Los Sistemas elementales de representación

Author(s):	Penadés de la Cruz, Alberto
Year:	2000
Type	Thesis (doctoral)
University:	Centro de Estudios Avanzados en Ciencias Sociales, Universidad Autónoma de Madrid, 2000.
City:	Madrid
Number of pages:	xii, 325 p.

Abstract:

Esta obra se presentó como tesis doctoral en el Departamento de Ciencia Política de la Universidad Autónoma de Madrid, el 14 de junio de 2000. El Tribunal, compuesto por los profesores doctores D. José María Maravall Herrero (Presidente), D. Josep Maria Colomer Calsina, D. Ludolfo Paramio Rodrigo, D. Julián Santamaría Ossorio y D. Mariano Torcal Loriente, le otorgó la calificación de Sobresaliente "cum laude". Director de la tesis: José Ramón Montero. El problema de la representación consiste en asignar un conjunto de enteros a un conjunto de poblaciones. Un sistema electoral elemental, o un sistema de representación elemental, está constituido por un número M de escaños y una fórmula electoral F. Las fórmulas electorales son funciones de representación bien definidas que cumplen las condiciones de ser anónimas, neutrales, decisivas, monótonas positivas (responsivas no negativas) y homogéneas. Todas las fórmulas electorales dan lugar a un único sistema de representación, el sistema mayoritario, cuando la magnitud es uno. La proporcionalidad es una propiedad de algunas fórmulas electorales, de aquéllas que producen una distribución perfectamente proporcional cuando esto es posible. No es una propiedad que contribuya a definir a las fórmulas electorales, pues hay fórmulas no proporcionales: mayoritarias e igualitarias. Induce a confusión si el problema de la representación se plantea como un problema de aproximación a la norma de proporcionalidad perfecta. La norma de proporcionalidad perfecta no es un método de representación. La fórmula mayoritaria simple es el caso límite de una de las dos familias de fórmulas, los métodos de divisores. Las fórmulas de divisores pueden caracterizarse por una función monótona creciente d(E) que proporciona el criterio de ajuste para las fracciones en el proceso de asignación de escaños. Las fórmulas de divisores constantes se caracterizan por una función con la forma c(E)'E+c. El término de ajuste c resulta ser una variable decisiva tanto para ordenar y clasificar las fórmulas como para construir las funciones de umbrales de las mismas. Dicho término proporciona la clave de los algoritmos de cálculo que suelen tomarse a manera de descripción de las fórmulas. Las fórmulas de cuota y restos mayores son necesariamente proporcionales. Esto vale también para las fórmulas de cuota compuestas, aunque no para un tipo de fórmulas limitadas, las fórmulas de cuota q–igualitarias. Las fórmulas de cuota se caracterizan por el modificador n del tamaño de la misma. Esta variable permite ordenar las fórmulas de cuota y determinar sus funciones de umbrales. Cuando el número de partidos se limita a dos, existe un método de divisores equivalente (idéntico) para cada método de cuota y restos mayores. Con más de dos partidos, un método de cuota equivale a distintos métodos de divisores cuando cambia la

distribución del voto o el número de escaños que se reparten. Si la competición es multipartidista, no es posible establecer la identidad de dos métodos que empleen técnicas distintas, de cuota y de divisores, sino sólo la relación de v'–equivalencia: dada una distribución v' de escaños, cada método de cuota puede reducirse a un método de divisores. Dos fórmulas están conectadas por la relación "ser al menos tan mayoritario" si cada una de ellas presenta un mayor o menor sesgo en favor de la mayoría. La relación induce un orden lineal (asimétrico, transitivo y completo) en el conjunto de las fórmulas de divisores constantes y un orden lineal en el conjunto de las fórmulas de cuota y restos mayores. La relación induce un orden parcial estricto (asimétrico y transitivo, pero no completo) en el conjunto de las fórmulas electorales. El conjunto de las fórmulas electorales está conectado por la relación "ser al menos tan mayoritario cuando v'v'", que induce un orden lineal en el mismo. El continuo ordenado de las infinitas fórmulas puede dividirse en regiones: fórmulas proporcionales, mayoritarias e igualitarias. Existe también continuidad entre las fórmulas electorales y las anti-fórmulas: fórmulas de representación monótonas negativas que siempre están sesgadas en favor de la minoría. Aquí el sesgo no se refiere simplemente a "sobrerrepresentación", sino al hecho de que la minoría obtiene más escaños que la mayoría. Es posible formar una tabla periódica de todas las fórmulas de divisores constantes y una tabla periódica de todas las fórmulas de cuota y restos mayores. Como en la tabla periódica, los elementos están ordenados, pueden situarse elementos desconocidos y pueden señalarse regiones de la tabla que marcan cambios cualitativos en el tipo de elemento (proporcional/ mayoritario; fórmula/ anti–fórmula). Para todas las fórmulas de divisores constantes y para todas las fórmulas de cuota y restos mayores es posible determinar sus funciones de umbrales. Las funciones de umbrales indican los votos necesarios y suficientes (o mínimos y máximos) para alcanzar cada uno de los escaños que se distribuyen en un sistema. Las funciones de umbrales pueden determinarse a partir de sendas funciones generatrices que indican el umbral como función de la magnitud, el número de partidos, el número de escaños del partido y, respectivamente, el tamaño de la cuota o el término de ajuste en la función de divisores. La función generatriz es única cuando los partidos son dos. Las funciones de umbrales pueden invertirse dando lugar a las funciones de pagos, que indican la expectativa mínima y máxima de escaños para cada fracción de los votos. Las funciones de umbrales tienen algunas propiedades interesantes. En la situación bipartidista, las funciones de umbrales de todas las fórmulas y anti–fórmulas electorales forman un haz centrado en el umbral de mayoría. En la situación multipartidista, las funciones de votos mínimos o necesarios forman un haz centrado en el umbral de mayoría relativa. La única excepción son las peculiares fórmulas q-igualitarias. Las funciones de votos máximos o suficientes tienen distinta forma dependiendo del número de partidos, pero también están constreñidas por un punto común: bien el umbral de mayoría relativa , bien el umbral de exclusión ordinal 1'(M+1). La pendiente de las funciones de umbrales representa el orden "ser al menos tan mayoritario" que conecta a las fórmulas: las fórmulas son más mayoritarias cuanto menor es la pendiente. La pendiente de las funciones de umbrales permite una sencilla interpretación de las regiones del espacio de la representación: son fórmulas proporcionales aquellas cuyas funciones de umbrales no intersecan con la recta de proporcionalidad perfecta; son fórmulas mayoritarias aquellas cuya pendiente es menor que la pendiente de la fórmula D'Hondt; son fórmulas igualitarias aquellas cuya pendiente es mayor que la fórmula Adams. El problema de que las fórmulas de cuota y divisores no sean, en términos estrictamente procedimentales, conmensurables, puede sortearse recurriendo a métodos indirectos de comparación basados en las asignaciones. En realidad, ésta es la estrategia convencional para comparar fórmulas (o sistemas) electorales en ciencia política. Puede medirse si las asignaciones de una fórmula tienden a aproximarse más o menos a la proporcionalidad perfecta. También puede medirse si las asignaciones de una fórmula se encuentran más o menos concentradas en el partido o partidos mayoritarios. A los resultados se les asigna un número índice. Los números siempre pueden ordenarse. Para esta empresa, los indicadores más sencillos son tan buenos, o mejores, que cualquiera de las muchas alternativas. La desproporcionalidad puede medirse por el simple índice de desviación de Loosemore–Hanby. El hecho de que esta medida, como muchas otras, sea minimizada por la fórmula Hare, no representa ningún obstáculo teórico ni empírico, sino todo lo contrario. Este índice de desviación es, además, sencillo en su cálculo y en su interpretación. Si se desea un índice con mejores propiedades formales, en particular, un índice que responda siempre a las transferencias de escaños, el mejor índice es el de desviación distributiva de Monroe. Con este índice, sin embargo, se pierde la sencillez de interpretación (y de cálculo) y se obtiene poca información adicional. La concentración puede medirse por el índice de Herfindahl-Hirschman, o por el índice de fraccionalización equivalente. La información sobre la distribución de los escaños (o, en su caso, de los votos) debería completarse con el número de componentes y, si cabe un tercero, el tamaño del mayor partido. Resulta difícil de entender que los estudios electorales suelan dejar de lado el simple número de partidos, pese a tratarse de una dimensión básica de la fragmentación, y se entreguen a discutir medidas complejas cuyo valor añadido sobre las más simples es mínimo. Manteniendo la magnitud electoral constante, los sistemas electorales son más proporcionales cuanto más próxima está la fórmula a la fórmula central: Hare entre las cuotas, Sainte–Laguë entre los divisores. La relación "ser más proporcional" la podemos identificar con la minimización de los valores de un índice de desviación. Los sistemas son menos proporcionales si la fórmula se aleja de la fórmula central en cualquier dirección: la mayoría o la igualdad. Los sistemas igualitarios pueden ser tan desproporcionales o más que los mayoritarios. La relación "ser más proporcional" no induce ningún orden razonable en las fórmulas electorales. El orden inducido por la relación "ser más mayoritario" entre las fórmulas lo reproduce, de manera previsible, el orden de un indicador de fragmentación para las distribuciones de escaños que son producto de las fórmulas. El número de Herfindahl–Hirschman es un adecuado indicador de "mayoritarismo". La relación "ser al menos tan mayoritario" induce un orden parcial estricto para el conjunto de los sistemas electorales, pero no conecta todos los sistemas electorales. Los sistemas electorales son comparables manteniendo la magnitud electoral constante. Si la magnitud es uno, todos los sistemas son equivalentes; cuando la magnitud es mayor que uno, los sistemas son más mayoritarios cuanto más mayoritaria es la fórmula. Es común suponer que la desproporcionalidad y el "mayoritarismo" (que se suelen tomar por lo mismo) disminuyen cuando la magnitud aumenta, como si la magnitud permitiera ordenar los sistemas electorales. El incremento de la magnitud correlaciona con una tendencia de los sistemas electorales que emplean una fórmula proporcional a aproximarse a la proporcionalidad perfecta, pero esta tendencia no es un orden. Los aumentos en la magnitud no producen siempre una respuesta en la dirección de aproximar el resultado a la proporcionalidad.

Instituto Juan March de Estudios e Investigaciones

ALBERTO PENADÉS DE LA CRUZ

LOS SISTEMAS ELEMENTALES DE REPRESENTACIÓN

MADRID
2 0 0 0

Centro de Estudios Avanzados en Ciencias Sociales

Castelló, 77. 28006 Madrid

Esta obra se presentó como tesis doctoral en el Departamento de Ciencia Política de la Universidad Autónoma de Madrid, el 14 de junio de 2000. El Tribunal, compuesto por los profesores doctores D. José María Maravall Herrero (Presidente), D. Josep Maria Colomer Calsina, D. Ludolfo Paramio Rodrigo, D. Julián Santamaría Ossorio y D. Mariano Torcal Loriente, le otorgó la calificación de Sobresaliente “cum laude”.

Alberto Penadés de la Cruz es licenciado en Filosofía por la Universidad Complutense de Madrid, M. Phil. en Teoría Política y Filosofía por la Universidad de Glasgow y Doctor en Ciencia Política por la Universidad Autónoma de Madrid. Formó parte de la sexta promoción de estudiantes del Centro de Estudios Avanzados en Ciencias Sociales del Instituto Juan March de Estudios e Investigaciones, donde obtuvo el título de *Master* en 1995. En el propio Centro elaboró su tesis doctoral bajo la dirección del profesor José Ramón Montero. Actualmente trabaja como Ayudante de Facultad en el Departamento de Sociología de la Universidad de Salamanca.

