestibular. | 45 | Acha Catalina, J. I.:
Sistema automático para la exploración del campo visual. |
| 19 | Purroy Unanua, A.:
Estudios sobre la hormona Natriurética. | 47 | García-Sancho Martín, F. J.:
Uso del ácido salicílico para la medida del pH intracelular. |
| 20 | Serrano Molina, J. S.:
Análisis de acciones miocárdicas de bloqueantes Beta-adrenérgicos. | 48 | García García, A.:
Relación entre iones calcio, fármacos ionóforos y liberación de noradrenalina. |
| 22 | Pascual Acosta, A.:
Algunos tópicos sobre teoría de la información. | 49 | Trillas, E., y Alsina C.:
Introducción a los espacios métricos generalizados. |
| 25 | 1 Semana de Biología:
Neurobiología. | 50 | Pando Ramos, E.:
Síntesis de antibióticos aminoglicosídicos modificados. |
| 26 | 1 Semana de Biología:
Genética. | 51 | Orozco, F., y López-Fanjul, C.:
Utilización óptima de las diferencias genéticas entre razas en la mejora. |
| 27 | 1 Semana de Biología:
Genética. | | |

- 52 Gallego Fernández, A.:
Adaptación visual.
- 55 Castellet Solanas, M.:
Una contribución al estudio de las teorías de cohomología generalizadas.
- 56 Sánchez Lazo, P.:
Fructosa 1,6 Bisfosfatasa de hígado de conejo: modificación por proteasas lisosomales.
- 57 Carrasco Llamas, L.:
Estudios sobre la expresión genética de virus animales.
- 59 Afonso Rodríguez, C. N.:
Efectos magneto-ópticos de simetría par en metales ferromagnéticos.
- 63 Vidal Costa, F.:
A la escucha de los sonidos cerca de T_λ en el 4^{ta} líquido.
- 65 Andréu Morales, J. M.:
Una proteína asociada a membrana y sus subunidades.
- 66 Blázquez Fernández, E.:
Desarrollo ontogénico de los receptores de membrana para insulina y glucagón.
- 69 Vallejo Vicente, M.:
Razas vacunas autóctonas en vías de extinción.
- 76 Martín Pérez, R. C.:
Estudio de la susceptibilidad magnetoeléctrica en el Cr_2O_3 policristalino.
- 80 Guerra Suárez, M.ª D.:
Reacción de Amidas con compuestos organoaluminicos.
- 82 Lamas de León, L.:
Mecanismo de las reacciones de iodación y acoplamiento en el tiroides.
- 84 Repollés Moliner, J.:
Nitrosación de aminos secundarias como factor de carcinogénesis ambiental.
- 86 II Semana de Biología:
Flora y fauna acuáticas.
- 87 II Semana de Biología:
Botánica.
- 88 II Semana de Biología:
Zoología.
- 89 II Semana de Biología:
Zoología.
- 91 Viéitez Martín, J. M.:
Ecología comparada de dos playas de las Rías de Pontevedra y Vigo.
- 92 Cortijo Mérida, M., y García Blanco, F.:
Estudios estructurales de la glucógeno fosforilasa b.
- 93 Aguilar Benítez de Lugo, E.:
Regulación de la secreción de LH y prolactina en cuadros anovulatorios experimentales.
- 95 Bueno de las Heras, J. L.:
Empleo de polielectrolitos para la floculación de suspensiones de partículas de carbón.
- 96 Núñez Alvarez, C., y Ballester Pérez, A.:
Lixiviación del cinabrio mediante el empleo de agentes complejantes.
- 101 Fernández de Heredia, C.:
Regulación de la expresión genética a nivel de transcripción durante la diferenciación de Artemia salina.
- 103 Guix Pericas, M.:
Estudio morfométrico, óptico y ultraestructural de los inmunocitos en la enfermedad celiaca.
- 105 Llobera i Sande, M.:
Gluconeogénesis "in vivo" en ratas sometidas a distintos estados tiroideos.
- 106 Usón Finkenzeller, J. M.:
Estudio clásico de las correcciones radiactivas en el átomo de hidrógeno.
- 107 Gallán Jiménez, R.:
Teoría de la dimensión.
- 111 Obregón Perea, J. M.:
Detección precoz del hipotiroidismo congénito.

- 115 Cacicedo Egües, L.:
Mecanismos moleculares de acción de hormonas tiroideas sobre la regulación de la hormona tirótrofa.
- 121 Rodríguez García, R.:
Caracterización de lisozimas de diferentes especies.
- 122 Carravedo Fantova, M.:
Introducción a las Orquídeas Españolas.
- 125 Martínez-Almoyna Rullán, C.:
Contribución al estudio de la Manometría Ano-rectal en niños normales y con alteraciones de la continencia anal.
- 127 Marro, J.:
Dinámica de transiciones de fase: Teoría y simulación numérica de la evolución temporal de aleaciones metálicas enfriadas rápidamente.
- 129 Gracia García, M.:
Estudio de cerámicas de interés arqueológico por espectroscopia Mössbauer.
- 131 García Sevilla, J. A.:
Receptores opiáceos, endorfinas y regulación de la síntesis de monoaminas en el sistema nervioso central.
- 132 Rodríguez de Bodas, A.:
Aplicación de la espectroscopia de RPE al estudio conformacional del ribosoma y el tRNA.
- 136 Aragón Reyes, J. J.:
Interacción del Ciclo de los Purín Nucleótidos con el Ciclo del Acido Cítrico en Músculo Esquelético de Rata durante el Ejercicio.
- 139 Genís Gálvez, J. M.:
Estudio citológico de la retina del camaleón.
- 140 Segura Cámara, P. M.:
Las sales de tiazolio ancladas a soporte polimérico insoluble como catalizadores en química orgánica.
- 141 Vicent López, J. L.:
Efectos anómalos de transporte eléctrico en conductores a baja temperatura.
- 143 Nieto Vesperinas, M.:
Técnicas de prolongación analítica en el problema de reconstrucción del objeto en óptica.
- 145 Arias Pérez, J.:
Encefalopatía portosistémica experimental.
- 147 Palanca Soler, A.:
Aspectos Faunísticos y Ecológicos de Carábidos Altoaragoneses.
- 150 Vioque Cubero, B.:
Estudio de procesos bioquímicos implicados en la abscisión de la aceituna.
- 151 González López, J.:
La verdadera morfología y fisiología de Azotobacter: células germinales.
- 152 Calle García, C.:
Papel modulador de los glucocorticoides en la población de receptores para insulina y glucagón.
- 154 Alberdi Alonso, M.^a T.:
Paleoecología del yacimiento del Neógeno continental de Los Valles de Fuentidueña (Segovia).
- 156 Gella Tomás, F. J.:
Estudio de la fosforilasa kinasa de hígado y leucocitos: purificación, características y regulación de su actividad.
- 157 Margalef Mir, R.:
Distribución de los macrofitos de las aguas dulces y salobres del E. y NE. de España y dependencia de la composición química del medio.
- 158 Alvarez Fernández-Represa, J.:
Reimplantación experimental de la extremidad posterior en perros.
- 161 Tomás Ferré, J. M.^a:
Secreción y reutilización de trifosfato de adenosina (ATP) por sinaptosomas colinérgicos.