A mis padres y a mis hermanos

ÍNDICE

Índice de cuadros y gráficos vi
Agradecimientos x
Indicaciones sobre la notación.. xii

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN 1

1.1. Sistemas electorales o sistemas de representación...........1
1.2. El lugar de esta tesis en la investigación básica.................4
1.3. El lugar de esta tesis en la investigación empírica 7
1.4. La estructura del trabajo y los resultados fundamentales.13

CAPÍTULO 2. CONCEPTOS BÁSICOS. 19

2.1. Sistema electoral elemental y fórmula electoral: caracterización..23
2.2. Restricciones de dominio: fórmulas simples, compuestas y complementarias..28
2.3. Partidos cero...30
2.4. Umbrales de representación...31
2.5. Funciones de umbrales y funciones de pagos de las fórmulas constantes...33
2.6. Fórmulas proporcionales y mayoritarias.........................35
2.7. Fórmulas igualitarias y requisitos previos.......................37
2.8. Anti-fórmulas electorales (fórmulas minoritarias) 40
2.9. Los tipos de fórmula y el orden de las fórmulas. La relación 'ser al menos tan mayoritario como' 42
2.10. Principios de clasificación pautados y procedimentales.46
2.11. La proporcionalidad como propiedad de los sistemas electorales: la magnitud perfecta. El orden de los sistemas electorales 47
2.12. Propiedades de los resultados: concentración y desviación de la proporcionalidad 50
2.13. Recapitulación 52

CAPÍTULO 3. LOS MÉTODOS DE CUOTA Y RESTOS MAYORES. 55

3.1. La fórmula de cuota simple y restos mayores 57
3.2. Las variedades de los métodos de cuota 60
3.3. Tamaño de la cuota y sesgo en la distribución de los escaños 65
3.4. Restricciones de dominio: cuotas limitadas y falsas cuotas 69
3.5. Fórmulas de cuota y proporcionalidad............................75
3.6. Recapitulación 78

CAPÍTULO 4. LOS MÉTODOS DE DIVISORES. 83

4.1. Dos presentaciones de los métodos de divisores 84
4.2. Variedades de los métodos de divisores........................86
4.3. Caracterización general de las fórmulas de divisores proporcionales y mayoritarias..92
4.3.1. Criterios de divisores proporcionales 93
4.3.2. Criterios no negativos constantes: proporcionales y mayoritarios 95
4.3.3. Algoritmos generales...98
4.3.4. La fórmula mayoritaria simple 101
4.4. ¿Pueden compararse las cuotas y los divisores? 104
4.4.1. El divisor como cuota variable..........................105
4.4.2. Divisores mínimo y máximo y divisor efectivo...107
4.4.3. Los divisores no son cuotas inviolables 109
4.5. Divisores y sesgo en la distribución de los escaños.....111
4.6. Fórmulas igualitarias..113
4.7. Recapitulación 117

CAPÍTULO 5. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y FUNCIONES DE UMBRAL: EL BIPARTIDISMO........................121

5.1. Introducción 121
I. Umbrales de representación y funciones de umbrales............126
5.2. Umbrales de exclusión y de inclusión..........................126
5.3. Funciones de umbral 130

5.3.1. Forma general de las funciones de umbral 132
II. Un caso especial:la competición bipartidista 134
5.4. Función generatriz de los umbrales 134
5.5. Posición e inclinación de las funciones de umbrales 139
5.6. Fórmulas proporcionales y fórmulas mayoritarias 144
5.7. Sesgo mayoritario y clasificación de las fórmulas 150
5.8. Dos fórmulas proporcionales no constantes (Hill-Huntington y Dean) 155
5.9. Funciones de pagos y sesgo cero 160
5.10. Fórmulas igualitarias 163
5.11. A través del espejo: anti-fórmulas electorales 168
5.12. Proporcionalidad, sesgo y magnitud electoral 172
5.13. Recapitulación 177

CAPÍTULO 6. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y FUNCIONES DE UMBRAL: GENERALIZACIÓN. 179

I. Deducción de las funciones de umbral de las fórmulas electorales 180
6.1. Métodos de divisores y empates competitivos 180
6.1.2. Un ejemplo 183
6.2. Máximo y mínimo del divisor umbral 185
6.3. Funciones de umbral de los métodos de divisores 189
6.3.1. Métodos proporcionales 190
6.3.2. Métodos mayoritarios 193
6.3.3. Métodos igualitarios 194
6.4. Fórmulas simples de cuota: empates competitivos y resto umbral 195
6.4.1. Un ejemplo 201
6.5. Funciones de umbral de las fórmulas de cuota y restos mayores 204
6.5.1. Fórmulas simples 204
6.5.2. Fórmulas compuestas 206
6.5.3. Fórmulas q-igualitarias 207
6.6. Posición e inclinación de las funciones de umbrales 207
6.7. Ejemplos de fórmulas conocidas 214
II. Deducción del orden de las fórmulas electorales 219
6.8. Equivalencia (o no equivalencia) entre métodos de reparto de cuota y de divisores 219
6.9. Ordenamiento de las fórmulas electorales 222

6.9.1. Métodos de divisores 222
6.9.2. Métodos de cuota..224
6.9.3. Fórmulas electorales constantes........................224
6.10. Cuatro tipos básicos de fórmulas 226
6.11. Recapitulación 229

CAPÍTULO 7. CLASIFICACIÓN DE LAS FÓRMULAS ELECTORALES. LOS INDICADORES DE FRAGMENTACIÓN Y PROPORCIONALIDAD COMO INSTRUMENTOS PARA LA COMPARACIÓN DE SISTEMAS ELECTORALES. 233

7.1. Clasificación de las fórmulas electorales. Estado de la cuestión 234
7.1.1. Fórmulas más o menos proporcionales 235
7.1.2. Fórmulas más o menos sesgadas hacia la mayoría (o hacia la minoría) 238
7.2. Un caso especial: la fórmula de Sainte-Laguë modificada 243
7.3. Números índice...245
7.4. Medidas de concentración o fragmentación 247
7.4.1. Concentración y entropía 250
7.4.2. El número efectivo y la familia trasversal de los números N_a...255
7.4.3. Recapitulación...260
7.5. Medidas de desviación de la proporcionalidad............261
7.5.1. La noción intuitiva de proporcionalidad y sus índices 263
7.5.2. Proporcionalidad y equidad 271
7.5.3. Proporcionalidad y fórmulas de representación proporcional...277
7.5.4. Recapitulación...282
7.6. Recapitulación 282

CAPÍTULO 8. DOS EJERCICIOS EXPERIMENTALES DE COMPARACIÓN DE FÓRMULAS Y SISTEMAS ELECTORALES. ...285

8.1. Primer ejercicio: comparación de fórmulas electorales proporcionales 286
8.1.1. Objetivos del ejercicio 286

8.1.2. Diseño 287
8.1.3. Proposiciones 288
8.1.4. Operaciones 289
8.1.5. Resultados 290
8.1.6. Recapitulación 299
8.2. Segundo ejercicio: Comparación de sistemas electorales300
8.2.1. Objetivos del ejercicio 300
8.2.2. Diseño 301
8.2.3. Proposiciones 302
8.2.4. Operaciones 302
8.2.5. Resultados 302
8.2.6. Recapitulación 313

CAPÍTULO 9. CONCLUSIONES 315

BIBLIOGRAFÍA 321

ÍNDICE DE CUADROS Y GRÁFICOS

CUADROS:

1.1. Tipología de las fórmulas de reparto 43
3.1. Redondeo simple y asignación por restos mayores 59
3.2. Métodos de cuota 64
3.3. Asignación por tres fórmulas de cuota y restos mayores 66
3.4. Asignación por cuota simple y por cuota larga 67
3.5. Asignaciones con falsas cuotas..74
4.1. Asignación de escaños por tres métodos de divisores........89
4.2. Criterios de divisores de seis métodos de reparto...............94
4.3. Métodos de divisores no negativos constantes 103
4.4. Asignación de escaños con cinco métodos de divisores, mayoritarios y proporcionales 110
4.5. Distribuciones de doce escaños en un sistema de tres partidos 117
5.1. Umbrales de representación de distintas fórmulas electorales...128
5.2. Votos necesarios y suficientes para *E* escaños (*M*=5; *p*=2)142
5.3. Clasificación de algunas fórmulas electorales proporcionales y mayoritarias para el caso especial *p*=2..........................154
5.4. Funciones lineales y no lineales: votos necesarios y suficientes en una circunscripción de siete escaños (*p*=2) 157
5.5. Aspecto de la tabla periódica infinita de las fórmulas electorales de divisores; *p*=2...167
5.6. Funciones de umbrales de fórmulas y anti-fórmulas. Tabla circular 170
6.1. Empates competitivos entre cinco partidos en una circunscripción de *M*=4 escaños. Método de cuota simple o de Hare y restos mayores (*q*=1/*M*)...184
6.2. Empates competitivos entre cinco partidos en una circunscripción de *M*=4 escaños. Método de divisores de Sainte-Laguë (*c*=0,5) 203
6.3. Funciones de umbrales de algunos métodos de divisores 215
6.4. Funciones de umbrales de algunos métodos de cuota y restos mayores 215

6.5. Funciones de umbral de once conocidas fórmulas electorales en un distrito de cinco escaños para sistemas de partidos de tres y de seis componentes
217
7.1. Algunas clasificaciones de las fórmulas electorales por su proporcionalidad 238
7.2. Clasificaciones de las fórmulas electorales por su sesgo ..241
7.3. Funciones de umbrales de la fórmula de Sainte Laguë modificada...244
7.4. Indicadores de fragmentación electoral para seis hipotéticos sistemas de partidos 248
7.5. Correlación entre tres dimensiones de la fragmentación del electorado en las 52 circunscripciones españolas (1996) ..255
7.6. Correlación entre distintas medidas del número de partidos (N_a) para los electorados de las 52 circunscripciones españolas (1996) 258
7.7. Comparación de algunos índices de desviación de la proporcionalidad ante sistemas de distinto tamaño y máxima concentración de escaños 265
7.8. Correlación entre ocho medidas de desviación de la proporcionalidad y medidas afines para los resultados electorales de
las 52 circunscripciones españolas (1996) 277
8.1. Matriz de coincidencias en las asignaciones de las nueve fórmulas electorales (frecuencias absolutas)......................289
8.2. Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza el índice de concentración de escaños (*HH*), lo maximiza o queda situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas) 290
8.3. Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza la representación del mayor partido, la maximiza o queda situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas)290
8.4. Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza el número de partidos con representación, lo maximiza o queda
situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas) 293
8.5. Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza el índice de desviación agregada de la proporcionalidad (*D*), lo maximiza o queda situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas)..297

8.6. Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza el índice de desviación distributiva de la proporcionalidad (D_p), lo maximiza o queda situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas)..297

GRÁFICOS:

5.1. Haz de funciones de umbrales para la competición bipartidista 143
5.2. Votos mínimos y máximos con Ste-Laguë/Hare. Asignación para V:[0,7 0,3]...146
5.3. Votos mínimos y máximos para Adams y D'Hondt. Asignación para V:[0,7 0,3]...149
5.4. Votos mínimos y máximos com Imperiali de divisiones. Asignación para V:[0,8 0,2]...151
5.5. Pendiente no constante de Hil-Huntington y orden parcial de la fórmula 158
5.6. Funciones de pagos de algunas fórmulas electorales (M=5, p=2) 162
5.7. Fórmulas igualitarias y fórmula Adams..............................166
5.8. Estrella de fórmulas y antifórmulas electorales 171
5.9. Ejes básicos del espacio de la representación electoral (M=3) 175
5.10. Ejes básicos del espacio de la representación electoral (M=25) 176
6.1. Funciones de votos mínimos de algunas fórmulas proporcionales y mayoritarias. M=5, p=3 208
6.2. Funciones de votos máximos de algunas fórmulas proporcionales. M=5, p=3 210
6.3. Funciones de votos máximos de algunas fórmulas proporcionales. M=5, p=6 211
6.4. Funciones de votos máximos de dos métodos mayoritarios y del método H'Hondt 212
8.1. Frecuencia con las que las fórmulas quedan ordenadas en distintas posiciones por el índice de concentración de escaños (HH)..294
8.2. Frecuencia con las que las fórmulas quedan ordenadas en distintas posiciones por el índice de concentración de escaños (HH)..295

8.3. Frecuencia con la que las fórmulas quedan ordenadas en distinta posición por el índice de desviación de la proporcionalidad (D)....298
8.4. Concentración de escaños en 3.000 sistemas electorales. V=distribución en Barcelona en 1996....305
8.5. Evolución de la concentración de escaños cuando varía la fórmula electoral....306
8.6. Evolución de la concentración de escaños cuando varía la magnitud electoral....307
8.7. Desviación de la proporcionalidad en 3.000 sistemas electorales. V=distribución del voto en Barcelona en 1996....308
8.8. Evolución de la desviación de la proporcionalidad cuando varía la fórmula electoral....309
8.9. Evolución de la desviación de la proporcionalidad cuando varía la magnitud....310
8.10. Índice de concentración de escaños en 30.000 sistemas electorales. V=cte aleatoria....311
8.11. Índice de desviación de la proporcionalidad en 30.000 sistemas electorales. V=cte aleatoria....312

AGRADECIMIENTOS

Los primeros agradecimientos debidos no son, por institucionales, menos sentidos. Mi deuda de gratitud con el Centro de Estudios Avanzados en Ciencias Sociales del Instituto Juan March y con su director, José María Maravall, es sencillamente muy grande, por lo que es mejor no gastar más adjetivos. Mi director de tesis y también profesor del Centro, José Ramón Montero, ha sido una constante fuente de ayuda y de apoyo en todos los frentes, mostrando tanta dedicación, paciencia y buen humor como se puede desear.

Tendría que hacer un esfuerzo de memoria para recordar haber hecho algo, alguna vez, sin que Pacho Sánchez-Cuenca me ayudase en ello. Esta vez no ha sido menos.

Algunos problemas esenciales de esta tesis ni siquiera me habría atrevido a abordarlos si mi colega José S. Martínez no me hubiese quitado el miedo a hacerlo. No es exagerado decir que sin su ayuda no habría empezado a escribir una buena parte de este manuscrito.

Gonzalo Fernández de Córdoba hizo esfuerzos de altruismo generoso que son muy difíciles de agradecer. Quiero mencionar que es un hecho que no habría podido terminar si no hubiera contado con él.

Subrayar estos nombres en mi agradecimiento público no hace de estas personas corresponsables de las muchas faltas que puedan encontrarse.

Sospecho que puede ser difícil de creer, para el que no lo conozca, lo decisivo que resulta contar con el apoyo del personal de biblioteca y de la administración del CEACS. Entre todos, consiguen que el trabajo parezca fácil. En Salamanca, María José Hierro también puso una amable parte de su tiempo a mi disposición, ayudándome en penosas tareas de manipulación de datos.

Durante años me he beneficiado de un extraordinario clima de investigación y amistad en Madrid, en algunas visitas a otros lugares y, últimamente, en Salamanca. Ahora me parece casi impúdico y, por lo demás, creo que innecesario, hacer la crónica completa de mis deudas. Ojalá pudiera saldarlas todas de viva voz.

Salamanca, 8 de Marzo del 2000

INDICACIONES SOBRE LA NOTACIÓN

Empleo negritas para los vectores (**v**, **E**), mayúsculas para los números absolutos (V, E) y minúsculas para las frecuencias o fracciones (v, e).

En general, trato de seguir las convenciones que encuentro más comunes en la literatura. Siempre que esto es posible, empleo la notación de Taagepera y Shugart (1989), por tratarse de la más extendida, pero traducidas las iniciales pertinentes al castellano, aunque el resultado no es completamente sistemático, pues, con ellos, denoto el número de partidos como p en lugar de P, o el umbral como U (T en inglés) en lugar de hacerlo con minúscula. Los términos más comunes que siguen su norma son: número de partidos p, votos V, escaños E, magnitud M, modificador de la cuota n. Los números índice se designan mediante las letras que acompañan a su definición en el capitulo 7. Algunos términos más idiosincrásicos en estas páginas son el término de ajuste c, el divisor x (o X) o los relativos a las funciones de umbrales como los votos necesarios v_{NEC}, etc.

En general la notación formal se ha reducido al mínimo, escribiéndose *verbatim* la mayoría de las operaciones lógicas. El único término específico definido en estas páginas es _, por "ser al menos tan mayoritario como".

En su momento, se introduce una nomenclatura sistemática de las fórmulas electorales (pese a que se emplea lo menos posible). Las fórmulas de cuota se designan como $Q+n$ y las fórmulas de divisores constantes como $D+c$, donde n y c son números que las caracterizan.

CAPÍTULO UNO

INTRODUCCIÓN

El estudio de los sistemas electorales es una rama de la teoría de las instituciones políticas y, más concretamente, de la teoría constitucional positiva. Como teoría institucional, en su estudio pueden distinguirse tres momentos o secuencias lógicas. Con gran diferencia, el aspecto más desarrollado de la teoría es el estudio de los efectos del sistema electoral sobre el sistema político en su conjunto. Podemos referirnos a esto como concepción mínima de los estudios electorales. Pero los sistemas electorales no se encuentran en la naturaleza, sino que son el producto de una decisión centralizada por parte de las autoridades políticas. Se hace necesario investigar las condiciones de posibilidad de los sistemas electorales, esto es, su origen en los procesos legislativos o constitucionales. En tercer lugar, ha de clarificarse el funcionamiento mismo de las reglas, la "gramática institucional", de manera que puedan determinarse las variables independientes, en el primer caso, o dependientes, en el segundo. Esta tesis se inscribe plenamente en esta secuencia lógica de la disciplina: el análisis abstracto de las reglas.

1.1. Sistemas electorales o sistemas de representación

Mi objeto de estudio es lo que llamo un sistema de representación elemental. Un sistema de representación puede ser un sistema electoral o un sistema de prorrateo de escaños aunque, en sí mismo, sea un objeto más abstracto.

Un sistema de representación es un método para distribuir un bien “granulado”, la representación en nuestro caso, entre las poblaciones que son subconjuntos de una población total, mediante criterios anónimos, en los que sólo cuenta el número de los individuos y no su identidad. La representación es un bien granulado porque sólo es parcialmente divisible, o no lo es en absoluto, como sucede cuando se elige a un único representante. La población puede estar dividida por sus preferencias políticas, expresadas en la votación, por su lugar de residencia, o por cualquier otra característica.

Un sistema electoral es un conjunto de reglas institucionales que definen los mecanismos de elección, mediante el voto popular, de representantes o agentes de los ciudadanos. Dicho de modo sucinto, un sistema electoral traduce los votos en escaños; o bien, produce una asignación de escaños entre los candidatos a la representación a partir de la distribución de los votos que los ciudadanos otorgan a dichos candidatos. En el caso más común, se trata de elegir representantes para una asamblea legislativa. También puede tratarse de la elección de un único agente, como es el jefe del Estado en las Repúblicas presidencialistas.

Una ley electoral es algo bastante más amplio que un sistema electoral. Incluye mecanismos regulativos que se refieren, por ejemplo, a la conducta de los candidatos a ser elegidos como representantes, a la conducta de los votantes, de los agentes encargados del escrutinio, al instrumento físico de emisión del voto, y un largo etcétera. La ley electoral también puede incluir las reglas institucionales que definen los términos “ciudadano” y “elegible como representante”, o derecho al sufragio activo y pasivo. Sin embargo, estos derechos se recogen típicamente en distintos artículos de la Constitución del Estado. Lo mismo sucede con los derechos y deberes de los representantes. Ninguna de estas reglas forma parte del sistema electoral en sentido estricto. Un mismo sistema electoral puede emplearse en un régimen censitario y en un régimen de sufragio universal. De igual modo a como un mismo sistema puede aplicarse en un país con una legislación muy restrictiva en lo referido al gasto en campañas electorales y en otro que carezca de controles; o en un Estado donde el voto sea obligatorio y donde no lo sea; o en un sistema donde se vote en papeletas blancas y en otro donde se prefieran los tonos ocres.

Un método de votación es algo más abstracto que un sistema electoral. Un método de votación es un conjunto de reglas para agregar las preferencias de los individuos, expresadas en votos, en una decisión o preferencia colectiva. La cuestión de la representación no se suscita.

En un sistema electoral podemos decir que se emplea cierto método de votación para tomar la decisión consistente en elegir a uno o más representantes. En la jerga de los sistemas electorales, llamamos fórmulas electorales a los métodos de votación ideados para elegir representantes. Las fórmulas electorales pueden considerarse, como los métodos de votación en general, como funciones de elección colectiva. Sin embargo, esto podría oscurecer la afinidad entre los sistemas electorales y otros sistemas de representación. El problema del prorrateo de escaños entre circunscirpciones es fórmalmente idéntico al de la asignación de escaños a partidos políticos, y las fórmulas son, a menudo, de un mismo tipo. Pero en la medida en que aquí la población se divide por criterios como el de residencia, y no por la expresión de una preferencia sobre los asuntos a decidir colectivamente, es inadecuado adoptar el lenguaje de la elección. Podemos así llamar funciones de representación, mejor que funciones de elección colectiva, a las funciones que asignan escaños a poblaciones.

Un sistema electoral elemental, o un sistema de representación elemental, tiene sólo dos componentes: un número de escaños y una función o método de reparto. Un sistema electoral complejo se caracteriza también por la manera en que organiza la representación en su conjunto: cuántos representantes son elegidos y en cuántas unidades es dividida la ciudadanía a efectos de la elección de representantes. Salvo en los sistemas de circunscripción única, esta es tarea, precisamente, de otro sistema elemental de representación: el prorrateo de escaños entre circunscripciones.

En las páginas que siguen me referiré indistintamente a sistemas electorales y a sistemas de representación, aunque con preferencia por lo primero; me referiré, asímismo, a los métodos de representación como fórmulas electorales y a las poblaciones como partidos. Todo ello me parece un uso más natural del lenguaje y resulta siempre claro que los términos pueden sustituirse por otros más generales para acomodar a los sistemas de prorrateo de escaños o, todavía más, para enmarcar problemas abstractos de distribución.

1.2. El lugar de esta tesis en la investigación básica

Los estudios electorales, o la "ciencia de los sistemas electorales" como subdisciplina de la ciencia política se ha ocupado, tradicionalmente, de la descripción analítica de los sistemas electorales y del estudio de sus consecuencias para el sistema de partidos. La descripción analítica ha sido importante siquiera porque el soporte en el que nos encontramos los sistemas electorales en el mundo, la legislación electoral, no facilita demasiado la segunda tarea. La descripción analítica es necesaria para intentar determinar, con la mayor precisión posible, qué características de los sistemas electorales producen ciertos efectos en los sistemas de partidos. Hoy existen trabajos muy valiosos sobre las consecuencias de las reglas y se ha comenzado a investigar en serio sobre los orígenes políticos de las mismas. Sin embargo, me parece que la investigación básica sobre métodos de representación se encuentra detenida.

En los últimos años, parece darse por sentado que la sintaxis de las instituciones ya es conocida, por lo que es el momento de investigar su uso, la pragmática, o la historia. En este sentido, la afirmación de Cox (1997) de que "las fórmulas electorales son funciones bien conocidas", para dispensarse de juzgar qué consecuencias tienen las distintas fórmulas en su modelo (y para ello se remite a un artículo de Lijphart y Gibberd de 1977) me parece tan sintomática como inexacta. Hay que subrayar que el contexto de esta afirmación es el libro reciente más admirable y celebrado, con razón, sobre los orígenes y consecuencias de los sistemas electorales.

En gran medida, el estudio de los sistemas electorales se ha guiado tradicionalmente por intereses normativos o, cuando menos, por fines universalistas. Los fines de la representatividad o proporcionalidad, por un lado, y de la gobernabilidad, por otro lado, destacan como el tipo de consecuencias deseadas en un sistema electoral. Pero el conocimiento de los sistemas electorales también es un saber auxiliar del arte de la herestética, en el sentido de Riker (1981). Distintos sistemas electorales pueden favorecer a actores concretos y a sus intereses políticos. La posible diferencia entre ambos tipos de fines, universalistas y distributivos, desaparece una vez que situamos al estudio de los sistemas electorales en la perspectiva global de la teoría de las instituciones políticas. Tal vez el debilitamiento de la preocupación estrictamente normativa haya contribuido al abandono de la investigación básica, orientada muchas veces hacia preguntas como cuál es la fórmula "más justa", que han pasado a un segundo plano en la investigación política comparada.

La investigación básica tuvo sus mayor impulso en los años setenta. Su cima es, fuera de toda duda, el magistral libro de Balinski y Young de 1982: *Fair Representation*, que se ocupa, por cierto, de métodos de prorrateo de escaños. Desde entonces, en algunos terrenos, la investigación ha retrocedido más bien que avanzado, al menos a juzgar por ciertas polémicas, como la reseñada en el capítulo 7 a propósito de la conexión entre índices de desviación y fórmulas electorales, que sencillamente desconocen argumentos que son objeto de prueba en el libro de Balinski y Young. En los últimos años el trabajo ha avanzado mucho en la operacionalización de las variables de estudio y el establecimiento de conexiones causales entre las mismas (*Seats and Votes* de Taagepera y Shugart, 1989), en la comparación multivariada propiamente dicha de los sistemas electorales existentes (*Electoral Systems and Party Systems* de Lijphart, 1994) y en el estudio del impacto de las reglas en la conducta estratégica de los votantes y los políticos (*Making Votes Count* de Cox, 1997), todos ellos construidos con vocación de clásicos. Sin embargo, la investigación básica existente se ha orientado a la teoría de la votación en el marco de los modelos de elección racional, en una literatura desarrollada independientemente de los estudios electorales, de la que hace buen uso Cox, pero no al análisis de los métodos de representación.

A mi juicio, la ciencia de los estudios electorales tiene culpa en haberse escrito demasiado a menudo a espaldas de los resultados de Balinski y Young; pero hay que decir que estos autores desconocen también, en gran medida, algunas nociones desarrolladas por los estudios electorales, como los umbrales de representación, que ya eran bien conocidas en su tiempo. Mi contribución trata de situarse "a hombros de gigantes" como habría dicho Merton, con quien no me comparo, que es el modo más seguro de alcanzar un poco más arriba. Se trata, sobre todo, de completar algunos aspectos que creo inacabados en la Teoría de la Asignación de Balinski y Young, valiéndome para ello, en gran parte del recorrido, de las funciones de umbrales de las fórmulas electorales, objeto tentativamente desarrollado por Rae y sus colaboradores (1971) y más resueltamente por Lijphart y Gibberd (1977).

Balinski y Young centran su estudio exclusivamente en fórmulas de representación proporcional. Mi contribución generaliza algunas de sus herramientas analíticas para poner bajo una misma luz todo tipo de fórmulas electorales: proporcionales y no proporcionales. Balinski y Young atienden sobre todo a los métodos de divisores, a cinco de ellos que son clásicos, y a un único método de cuota y restos mayores. En esta tesis se muestra la continuidad de todas las variantes de los métodos de divisores y de los métodos de cuota, y la relación de equivalencia entre los dos tipos de métodos. Los métodos son infinitos, pueden caracterizarse por una variable continua y pueden ordernarse. La fórmula de mayoría simple es el límite del continuo. Balinski y Young ignoran las funciones de umbral y hacen una única referencia a los umbrales de representación de algunas fórmulas, proponiendo un resultado que, demostrablemente, es incorrecto. En mi tesis me sirvo de las funciones de umbral para mostrar las propiedades de las fórmulas en cuanto a su capacidad para producir resultados sesgados en distinta medida en favor de las mayorías o de las minorías.

Las funciones de umbrales de cuatro fórmulas electorales fueron determinadas, con el nombre de funciones de pagos, por Lijphart y Gibberd (1977). La principal limitación de su trabajo es que se refiere a sólo cuatro fórmulas, escogidas entre las más comunes en la práctica, no obteniendo estos autores una generalización del procedimiento por el que las deducen. En esta tesis se obtienen las funciones generatrices que dan lugar a las funciones de umbrales de cualquiera de las infinitas fórmulas de divisores o de cuota y restos mayores, sean o no conocidas en la práctica. Además, Lijphart y Gibberd tampoco analizan las funciones que obtienen, pues ni siquiera se detienen a observar cuál es su pendiente o su constante. En esta tesis se demuestra que las infinitas fórmulas se encuentran en un haz en el bipartidismo, o una serie de haces en el multipartidismo. Todas tienen un punto en común y se diferencian por sus pendientes. El análisis de las funciones permite interpretar observaciones regularmente fundadas en la práctica, como el hecho de que cuanto menor es el tamaño de la cuota más sesgada es la distribución *contra* los partidos pequeños. Existe una relación inversa entre la pendiente y la constante de las funciones, lo que indica que cuanto menores son los costes, en votos, de la acumulación de escaños, mayores son los costes de acceso a la representación, y viceversa.

1.3. El lugar de esta tesis en la investigación empírica

Como todo el mundo sabe, el impulso inicial básico de la ciencia comparada de los sistemas electorales se le atribuye a Duverger (1957). Por conocida que sea la historia, conviene recordarla de forma muy resumida. Hablando en términos generales, puede decirse que Duverger clasifica a los sistemas electorales en mayoritarios y proporcionales, y a los sistemas de partidos en bipartidistas y multipartidistas. Dadas estas tipologías, encuentra dos regularidades. De un lado, los sistemas mayoritarios vienen acompañados de sistemas bipartidistas. Esto le pareció "próximo a una ley sociológica". De otro lado, los sistemas proporcionales vienen acompañados de sistemas multipartidistas. Además, propone dos mecanismos que podrían explicar la primera "ley" y ayudar, al menos, a explicar la segunda regularidad. Los mecanismos suponen que es el sistema electoral el que causa que los sistemas de partidos sean de uno u otro tipo. El primero es el "efecto mecánico" de los sistemas electorales: los sistemas electorales mayoritarios reducen las posibilidades de representación de terceros partidos (los sistemas proporcionales permiten la representación de terceros partidos). El segundo mecanismo es el "factor psicológico" de los sistemas electorales: los votantes en un sistema mayoritario no votan, o votan menos, a terceros partidos, pues tienen menores posibilidades de obtener representación (el factor psicológico está ausente en los sistemas proporcionales).

No tengo el propósito de exponer aquí todas y cada una de las observaciones que se han hecho a estos enunciados hasta llegar a una formulación bastante precisa de lo que ahora llamamos "regla de Duverger" (Cox 1997) (puede leerse buena parte de la historia en Riker 1986 y el propio Duverger 1986). Debe señalarse que esta tradición se refiere a los sistemas electorales y a los sistemas de partidos como si fuesen cosas que uno reconoce cuando las ve. Es como si pudiésemos decir, ahí hay un sistema electoral del tipo A con un sistema de partidos X, aquí uno de tipo B con un sistema Y. De hecho, se han gastado bastantes esfuerzos en la ciencia política para establecer tipologías de sistemas electorales y de sistemas de partidos de manera que la cosa pareciese así de sencilla.

Las regularidades (o leyes, o hipótesis) de Duverger son el producto de la comparación. Pero tanto los sistemas electorales como los sistemas de partidos son todos complejos que duran en el tiempo. Un enfoque cuyo punto de partida puede atribuirse a Rae (1971) consiste en mejorar la técnica comparativa mediante la creación de indicadores cuantitativos para medir las características de los sistemas de partidos (principalmente, mediante los índices de fragmentación) y las consecuencias del sistema electoral (sobre todo mediante un índice de proporcionalidad). Los valores de éstos índices se contrastan, a su vez, con variables de los sistemas electorales, más bien que con “sistemas electorales” como conjuntos de reglas. Por ejemplo, el tipo de fórmula (hasta hoy considerado siempre una variable nominal) o la magnitud de las circunscripciones (variable numérica que nos permite estimar asociaciones lineales). Lo que se persigue son variables o indicadores de los aspectos esenciales de los sistemas electorales, o de algunos de ellos, que nos sirvan para predecir otros indicadores “del sistema de partidos”. Por ejemplo, en lugar de decir que los “sistemas mayoritarios” producen “sistemas bipartidistas”, diremos que la magnitud electoral predice bien los índices de fragmentación parlamentaria.

A este enfoque se le ha reprochado, a mi parecer injustamente (Sartori 1986), el que en realidad no trata de las consecuencias de los sistemas electorales sino que, con característico desdén, es “pura estadística”. Sin embargo, para poder discutir con claridad cuáles son las consecuencias en el país A de tener o haber introducido el sistema electoral X, necesitamos apoyarnos en regularidades sólidas que sólo podemos obtener del estudio cuantitativo de indicadores que recogen muy parcialmente la información del país A o del sistema X. De lo contrario, podemos perdernos en la comparación de unidades demasiado complejas. Dicho más simplemente, si para aprender algo hay que comparar, para aprender mucho hay que comparar mucho. Tras la contribución de Rae, esta es la regla a la que obedecen la investigación empírica de Lijphart (1994) y todos los que siguen su estela

¿Por qué es importante la investigación básica para el estudio comparado? Aunque no sea el propósito central de este trabajo, pueden encontrarse aquí algunas contribuciones modestas, pero importantes. En esta tesis creo que se sientan las bases para el estudio empíricamente riguroso de los llamados *efectos mecánicos* de los sistemas electorales. Sin duda, se trata de los efectos más sencillos de interpretar y, concedo además, me atengo exclusivamente a los efectos del sistema elemental, de dos variables, la magnitud y la fórmula, lo que significa, en general, atender a efectos locales y estáticos. En particular, en la tesis se expone la conexión que existe, y que es empíricamente constatable, entre las variables del sistema y, de un lado, la fragmentación de la distribución de escaños y, de otro, la desviación de la proporcionaldad, todo ello medido a escala "local" y puntual en el tiempo.

Los efectos mecánicos (también llamados proximales, Rae 1971) del sistema electoral no son otra cosa que la predicción cierta de los resultados electorales a partir del sistema electoral, el número de candidaturas y la distribución del voto. El estudio comparado de los efectos mecánicos del sistema electoral se concibe como la predicción de *variables* de resultado a partir de *variables* institucionales y de comportamiento. Es una variable de resultado, por ejemplo, la concentración de la distribución de los escaños; son variables institucionales la magnitud electoral y la fórmula; es una variable de comportamiento la distribución del voto entre los partidos que compiten, o el número de los mismos.

Lo esencial, en primer lugar, es contar con una caracterización cuantitativa de los sistemas electorales. La magnitud de los sistemas es obviamente una variable cuantitativa, pero las fórmulas se han tratado siempre como categorías nominales. Mi investigación permite caracterizar cuantitativamente a las fórmulas mediante una variable de razón. Las infinitas fórmulas pueden caracterizarse por números reales. En segundo lugar, la investigación básica facilita la comprensión de las conexiones entre los indicadores que manejamos sobre los resultados electorales y las reglas de los sistemas. De hecho, creo que en algunos casos son transparentes.

En esta tesis se dedica un capítulo más bien extenso a la discusión de los indicadores de resultado que se manejan en los estudios electorales, divididos en dos tipos principales: indicadores de fragmentación, o concentración, e indicadores de desviación con respecto a la proporcionalidad. También se dedica un capítulo a exponer los resultados de algunos experimentos con sistemas electorales, los cuales permiten hacer predicciones rigurosas sobre la conducta de los indicadores bajo distintos sistemas.

Lo más adecuado para investigar efectos mecánicos son los experimentos. La recogida de los datos que "la naturaleza" ofrece no es suficiente. El número de sistemas electorales existentes es muy limitado, el tipo de distribuciones de los votos a los que se enfrentan también lo es. En mis experimentos enfrento a algunos sistemas electorales a miles de distribuciones de votos generadas al azar; en otros, controlo la distribución de los votos, que mantengo constante, y la enfrento a miles de sistemas electorales. La simple creación y programación de los miles de sistemas electorales sería imposible, según creo, sin la caracterización analítica de las fórmulas como elementos de un continuo infinito, que es un resultado de la investigación básica de esta tesis.

Me parece muy importante destacar que al estudiar los sistemas electorales nos mantenemos, por lo que se refiere a los llamados efectos mecánicos, en la misma escala operatoria que el agente público (o de partido) que maneja tablas y legislación[1]. Podemos idear indicadores, algunos relativamente complejos e ingeniosos, a fin de destacar cierto aspecto específico de los resultados que no es perspicuo, por ejemplo, la sensibilidad del reparto a cambios marginales en la distribución del voto; pero esto no nos sitúa en un plano distinto al agente que "cuenta votos" con un fin "práctico". Pasa a un plano distinto el biólogo genético con respecto a jardineros o criadores de animales (o a algunos ideólogos nacionalistas), o el economista con respecto a consumidores y productores. Sin embargo, nosotros no hacemos nada diferente del que cuenta votos de acuerdo con ciertas reglas, no reconstruimos la actividad *mecánica* de los tabuladores de votos desde un plano distinto. No explicamos su actividad, la reproducimos, aunque empleemos términos abstractos. Casi siempre destacamos unos aspectos de las reglas frente a otros, unos aspectos de los outputs frente a otros, buscamos maneras "sorprendentes" de presentar la información. Pero son sorprendentes porque nuestra capacidad de almacenamiento y computación de datos es muy limitada. Dicho sea con todos los respetos, es absurda la autocomplaciencia con la matematización de los estudios electorales que muestran, por ejemplo, Taagepera y Shugart (1989) pues nada tiene que ver con la matematización de otras actividades. Si la actividad que forma el objeto de estudio consiste en tabular y aplicar fórmulas, malo sería que su estudio fuese literario.

Los efectos psicológicos (también llamados distales) del sistema electoral consisten en la influencia que las reglas del sistema tienen en la conducta de los actores, tanto políticos como votantes. Su estudio se concibe como la predicción de variables de comportamiento a partir de variables institucionales (y a partir de valores pasados o valores

[1] El lector con inclinaciones filosóficas puede tal vez percibir en este párrafo un muy vago eco de la teoría de la ciencia de Gustavo Bueno. Gustavo Bueno, *Teoría del cierre categorial* (1992).

esperados de variables de comportamiento y, mecánicamente, de resultado).

Para predecir efectos mecánicos sólo necesitamos suponer que los agentes públicos (miembros de juntas electorales, agentes de partidos, funcionarios de la dirección general de procesos electorales) saben las cuatro reglas, que los ordenadores funcionan y que la ley se cumple. Sin embargo, para explicar efectos psicológicos (o distales) sí necesitamos una reconstrucción del comportamiento de los agentes, un mecanismo explicativo distinto de la descripción, resumida o no, de la actividad de los individuos. Aquí los estudios electorales se unen al tronco de la sociología electoral, o de la teoría del comportamiento político. Un instrumento adecuado para la reconstrucción de la acción de los actores políticos, de manera que puedan explicarse los efectos distales o psicológicos de los sistemas electorales, es la teoría de la elección racional: los individuos actúan del modo que juzgan mejor para ellos a la luz de sus preferencias y de sus creencias (de sus expectativas). La elección racional no es psicología, sino simple lógica. En la medida en que tiene éxito reconstruyendo la acción de los agentes, la formalización que se obtiene sí representa un salto cualitativo en la comprensión de los fenómenos.

En esta tesis no se estudian conductas, pero el análisis de los sistemas electorales que se propone creo que resultará relevante para la formulación de modelos sobre el comportamiento de los actores bajo distintas reglas. Por ejemplo, si los resultados de Cox (1997) sobre conducta estratégica en ciertos sistemas de representación proporcional no son del todo concluyentes (en particular, fracasa con el caso español) creo que se debe, en parte al menos, a que no toma en cuenta las funciones de umbrales de los distintos métodos. Este es un aspecto que queda pendiente para la investigación futura.

El análisis de los sistemas electorales ha de resultar relevante también para los modelos de elección de sistemas electorales en los procesos legislativos o constituyentes. Las reglas de elección de representantes pueden ser infinitas, pero sólo algunas reglas se eligen a sí mismas en equilibrio. Por ejemplo, es un resultado de la investigación de las funciones de umbrales que la fórmula D'Hondt maximiza la mínima representación de un partido mayor que la media pero menor que la mayoría absoluta. Las consecuencias de esta proposición para un modelo de decisión racional con incertidumbre parecen evidentes.

1.4. La estructura del trabajo y los resultados fundamentales

El capítulo segundo introduce los conceptos fundamentales y las definiciones que se van a utilizar a lo largo de la tesis. Se define qué es fórmula electoral, qué tipo de funciones son las fórmulas electorales, y qué es un sistema electoral elemental (o, de modo equivalente, un sistema elemental de representación). Tras exponerse algunas clarificaciones sobre las restricciones de dominio de algunas fórmulas, se presentan el concepto de función de umbrales. Las funciones de umbrales indican los votos necesarios y suficientes, o, en una formulación alternativa, los votos mínimos y máximos, para lograr un determinado número de escaños. En cuarto lugar se establecen los principios de una clasificación exahustiva de las fórmulas electorales en mayoritarias, proporcionales e igualitarias. Es un objetivo de este capítulo advertir contra la ilusión de que todas las fórmulas electorales son, en mayor o menor medida, aproximaciones a la proporcionalidad perfecta. Las fórmulas electorales se ordenan en un continuo entre la igualdad y la mayoría simple. Este orden puede representarse por las funciones de umbrales. Además, pueden concebirse fórmulas electorales más allá de la igualdad, fórmulas en las que es mejor perder votos a ganarlos, que forman parte del mismo continuo. Las fórmulas electorales son infinitas.

El tercer capítulo se dedica a la clarificación de una de las dos tecnologías de reparto que pueden emplearse en un sistema electoral: las fórmulas de cuota. Se introduce el mecanismo de distribución, se precisa su caracterización funcional, se exponen sus posibles variedades y el tipo de consecuencias que se esperan de las distintas variedades de cuota. La elasticidad del tamaño de las cuotas tiene límites precisos, por lo que en el capítulo se aclaran las nociones de falsa cuotas y la de fórmula de cuota compuesta. El capítulo demuestra que todas las fórmulas de cuota decisivas son proporcionales, aunque sugiere que ciertos métodos electorales no decisivos, de los que el sistema de voto único no transferible es un extremo, son variedades de métodos de cuota. Tanto este capítulo como el siguiente contienen una propuesta de nomenclatura sistemática para las fórmulas electorales que permita designar cómodamente a aquellos métodos que no son conocidos en la práctica y carecen de nombre propio.

Los métodos de divisores, objeto del cuarto capítulo, son algo más complejos, al menos en apariencia, pero mucho más flexibles. En el capítulo se propone una caracterización formal de las funciones de estos métodos a partir de la definición de Balinski y Young (1982). El capítulo aclara la relación que existe entre los algoritmos que habitualmente se emplean para computar la asignación de escaños con estos métodos y las funciones que los definen. Es un hecho sorprendente que, en la ciencia política tradicional, estas fórmulas se presentan, discuten y tratan de comparar en términos de los algoritmos de cálculo. Creo que no es demasiada presunción afirmar que, en general, los estudios electorales desconocen la naturaleza de las fórmulas de divisores. En este capítulo se propone, además, romper con las limitaciones impuestas por Balinski y Young para los métodos y se ofrece una definición general que abarca tanto a métodos proporcionales como mayoritarios e igualitarios. En este contexto se introduce una conclusión esencial: la fórmula de mayoría simple no es sino un caso extremo de fórmula de divisores, cuando la variable que los caracteriza (el término de ajuste) tiende a infinito. Este resultado es necesario para establecer el orden de las fórmulas en un continuo cuyo límite es la mayoría y cuyo centro es la proporcionalidad.

El capítulo quinto, tras repasar el terreno, ya explorado por otros autores, de los umbrales de representación, introduce la forma general de las funciones de umbrales e investiga cuáles son éstos en el universo limitado de la competición bipartidista. La competición bipartidista es una especie de estado embrionario de la competición electoral en la que la estructura de las reglas puede apreciarse con peculiar nitidez. En primer lugar, la competición bipartidista borra la diferencia entre la técnica de cuotas y la de divisores, que pasan a ser idénticas funciones. En segundo lugar, la competición bipartidista elimina la diferencia entre votos necesarios y suficientes en las funciones de umbrales, que se convierten en una función única que indica los votos necesarios y suficientes para cada número de escaños para un partido cualquiera. En tercer lugar, estas funciones siempre son rectas. En cuarto lugar, todas las funciones, sean proporcionales, mayoritarias o igualitarias, forman parte de un mismo haz. Incluso las anti-fórmulas electorales, aquellas en las que la expectativa de escaños decrece con los votos, forman parte del mismo haz. El hecho de que estén todas constreñidas a pasar por un mismo punto permite compararlas de modo inmediato por su pendiente. Esa pendiente representa un orden. El orden es el orden inducido por la relación “ser al menos tan mayoritario como”. Sólo las fórmulas, relativamente raras, de pendiente no constante, escapan a ese orden, aunque no al orden, también definido, de “ser al menos tan mayoritario como” cuando los votos son conocidos. Las pendientes ofrecen también una interpretación gráfica a la regionalización del espacio de la representación en una región proporcional, una región mayoritaria y una región igualitaria, además de la región “en negativo” de las anti-fórmulas electorales. El orden de las fórmulas nos permite, en resolución, crear una tabla periódica en la que quedan clasificados los elementos conocidos y los desconocidos y en la que pueden distinguirse tipos de elementos, como los metales y los no metales, en ciertas regiones de la tabla que marcan cambios cualitativos; tal es el caso de, por ejemplo, las fórmulas proporcionales y las no proporcionales.

El capítulo sexto es el más abstracto de todos. En este capítulo se obtiene la generalización de la función generatriz de las funciones de umbrales en el dominio irrestricto del multipartidismo. El multipartidismo nos obliga a tratar de modo separado las funciones que emplean la técnica de las cuotas y aquellas que emplean la de divisores. Nos obliga, además, a diferenciar la forma de las funciones de votos mínimos (o necesarios) y máximos (paralela a la función de votos suficientes), pues tienen formas y pendientes distintas. Las funciones de votos mínimos siempre son lineales, pero sólo las funciones de votos máximos de las fórmulas de tipo mayoritario lo son. La simetría se pierde en un tercer aspecto, y es que no todas las funciones forman parte de un mismo haz, sino que hay una configuración distinta para las fórmulas de tipo proporcional, otra para las mayoritarias y otra para las igualitarias. Estas últimas, por lo demás, se dividen en dos tipos: q-igualitarias, que emplean cuotas, y d-igualitarias, basadas en divisores. Tras levantar una considerable polvareda con todas estas distinciones se muestra que, con todo, existen equivalencias entre las fórmulas de cuota y las de divisores: para cada problema de asignación de escaños en una distribución de votos y cada fórmula de cuota, existe una fórmula de divisores equivalente (es decir, que produce una misma distribución de escaños). Sin embargo, los métodos de cuota y los de divisores no pueden ser ordenados por una misma relación *a priori*, como "ser al menos tan mayoritario como", lo que introduce una inconmensurabilidad en lo que debería ser una tabla periódica general obligando a construir dos tablas separadas. En el capítulo se demuestra, ahora sí, formalmente, que tanto las fórmulas de cuota como las de divisores están ordenadas por su sesgo mayoritario. La relación “ser al menos tan mayoritario” induce un orden lineal en sendos conjuntos. La relación sólo induce un orden parcial estricto (es decir, no completo) en el conjunto de todas las fórmulas electorales. Las fórmulas de cuota y las de divisores pueden conectarse sólo por una relación *a posteriori*, como “ser al menos tan mayoritario” cuando los votos son conocidos.

El capítulo séptimo comienza por discutir las clasificaciones que se han propuesto en la literatura sobre fórmulas electorales. Tras enunciar el, a estas alturas ya evidente, orden de las fórmulas derivado de los resultados de los anteriores capítulos, se recoge la posibilidad de emplear una estrategia indirecta, la más ampliamente practicada, para comparar sistemas electorales. Se trata de comparar los efectos y no simplemente, como hasta este momento, los procedimientos. Para ello se debe disponer de unos indicadores fiables sobre los efectos de los sistemas: números índice que trasmitan la adecuada información sobre cómo están distribuidos los escaños o sobre cómo difiere dicha distribución con respecto a la distribución de los votos. A la discusión de los indicadores se dedica la mayor parte del capítulo, que pretende vindicar a los más sencillos de todos los que se han propuesto en los estudios electorales. En particular, se trata de deshacer la confusión sobre el hecho de que pueda haber algún problema si algún indicador de desviación está sistemáticamente asociado a una fórmula de reparto, como efectivamente es el caso.

El octavo capítulo presenta algunos experimentos basados en ejercicios de simulación de votaciones y sistemas electorales. El primer experimento enfrenta nueve sistemas electorales proporcionales a 1.000 sistemas de partidos en los que tanto el número de partidos como la distribución de los votos se ha generado aleatoriamente. El segundo ejercicio enfrenta distribuciones de votos constantes a sistemas electorales variables. En la primera parte, se experimenta con 3.000 sistemas electorales distintos; en la segunda, se experimenta con 30.000 sistemas. Cada sistema es la combinación de una magnitud electoral y de una fórmula de reparto. Los experimentos corroboran las conclusiones establecidas en el análisis más abstracto de las reglas. Los experimentos dan una indicación, además, sobre cómo sortear el problema de la inconmensurabilidad de las cuotas y los divisores, mostrando afinidades que pueden ser suficientes para una clasificación de las fórmulas que sea útil en la investigación comparada. Los experimentos, por último, muestran que, si bien los efectos de los sistemas electorales varían de modo regular o uniforme cuando la fórmula lo hace, la variación es muy irregular con respecto a la magnitud o número de escaños. Para los sistemas electorales existe una pauta general que indica un descenso de la desviación y de la concentración cuando la magnitud crece, pero el itinerario puede ser una sucesión de altibajos, a veces sorprendentes.

El último apartado numerado como capítulo concluye muy sucintamente.

CAPÍTULO DOS

CONCEPTOS BÁSICOS

En este capítulo se introducen algunos de los conceptos fundamentales que se manejan a lo largo del trabajo. Se trata de unas páginas tediosas a las que es posible que el lector tenga que volver en algún momento a medida que avanza en los capítulos siguientes. El capítulo intenta definir todos los términos que emplea, aunque presupone una cierta familiaridad con el funcionamiento de las fórmulas electorales. Las fórmulas electorales son descritas con detalle en los capítulos 3 y 4. Estas páginas no proponen ninguna tesis, aunque anuncian algunas, sino que tratan de enfocar un problema y precisar un lenguaje, aunque sea de un modo que cualquier persona entrenada en el lenguaje formal puede encontrar tosco.

En primer lugar, se define qué es una fórmula electoral. Las fórmulas electorales han de cumplir una serie de condiciones. Las fórmulas son funciones de representación anónimas y neutrales, son decisivas, son funciones monótonas crecientes de los votos, deben ser homogéneas. La definición que se ofrece de fórmula electoral es una definición mínima; en particular, no implica la proporcionalidad. La caracterización de las fórmulas muestra que la regla de mayoría simple es un caso especial de fórmula electoral, o, si se prefiere, que las fórmulas electorales son generalizaciones del principio de mayoría.

En segundo lugar, se presentan algunas clarificaciones sobre las restricciones en el dominio de algunas fórmulas. Las fórmulas electorales pueden ser simples pero, para cumplir con la condición de decisividad, pueden ser compuestas o complementarias. Este es un asunto especialmente antipático, pero de discusión obligada, porque algunos sistemas electorales existentes en la realidad proponen fórmulas cuyo ámbito de aplicabilidad se encuentra limitado a un subconjunto de los posibles resultados electorales. Más concretamente, tendremos oportunidad de comprobar que algunas fórmulas de cuota y restos mayores son falsas fórmulas consideradas en sí mismas, lo que nos obliga a introducir la noción de fórmula compuesta. También es cierto que alguna fórmulas de divisores sólo son útiles para resolver problemas de prorrateo de escaños entre circunscripciones, en los que, por definición, hay más escaños a repartir que elementos a satisfacer; sin embargo, no sería posible emplear estas fórmulas en una situación bastante típica de la competencia electoral, en la que hay menos escaños que contendientes. De otro lado, existe al menos una fórmula electoral (el voto único no transferible) para la que lo contrario es cierto. Ambos tipos de fórmula forman conjuntos complementarios.

En tercer lugar, se presenta el concepto de función de umbral. Todas las fórmulas electorales constantes pueden describirse mediante su función de umbrales. La definición de fórmula constante se introduce en el capítulo 4. Las funciones de umbrales indican los votos necesarios y suficientes para recibir un determinado número de escaños en un sistema electoral elemental. Los umbrales son una función del número de escaños, de la fórmula, de la magnitud del distrito y del número de partidos.

En cuarto lugar, se propone una clasificación de las fórmulas electorales en proporcionales, mayoritarias e igualitarias. La clasificación es exhaustiva. Las fórmulas electorales simples son siempre proporcionales o mayoritarias. Las fórmulas proporcionales cumplen una sexta condición, la condición general de proporcionalidad, añadida a las cinco que caracterizan a las fórmulas electorales. Las fórmulas mayoritarias e igualitarias incumplen dicha condición. Cada uno de estos tipos queda caracterizado por una condición propia: la condición de tendencia mayoritaria y la condición de tendencia igualitaria.

En quinto lugar, se definen las anti-fórmulas electorales como aquellas fórmulas de reparto que satisfacen las mismas condiciones que las fórmulas electorales menos la condición de monotonía positiva, satisfaciendo, en su lugar, una condición de monotonía negativa. Las anti-fórmulas electorales son una simple posibilidad teórica de repartos "al revés", premiando siempre a los menos sobre los que son más.

Además, afirmo, aunque todavía no demuestro, que las fórmulas pueden ordenarse, y no sólo clasificarse, comparando simplemente sus reglas de reparto. Las funciones de umbrales proporcionan un modo de representar el orden. La pendiente de las funciones de umbrales nos indica si la fórmula está más sesgada hacia la mayoría o hacia la minoría. Las fórmulas electorales constantes pueden ordenarse por su pendiente. Los polos del continuo en el que se ordenan son la igualdad y la mayoría.

Es un objetivo de este capítulo advertir contra la ilusión de que todas las fórmulas electorales son, en mayor o menor medida, aproximaciones a la proporcionalidad perfecta. Las fórmulas no se ordenan por su proximidad a la proporcionalidad, aunque esto puede hacerse, como si dijéramos, secundariamente, o como subproducto del análisis de sus efectos reales. El efecto real de las fórmulas que tiene un mayor interés positivo es el sesgo que introducen, produciendo distribuciones de escaños más concentradas o más dispersas y, de este modo, sistemas de "partidos con representación" más o menos fragmentados. Es posible interesarse por qué fórmula y en qué circunstancias se aproxima más a la proporcionalidad, pero esta pregunta nos lleva, en general, a comparar sistemas electorales, no fórmulas. Todo sistema electoral con una magnitud lo bastante grande es proporcional, cualquiera que sea la fórmula dentro de la clase infinita de fórmulas proporcionales; y todo sistema electoral con una magnitud lo bastante pequeña es mayoritario, cualquiera que sea la fórmula dentro de la clase infinita de fórmulas electorales (sean o no proporcionales).

Puede decirse que los sistemas electorales proporcionales (aquellos que emplean un método de representación proporcional) se ordenan en una escala de mayor o menor proporcionalidad, o de mayor representatividad a mayor gobernabilidad, por emplear términos al uso. Sin embargo, el orden no está representado por el número M de escaños a distribuir, aunque es el caso de que la mínima magnitud ocupa uno de los extremos mientras que el otro lo ocupa una magnitud "lo bastante grande".

Las fórmulas electorales se ordenan en un continuo entre la igualdad y la mayoría. Este orden se representa, sin discontinuidades, por la pendiente de las funciones de umbrales. Algunas fórmulas son proporcionales y otras no; algunas tienden, por último, a aproximarse a la proporcionalidad de modo más frecuente o certero, pero no es posible ordenar fórmulas electorales por su proximidad a la proporcionalidad perfecta, pues unas se aproximan desde el polo negativo del continuo (la igualdad) y otras desde el positivo (la mayoría).

Las fórmulas electorales son infinitas, pero los resultados posibles, a menudo, sólo son unos pocos. En mi opinión, la falta de un adecuado análisis del funcionamiento de las fórmulas en el contexto de un sistema electoral elemental lleva a preguntas confusas en la investigación. De hecho, el estudio de los efectos de los sistemas electorales es, una vez que lo despojamos de las irregularidades propias de los sistemas electorales complejos (los que conocemos en la realidad), extremadamente sencillo. Al menos, así resulta cuando se conocen las funciones de umbrales de las fórmulas. Si se trata de predecir cómo será la distribución de los escaños y en qué medida se parecerá a la distribución de los votos, veremos que existen respuestas precisas para ambas preguntas.

El capítulo termina en el momento en el que habría que presentar cómo son y cuáles son las fórmulas electorales a las que constantemente me refiero. Las fórmulas electorales, divididas por su "tecnología" en dos familias (cuotas y divisores) son objeto de análisis pormenorizado en los capítulos 3 y 4.

2.1. Sistema electoral elemental y fórmula electoral: caracterización

El problema de la representación consiste en distribuir un bien escaso y sólo parcialmente divisible, o indivisible (un bien granulado), la representación, entre los conjuntos de votantes o partidos. Un sistema electoral, o sistema de representación, *elemental* tiene dos componentes: un número de escaños o magnitud de distrito (M) y una fórmula electoral (F). En estas páginas la atención se limita a sistemas elementales: quedan excluidas muchas de las grandes cuestiones empíricamente importantes para los estudios electorales, tales como la agregación de las circunscripciones, cuando son múltiples, o el empleo de mecanismos añadidos a la fórmula, como los umbrales legales. A su vez, las fórmulas de las que voy a ocuparme son fórmulas de asignación a partir de votos categóricos para candidaturas cerradas. Las fórmulas electorales son funciones de representación que cumplen cinco condiciones que se exponen a continuación. El principio de mayoría es un ejemplo clave de fórmula de representación. Es un resultado muy conocido que la mayoría simple es el único principio de decisión que satisface cuatro condiciones muy similares a las condiciones que se imponen en este apartado para las fórmulas electorales (May 1952): es anónimo, neutral, decisivo y responde positivamente a las variaciones en la distribución de las preferencias. Las fórmulas electorales se reducen al principio mayoritario cuando la magnitud es uno: mayoría simple si las opciones son múltiples y mayoría absoluta si las opciones son dos.

Una *fórmula electoral*, o función de representación, es una función de los votos (V) que produce una distribución de M entre cualquier número p de partidos o candidaturas; es decir, para cada electorado V distribuido en un vector $\mathbf{V}$ de votos $[V_1\ V_2\ V_3 ... V_p]$ tal que $V_i \geq 0$ y $\sum V_i = V$, produce un *conjunto* $F(\mathbf{V},M)$[1] de vectores de números *enteros* $[E_1\ E_2\ E_3 ... E_p]$ tales que $E_i \geq 0$ y $\sum E_i = M$.

Suponemos que los votos de los individuos contienen simplemente la revelación de un *tipo*. El voto no revela un orden de preferencias sobre las alternativas. Esto excluye de nuestra consideración las formas de voto no categórica (votos ordinales, listas abiertas y demás); sin embargo facilita el emparejamiento de los sistemas electorales con los sistemas de prorrateo de escaños o con otros sistemas de representación. El tipo de cada individuo puede estar determinado por la emisión de un voto, por el lugar de residencia, la Iglesia a la que pertenece o su lengua materna. En lo sucesivo hablaremos siempre de votos y partidos, pero teniendo en cuenta que se trata de un caso especial de tipos.

Una función de representación, o una fórmula electoral, produce una asignación *correcta* de acuerdo con el criterio propio de dicha función, dada la distribución de los tipos en el electorado y dado el número de escaños o divisibilidad del bien M. No se trata de encontrar una preferencia colectiva. Sin embargo, sí puede hablarse, como en el caso de las preferencias, de indiferencia entre dos asignaciones. Una fórmula electoral puede determinar que dos o más asignaciones son igualmente correctas.

Las fórmulas electorales pueden caracterizarse como los métodos de reparto que cumplen las cinco condiciones que se exponen a continuación.

(I) *Anonimidad.* Si dos grupos igualmente numerosos de individuos intercambian sus tipos, el resultado de la función es el mismo.

(II) *Neutralidad.* Si dos partidos intercambian sus etiquetas (sus índices), en el resultado de la función, las asignaciones de escaños de los dos partidos intercambian sus índices. Si $F(\mathbf{V},M)$ asigna E_i escaños a un partido i con votos V_i y E_j escaños a un partido j con

[1]Estrictamente hablando, las fórmulas electorales son correspondencias.

votos V_j, y si el vector **V'** sólo se diferencia de **V** en que $V'_i=V_j$ y $V'_j=V_i$, entonces, en $F(\mathbf{V'},M)$, $E'_i=E_j$ y $E'_j=E_i$.

La primera de estas condiciones se refiere al modo en el que los votos son contados. Los votos deben ser contados de modo simétrico, excluyendo toda ponderación para ningún individuo. Estrictamente hablando, una función de representación podría no ser anónima, aunque sería difícilmente aceptable como fórmula electoral. La segunda de estas condiciones asegura la neutralidad entre las opciones: ningún partido obtiene requisitos especiales para acceder a cualquier número de representantes.

(III) *Decisividad*. Para cualquier electorado o población finita **V** y para cualquier número finito de escaños $M\geq 1$, la fórmula electoral produce siempre un conjunto finito no vacío de asignaciones $F(\mathbf{V},M)=\{\mathbf{E};\ \mathbf{E'};...\}$ entre las cuales la fórmula es indiferente: todas son igualmente correctas. En cada una de estas asignaciones la distribución de los escaños es completa: $\sum E_i=M$.

Una fórmula electoral no es una función de un único valor, pues para cada fórmula existen empates que el propio criterio de la fórmula no puede ni debe resolver. Por ejemplo, si la fórmula emplea el criterio de mayoría simple (todo para el partido más votado), la magnitud es $M=1$ y encontramos tres partidos con idénticos votos, $[V_1\ V_2\ V_3]$ tales que $V_i=V_j$, o $v_i=1/3$, cualquiera de los tres vectores del conjunto $\{\mathbf{E},\ \mathbf{E'},\ \mathbf{E''}\}$ es un valor de la función: [1 0 0], [0 1 0], [0 0 1]. Una asignación o solución es una función de un único valor, $f(\mathbf{V}, M)=\mathbf{E}$, que resuelve todos los empates de modo simétrico o anónimo, por ejemplo, escogiendo entre los valores de $F(\mathrm{v},M)$ mediante un sorteo, un sistema de turnos, etc.

(IV) *Monotonía positiva*. Dada una fórmula F, un electorado **V** y una magnitud M, para dos partidos cualesquiera i y j, si $v_i>v_j$, entonces, para toda asignación **E** que pertenece al conjunto de valores $F(\mathbf{V},M)$, es cierto que $E_i\geq E_j$; y si $v_i=v_j$, entonces, en alguna asignación **E**, $E_i\geq E_j$, y en alguna asignación **E'**, $E'_i\leq E'_j$, siendo así que **E** y **E'** pertenecen al conjunto de asignaciones $F(\mathbf{V},M)$.

Lo que esperamos de una fórmula de reparto es que dé más por más, o que, al menos, no dé menos por más. Esto es, la *fórmula* *electoral* que asigna escaños a los votos debe responder positivamente a la distribución de los votos. La expectativa de escaños no puede decrecer con los votos. Si el primer partido tiene más votos que el segundo partido, no es posible que tenga menos escaños, cualquiera que sea la solución; si el primer partido tiene tantos votos como el segundo partido, es posible que tenga más escaños y es posible que tenga menos. Ambas soluciones son posibilidades de la fórmula, la fórmula es neutral entre las soluciones.

Debe notarse que la condición de monotonía no implica monotonía en sentido dinámico, o lo que Balinski y Young (1982; 106ss) denominan monotonía con respecto a la población (aunque lo contrario sí es cierto). En términos generales, esta condición exige que si en dos elecciones sucesivas el partido *i* gana votos y el partido *j* los pierde, entonces no debe suceder que el partido *i* pierda escaños y el partido *j* los gane. Esta condición implica, a su vez, la monotonía con respecto a la magnitud electoral: ningún partido debe perder escaños cuando la magnitud electoral aumenta, lo que constituye la célebre "paradoja de Alabama". (Balinski y Young 1982; 117). La monotonía con respecto a la población es una condición sobre cómo debe ser la respuesta de la fórmula cuando cambian los términos del problema (las poblaciones se contraen o expanden, la magnitud aumenta o disminuye), no una condición sobre cómo debe resolverse cada problema. Balinski y Young (1982; 108) demuestran que sólo un tipo de fórmulas electorales, las fórmulas de divisores, son monótonas con respecto a los tamaños de las poblaciones. Sin embargo, en mi definición de fórmula electoral han de caber también las fórmulas de cuota y restos mayores. Ambos tipos de fórmulas son discutidas con gran detalle en los capítulos que siguen.

(V) *Homogeneidad*. Si los subconjuntos o partidos del electorado cambian en una misma proporción, no hay ningún cambio en la asignación de los escaños. Si λ es un número racional positivo, entonces $F(\mathbf{V},M)=F(\lambda\mathbf{V},M)$.

Los vectores de votos los podemos transformar como vectores **v** de proporciones equivalentes $[v_1\ v_2\ v_3\ ...\ v_p]$ tales que $v_i=V_i/V$ y $\sum v_i=1$. De este modo, queda subrayado el hecho de que el problema de la representación es independiente del tamaño global del electorado V. El problema de la representación consiste en asignar enteros a proporciones. Si dos vectores **V** y **V'** pueden transformarse en un mismo vector **v**, entonces presentan un mismo problema de representación. Puesto que una fórmula electoral debe ser homogénea, si **V** y **V'** pueden transformarse en un mismo vector **v**, entonces la fórmula produce la misma solución en ambos casos: $F(\mathbf{V},M)=F(\mathbf{V}',M)$.

La homogeneidad excluye fórmulas tales como la siguiente: distribúyanse los escaños asignando uno a cada partido con un millón o más de votos (u otra cantidad prefijada), comenzando por el mayor, a continuación uno a cada partido con dos millones o más, y así sucesivamente, hasta que se agotan. Dicha fórmula quedaría excluida por no ser decisiva, sin embargo, puesto que más abajo se relaja la condición de decisividad, es importante que quede excluida por no ser homogénea.

Las condiciones I a IV son semejantes a los conocidos axiomas de May (1952). La condición IV también es un reflejo de la condición de asociación positiva de Arrow (1963; 25). Los dos primeros axiomas de May (neutralidad y anonimidad) suelen resumirse en la condición de igualdad política estricta; los otros dos (decisividad y responsividad positiva) como la condición de mínima eficiencia (Rae y Schickler 1997). May demuestra que sus axiomas son condición necesaria y suficiente para la regla de mayoría. Esta es la única regla de agregación de preferencias estrictamente igualitaria y mínimamente eficiente. Las condiciones aquí presentadas adaptan estos axiomas al problema de la representación de tipos e incluyen una quinta condición, la homogeneidad, tomada de Balinski y Young (1982; 97). Debe notarse que no se incluye ninguna condición de proporcionalidad, aunque esto es lo que constituye la preocupación central de Balinski y Young, y de casi todos los trabajos sobre fórmulas electorales.

La afinidad entre los axiomas de May y esta caracterización de las fórmulas electorales no es accidental. De las condiciones anteriores se sigue con facilidad la siguiente proposición: cuando $p=2$ y $M=1$, todas las fórmulas electorales son idénticas a la mayoría absoluta; cuando $M=1$ y $p>2$ todas las fórmulas electorales son idénticas a la mayoría relativa o simple (pluralidad).

2.2. Restricciones de dominio: fórmulas simples, compuestas y complementarias

La mayoría de las fórmulas habituales para el reparto de escaños, pero no todas, pueden definirse para cualquier número de escaños y de partidos mayor que cero, así como para cualquier posible distribución de los votos entre los partidos. Es decir, pueden resolver cualquier problema de asignación: son decisivas. La fórmula de mayoría es un ejemplo básico de fórmula decisiva, pero existen infinitas fórmulas decisivas. Con todo, la ingeniería electoral ha dado con numerosas fórmulas de reparto que no lo son. Por ejemplo, la fórmula de voto único no transferible (VUNT) sólo está definida para los casos en los que los candidatos sean al menos tantos como los escaños ($p \geq M$), pues se trata de la fórmula que asigna un escaño y sólo un escaño a cada uno de los M partidos más votados. Otras fórmulas tienen restricciones más severas y enojosas, pues ni siquiera están definidas para un dominio de vectores con un determinado número de componentes, sino que requieren que la distribución del voto entre los componentes adopte determinados perfiles.

En un proceso electoral, el número de partidos resulta conocido con independencia del número de votos que obtienen los contendientes. Por esta razón, es útil delimitar el dominio en el que una fórmula resulta aplicable atendiendo al número de partidos que se presentan al electorado, que podemos tratar como conocido.

La restricción que llamaré del primer tipo se concreta en el siguiente requisito: es condición necesaria y suficiente que el número de componentes del vector de votos (el número de partidos) sea mayor o menor que una determinada magnitud, concretamente la magnitud electoral M. El sistema VUNT no es el único ejemplo de este tipo de restricción. El anverso de este ejemplo lo presentan fórmulas como la de Adams, Hill-Huntington o Dean, que se explican más abajo, la cuales sólo se encuentran definidas para el subconjunto de resultados posibles en los que $p \leq M$.

Una fórmula tiene una restricción del segundo tipo si es necesario, pero no suficiente, que el número de componentes supere cierta magnitud. Esta restricción es característica de algunas fórmulas de cuota y restos mayores. La magnitud de referencia es aquí el valor absoluto de lo que más abajo se define como el modificador de la cuota. Algunas fórmulas conocidas, como la Imperiali de restos mayores, que también se explica e ilustra más abajo, tienen una restricción de este tipo. Esta restricción es más severa que la anterior, pues aun existiendo el necesario número de partidos, algunos problemas de asignación no son resolubles por la fórmula, dada la distribución del voto entre los componentes del vector y el número de escaños a distribuir. Típicamente, estas fórmulas requieren que los votos no estén demasiado concentrados en pocos partidos, sino más bien dispersos o fragmentados entre numerosos partidos.

Por último, algunas fórmulas tienen una restricción de dominio tal que es suficiente, pero no necesario, que el número de partidos alcance una determinada magnitud, la magnitud M del distrito. Este tercer tipo de restricción se presenta sólo en algunas fórmulas de cuota y restos mayores no exploradas por la ingeniería electoral y, por ello, de cierto interés teórico pero nulo interés empírico.

Las fórmulas con una restricción del primer tipo son decisivas dentro de un dominio limitado, caracterizado por una relación entre p y M, y sólo en ese dominio. Las fórmulas del segundo tipo no son decisivas en ningún dominio, caracterizado por una relación entre p y M. Conocido el número de partidos, las fórmulas pueden "ponerse a prueba", y así se hace, a veces, en la práctica electoral.

En algunos casos resultarán útiles y en otros no podrán emplearse, dependiendo de la distribución del voto.

Una fórmula electoral debe ser decisiva. Las fórmulas con una restricción del segundo (y tercer) tipo son *falsas fórmulas* electorales. Las fórmulas con una restricción del segundo tipo sólo pueden existir, en la práctica de los sistemas electorales, como parte de fórmulas electorales *compuestas*. Una fórmula compuesta es una fórmula que se presenta como una falsa fórmula, de dominio restringido del segundo tipo (o del tercer tipo, aunque no existan en la realidad empírica), pero que tiene una *fórmula de reserva* decisiva o irrestricta que se emplea toda vez que la fórmula restringida resulte inoperante. Las fórmulas decisivas son fórmulas *simples*.

Las fórmulas con una restricción del primer tipo se emplean comúnmente como si fueran fórmulas simples, dada la información con la que, en general, se cuenta acerca del número de contendientes. Más que de fórmulas falsas, podemos hablar de *fórmulas limitadas*. El método VUNT, que requiere que $p \geq M$, puede emplearse sin muchos miramientos en la competición electoral, pues es improbable que falten candidatos a ocupar los escaños. Fórmulas como la de Adams, que requiere que $p \leq M$, se emplean para el prorrateo de escaños entre las circunscripciones de un sistema electoral, pero no podrían emplearse como fórmulas en la competición electoral, salvo que exista algún expediente para limitar el número de candidatos. Ambas fórmulas pueden emplearse como *complementarias*.

2.3. Partidos cero

Salvo indicación expresa de lo contrario, no supongo que todos los partidos tengan que recibir votos. Cuenta como componente de un vector cualquier partido que se presenta a las elecciones. Si algunos partidos tienen cero votos, entonces, en algunas circunstancias y con algunas reglas, algunos partidos con cero votos pueden obtener escaños. Si se desea eliminar esta consecuencia algo extravagante, puede suponerse que ninguna fórmula electoral asigna escaños a partidos sin votos. En ese caso, las restricciones de dominio anteriores deben leerse como referidas al número de componentes *mayores que cero*. Dado que la probabilidad de que un partido sin votos obtenga escaños es prácticamente nula, esta salvedad resulta irrelevante en la práctica.

Se diría que es más sencillo suponer que todos los partidos tienen votos, pues todos los candidatos reciben su propio voto. Sin embargo, esto no siempre se ve confirmado por los hechos, pues, al menos en España, hay candidatos que ni siquiera se molestan en votarse a sí mismos. Pero lo esencial es que prescindir de los partidos sin votos nos impediría definir de modo sencillo un concepto central, el umbral de exclusión (ver más abajo) y todos los conceptos derivados de éste. La necesidad de introducir esta idea nos impide una simplificación que, por lo demás, sería en extremo útil.

2.4. Umbrales de representación

Algunos de los empates en los que la función arroja múltiples valores proporcionan una información muy provechosa sobre la fórmula electoral. Un empate como el figurado más arriba entre tres partidos iguales que compiten en un sistema elemental mayoritario y uninominal es un empate máximamente competitivo por la inclusión: todos los partidos compiten en igualdad por un único escaño. El empate puede resolverse por la mínima perturbación que consiste en añadir un voto: el partido que obtuviera un voto añadido obtendría el escaño y los demás quedarían excluidos. La fracción $v=1/p$, el tamaño medio de los partidos, es el *umbral de inclusión* de la fórmula mayoritaria simple: alcanzar dicho umbral es condición necesaria, pero no suficiente, para obtener un escaño, pues, para cualquier vector de votos, ningún partido con una fracción menor podría obtenerlo en ninguna distribución que es un resultado posible de la fórmula..

Lo contrario de este tipo de empate son los empates competitivos por la exclusión, es decir, empates tales que pueden resolverse por la mínima perturbación que consiste en sustraer un voto, de manera que el partido que pierde el voto queda excluido. Por ejemplo, sea la fórmula que asigna un escaño y sólo un escaño a cada uno de los M partidos más votados (el sistema de voto único no transferible). Si $M+1$ partidos se reparten todos los votos entre ellos y obtienen todos igual número de votos, equivalentes a la fracción $v=1/(M+1)$, entonces, cualquiera de los $M+1$ vectores de asignación en la que uno de los $M+1$ partidos queda excluido es un resultado de la fórmula. La fracción $v=1/(M+1)$ es el *umbral de exclusión* de la fórmula de voto único no transferible (y de muchas otras): indica los votos máximos con los que un partido puede obtener tantos escaños como un partido que tiene cero votos. Más sencillamente, la fracción señala el umbral que es condición suficiente, pero no necesaria, superar para que, cualquiera que sea la distribución de los votos, un partido obtenga un escaño, pues, superada dicha fracción, no es posible que haya M partidos con más votos. Para la fórmula mayoritaria, el umbral de exclusión es, evidentemente, $v=½$.

La existencia de estos umbrales se deriva directamente de la condición de monotonía positiva. Si una fórmula es indiferente entre dos asignaciones **E** y **E'** tales que sólo se distinguen porque $E_i=E_i'+1$ y $E_j=E_j'-1$, un voto en favor del partido i debe resolver la indiferencia seleccionando **E** y un voto en favor del partido j debe resolver la indiferencia seleccionando **E'**.

La noción de umbral de inclusión parte del supuesto en el que un partido logra un escaño en las mejores condiciones posibles, es decir, empleando la mínima fracción del voto. La noción de umbral de exclusión parte del supuesto en el que un partido logra un escaño en las peores circunstancias posibles, es decir, empleando la máxima fracción del voto. Nótese que el concepto de umbral de exclusión no puede definirse sin suponer que, si $p > M+1$, entonces algunos partidos no tienen votos.

Debe notarse que basta que un partido alcance exactamente su umbral de inclusión para que la probabilidad de que obtenga un escaño no sea cero. Es cero siempre que no llegue a la fracción umbral. Para que la probabilidad de que un partido obtenga un escaño sea uno, el partido debe *superar* el umbral de exclusión.

El umbral de exclusión puede leerse de un segundo modo, que invita, a su vez, a renombrar el de inclusión. El umbral de inclusión representa los *votos mínimos* con los que un partido puede lograr un escaño con probabilidad mayor que cero. El umbral de exclusión representa los *votos máximos* con los que un partido puede *no lograr* un escaño con probabilidad mayor que cero. Si no se alcanzan los votos mínimos, la probabilidad de representación es cero. Si se *superan* los votos máximos, la probabilidad de no lograrlo es cero, esto es, se obtiene con seguridad.

2.5. Funciones de umbrales y funciones de pagos de las fórmulas constantes

Los umbrales de inclusión y exclusión pueden generalizarse para determinar los votos necesarios y suficientes con los que se obtienen E de M escaños con cada fórmula electoral F. Las *funciones de umbral* de una fórmula electoral *constante* determinan los votos necesarios y suficientes para cada escaño como función del número de partidos, cualquiera que sea la distribución del voto entre los mismos, y de la magnitud electoral. La definición precisa de fórmulas constantes queda para el capítulo 4. Todas las fórmulas de cuota y restos mayores lo son, así como casi todas las fórmulas de divisores conocidas. Son fórmulas constantes, dicho simplemente, aquellas en las que el coste en número de votos, para cada escaño añadido al primero, es constante, con independencia de cuántos sean los votos que "cuesta" el primer escaño. Las funciones de umbrales de las fórmulas no constantes sólo pueden determinarse en una expresión analítica cuando el número de partidos se reduce a dos. Veremos el ejemplo de las dos fórmulas no constantes más conocidas en el capítulo 5: las fórmulas de Hill-Huntington y de Dean.

La función de votos necesarios $v_{NEC}(E,F,M,p)$ es una función que determina la fracción de votos necesarios, pero no suficientes, para lograr E escaños, tales que $1 \leq E \leq M$, en cualquier problema de distribución de M escaños entre p partidos, resuelto mediante la fórmula F. Un partido con votos $v_i < v_{NEC}(E)$, dada la fórmula, la magnitud y el número de competidores, no puede obtener E escaños en ninguna asignación **E** que pertenece al conjunto de todos los conjuntos de soluciones de la fórmula electoral $F(M, p)$. Es decir, el resultado es imposible en cualquier asignación, a partir de *cualquier* vector de votos que tenga p componentes, comoquiera que se distribuya el voto entre los componentes. La función de votos suficientes $v_{SUF}(E,F,M,p)$ es una función que determina la fracción de votos suficientes para lograr E escaños, tales que $1 \leq E \leq M$, en cualquier problema de distribución de M escaños, mediante la fórmula F, entre p partidos. Un partido con votos $v_i > v_{SUF}(E)$, dados los demás argumentos de la función, obtiene al menos E escaños en toda asignación **E** que pertenece al conjunto $F(M,p)$ de los conjuntos de soluciones de la fórmula electoral para todos los vectores de votos posibles con p componentes.

Los votos suficientes para E escaños equivalen a los votos máximos para $E-1$ escaños. Así, la función de votos suficientes puede transformarse de manera sencilla en una función de votos máximos $v_{MAX}(E)=v_{SUF}(E+1)$. Esta es la opción de Lijphart y Gibberd (1977), quienes también denominan función de votos mínimos a la función de votos necesarios $v_{MIN}(E)=v_{NEC}(E)$. En algunas circunstancias, resulta más útil expresar las funciones en términos de votos necesarios y suficientes, en otras, es más intuitivo hacerlo en términos de votos mínimos y máximos. La información es siempre la misma.

Es sabido que Lijphart y Gibberd (1977) designan como *funciones de pagos* de las fórmulas electorales a lo que aquí llamo funciones de umbral. En contra de toda prudencia, esta vez encuentro inevitable sugerir un nombre distinto, pues las funciones de pagos no pueden ser sino las que indiquen el número de escaños que un partido puede esperar con sus votos, y no las funciones que indican cuántos votos se exigen para cada número de escaños. Evidentemente, se trata de las dos caras de la misma moneda, pues las funciones de pagos se pueden obtener como la inversa de las funciones de umbrales, cuando dicha función existe, pero llevaría a confusión llamarlas por un mismo nombre. Las funciones de pagos indican los escaños mínimos y máximos que un partido puede obtener con sus votos, dada la fórmula electoral, la magnitud del distrito y el número de competidores: $E_{\mathrm{MIN}}(v,F,M,p)$ y $E_{\mathrm{MAX}}(v,F,M,p)$. Las funciones de pagos nos permiten determinar la horquilla de escaños que un partido puede obtener, entre las peores y las mejores circunstancias teóricamente posibles.

La gran ventaja de las funciones de umbrales sobre las funciones de pagos es que las segundas no pueden determinarse para las fórmulas de cuota y restos mayores. Es decir, la inversa de las funciones de umbrales de las fórmulas de cuota no existe; más precisamente, no existe la inversa de la función de votos máximos.

2.6. Fórmulas proporcionales y mayoritarias

La definición de fórmula electoral *no* requiere que las fórmulas sean proporcionales. Mi primer ejemplo de fórmula electoral ha sido la fórmula mayoritaria simple. La definición sólo requiere que si el vector $[v_1\ v_2\ v_3\quad v_p]$ es un vector ordenado tal que $v_i > v_j$, entonces, para cualquier solución $\mathbf{E}$ que pertenece a $F(\mathbf{v},M)$, el vector $[E_1\ E_2\ E_3\quad E_p]$ es un vector ordenado tal que $E_i \geq E_j$. La asignación de los escaños no puede alterar el orden relativo de los partidos cuando éstos se ordenan estrictamente por sus votos. Las fórmulas electorales *simples* pueden agruparse en dos tipos o clases excluyentes y exhaustivas: la clase de las fórmulas proporcionales y la clase de las mayoritarias. Ambas clases son infinitas.

(VI) *Condición general de la proporcionalidad*. Decimos que una fórmula electoral F es una *fórmula proporcional* si, para cualquier número M de escaños y cualquier distribución $\mathbf{v}$, siempre que los votos estén distribuidos de manera que para todo partido i, $v_i=E_i/M$, como en $[E_1/M\ E_2/M\ldots\ E_p/M]$, siendo E un número entero $0\leq E\leq M$ y $\sum E_i=M$, entonces la única asignación $\mathbf{E}$ que es un valor de $F(\mathbf{v},M)$ es $[E_1\ E_2\ldots\ E_p]$. Es decir, si las fracciones de los votos v_i son todas múltiplos enteros de la *cuota proporcional* $1/M$, entonces la asignación de escaños es idéntica al número de cuotas de cada partido.

Una fórmula proporcional resuelve en enteros todo problema en el que esto es posible. Son resolubles en enteros los problemas en los que para cualquier partido, el cociente de su fracción v de los votos totales y la cuota $1/M$ da lugar a un número entero: $v_iM=E_i$. Si el vector de votos se resuelve en un vector $\mathbf{v}$ de proporciones [0,4 0,3 0,2 0,1] y la magnitud es $M=10$, entonces, si la fórmula es proporcional, la única asignación $F(\mathbf{v},M)=\mathbf{E}$ es [4 3 2 1].

La condición general de proporcionalidad no es demasiado informativa acerca de la naturaleza de las fórmulas. No nos dice, en particular, cómo se comportan frente a problemas que no son resolubles en enteros. Cuando un problema no es resoluble en enteros, entonces, para al menos un partido i, su asignación de escaños es $E_i>v_iM$; y, para al menos un partido j, su asignación es $E_j<v_jM$; pero no sabemos si son los partidos mayores o los menores los favorecidos por el, en estas circunstancias, inevitable sesgo. Entre las infinitas fórmulas proporcionales algunas muestran tendencia, como se verá, a sobrerrepresentar a los partidos más votados, mientras que otras muestran tendencia a sobrerrepresentar a los menos votados.

(VII) *Condición de las tendencia no proporcional mayoritaria*. Una fórmula electoral es del *tipo mayoritario* si, para un problema de asignación resoluble en enteros, para al menos un partido i tal que $v_i>1/p$, el partido mayor, su asignación de escaños es $E_i>v_iM$, y para al menos un partido j tal que $v_j<1/p$, el partido menor, la asignación de escaños es $E_j < v_j M$. Si la fórmula es de tipo mayoritario, aun cuando la proporcionalidad perfecta es posible, al menos un partido, el más votado, que supera el tamaño medio obtiene más escaños que los que encierra su cuota proporcional, mientras que al menos un partido, el menos votado, obtiene menos escaños que los que encierra su cuota proporcional. En el límite, con la fórmula mayoritaria simple, un único partido, el más votado, obtiene todos los escaños, mientras que *todos* los demás, del tamaño que sean, quedan no representados. Una conocida fórmula de tipo mayoritario, llamada Imperiali de divisores, distribuye diez escaños, para las proporciones [0,4 0,3 0,2 0,1] en E: [5 3 2 0]. La fórmula mayoritaria simple produce [10 0 0 0].

Si una fórmula electoral presenta un sesgo mayoritario incluso en los casos en los que la proporcionalidad perfecta es una solución, entonces siempre lo hace. Esto se sigue inmediatamente del hecho de que las fórmulas electorales son funciones monótonas crecientes. Si las proporciones del voto del ejemplo anterior se redistribuyen resultando [0,5 0,3 0,1 0,1], la fórmula Imperiali de divisores asigna los escaños en [7 3 0 0]. El criterio de mayoría es el caso límite de esta condición general de no-proporcionalidad, que cumplen todas las fórmulas electorales que favorecen *siempre*, con respecto a la proporcionalidad perfecta, al partido mayor, aunque no necesariamente en igual medida que *la* fórmula mayoritaria simple.

2.7. Fórmulas igualitarias y requisitos previos

Algunos sistemas de reparto introducen un requisito previo a la distribución de los escaños, a saber, que un determinado número de los mismos sea atribuido a las partes con independencia de su tamaño, normalmente de forma igualitaria. Esto es típico de los sistemas de prorrateo de escaños entre las circunscripciones, pero absurdo como parte de un sistema electoral, a no ser que el número de candidaturas se limitara por ley. Un ejemplo próximo es el método de prorrateo de diputados en España, que comienza distribuyendo dos escaños para cada una de las cincuenta circunscripciones provinciales. Los escaños restantes se asignan mediante fórmula proporcional, atendiendo a la población, hasta completar el tamaño del Congreso[2].

Es posible construir fórmulas electorales de sesgo igualitario, o contra-mayoritario, cuyo resultado es equivalente a distribuir una parte de los escaños en lotes iguales, procediendo al reparto de los restantes mediante fórmula proporcional. A estas fórmulas las llamaremos *d-igualitarias*. Por ejemplo, puede construirse la fórmula simple, que llamaré D-1, cuyo resultado es equivalente a la fórmula compleja compuesta por un requisito previo, que consiste en asignar un escaño a cada contendiente, más la fórmula Adams para la distribución de los restantes. Como la fórmula Adams, pese a ser proporcional, siempre asigna un escaño a cada partido (circunscripción) en liza, la fórmula D-1 siempre garantiza un mínimo de dos. Este tipo de fórmulas no son conocidas en la práctica, por lo que, cuando se quiere lograr un acusado efecto de refuerzo a las minorías, lo habitual es encontrarse con providencias legales para el reparto igualitario de algunos escaños, con independencia de la fórmula electoral.[3]

(VIII) *Condición de la tendencia no proporcional igualitaria.* Una fórmula electoral es del *tipo igualitario* si, para un problema de asignación resoluble en enteros, para al menos un partido i tal que $v_i > 1/p$, el partido mayor, su asignación de escaños es $E_i < v_iM$, y para al menos un partido j tal que $v_j < 1/p$, el partido menor, la asignación de escaños es $E_j > v_jM$. Si la fórmula es de tipo igualitario, aun cuando la proporcionalidad perfecta es posible, al menos un partido que supera el tamaño medio obtiene menos

---

[2] Como se sabe, también se reservan dos, uno a cada una, para Ceuta y Melilla, que no entran en la distribución proporcional.

[3] Tampoco son conocidas, que yo sepa, en la teoría. Balinski y Young (1982) tratan a las fórmulas de reparto y a los requisitos previos de forma independiente.

escaños que los que encierra su cuota proporcional, mientras que al menos un partido menor obtiene más escaños que los que encierra su cuota proporcional. Una hipotética fórmula de tipo igualitario, D-1, distribuye diez escaños, para las proporciones [0,4 0,3 0,2 0,1] en E: [3 3 2 2].

Las fórmulas igualitarias están *limitadas* a un dominio $pm \leq M$, donde m es el número mínimo de escaños que obtiene cada partido con cada fórmula. La fórmula más igualitaria entre las proporcionales es la fórmula Adams, para la que $m=1$. Ninguna fórmula en la que $m>1$ puede ser una fórmula proporcional. Las fórmulas limitadas sólo son fórmulas electorales en conjunción con una fórmula complementaria.

Un caso especial de fórmula igualitaria es la fórmula electoral que distribuye un escaño y sólo un escaño a cada uno de los M contendientes mayores, esto es, la fórmula de voto único no transferible. Tampoco es una fórmula simple, sino, como ya se ha indicado, limitada a $p \geq M$. En cierto modo, podría decirse que es una fórmula proporcional, al menos si se excluye la posibilidad de que partidos cero obtengan escaños, ya que el único tipo de problema resoluble en enteros para el que la fórmula está definida es aquél en el que los votos de todos los partidos son iguales y los partidos son tan numerosos como los escaños, $v_i = v_p = 1/M$. Cuando la igualdad y la proporcionalidad perfectas son criterios coincidentes, este es un resultado de la fórmula y, en cualquier otro problema en el dominio de la fórmula, la proporcionalidad es imposible, pues es imposible la proporcionalidad si el número de escaños es menor que el número de partidos (con votos).

Puesto que sólo coincide con la proporcionalidad cuando ésta es idéntica con la igualdad, lo más adecuado es designar el método VUNT como caso especial de fórmula igualitaria. Se trata, de hecho, de un miembro de una familia de fórmulas que llamaremos *q-igualitarias*, aunque es el único representante conocido de la familia: son aquellas fórmulas de cuota y restos mayores cuyo tamaño de cuota es excesivamente grande para permitir la proporcionalidad.

La existencia, siquiera en la teoría, de fórmulas igualitarias no cualifica la aseveración de que las fórmulas electorales simples se dividen en proporcionales y mayoritarias. Las fórmulas igualitarias son fórmulas limitadas, no siempre decisivas. Las fórmulas d-igualitarias se encuentran limitadas a situaciones en los que los escaños son abundantes con respecto al número de partidos; las fórmulas q-igualitarias se encuentran limitadas a situaciones en las que los escaños son escasos con respecto al número de partidos.

Para cualificarse como fórmulas electorales en sentido propio, las fórmulas igualitarias deben ser complementadas por una fórmula decisiva en el domino para el que no está definida. El sistema VUNT es el complemento natural para las fórmulas de domino restringido $p \leq M$, lo que incluye también a algunas fórmulas proporcionales.

2.8. Anti-fórmulas electorales (fórmulas minoritarias)

El máximo sesgo contra-mayoritario de una fórmula electoral igualitaria lo representa, lógicamente, la igualdad en el reparto. La igualdad perfecta sólo es posible cuando el número de escaños es múltiplo del número de candidatos. La máxima igualdad alcanzable, en cualquier otro caso, es una distribución casi igualitaria en la que los partidos mayores obtienen la inevitable ventaja, con respecto a la igualdad, que se produce cuando la igualdad perfecta no es posible. El ejemplo en el que diez escaños se distribuyen, para el vector **v**:[0,4 0,3 0,2 0,1], en **E**: [3 3 2 2], representa el reparto máximamente igualitario del que es capaz una fórmula electoral, en un problema de asignación de diez escaños entre cuatro partidos. Si el número de escaños a distribuir fuese sólo tres, el reparto máximamente igualitario sería **E**: [1 1 1 0], que es el resultado del voto único no transferible. Una fórmula electoral no puede producir un resultados como [2 2 3 3] o [0 1 1 1], pues, en estos resultados, el número de escaños decrece con los votos que un partido obtiene. Una fórmula que produjese resultados de este tipo sería una anti-fórmula. Las anti-fórmulas cumplen las mismas condiciones que las fórmulas electorales, salvo la monotonía positiva. En su lugar, cumplen la siguiente condición de monotonía negativa.

(IX) *Monotonía negativa*. Dada una fórmula F, un resultado electoral **v** y una magnitud electoral M, para dos partidos cualesquiera i y j, si $v_i > v_j$, entonces, para toda asignación **E** que pertenece al conjunto de valores $F(\mathbf{v},M)$, es cierto que $E_i \leq E_j$; y si $v_i = v_j$ entonces, en alguna asignación **E**, $E_i \geq E_j$, y en alguna asignación **E'**, $E_i \leq E_j$, siendo así que **E** y **E'** pertenecen al conjunto de soluciones $F(\mathbf{v},M)$

Una anti-fórmula de reparto, al contrario que una fórmula electoral, del tipo que sea, nunca da más por más y casi siempre da más por menos. Esto es, una *anti-fórmula electoral* que asigna escaños a los votos es una función monótona decreciente de los votos. Si el primer partido tiene más votos que el segundo partido, no es posible que tenga más escaños, cualquiera que sea la solución; si el primer partido tiene tantos votos como el segundo partido, es posible que tenga más escaños y es posible que tenga menos.

El caso límite de anti-fórmula, o máximo sesgo contra-mayoritario que es concebible, es la fórmula "minoritaria simple" que asigna todos los escaños al partido con menos votos.

Nótese que las fórmulas de sesgo minoritario no son fórmulas arbitrarias, sino fórmulas que emplean criterios de reparto que son lo contrario de los empleados en la práctica política electoral. Las antifórmulas electorales cumplen las mismas condiciones que las fórmulas electorales, pero sustituyendo la condición de monotonía positiva por la monotonía negativa. Son fórmulas ciertamente absurdas, propias de un mundo al revés. El propósito de introducirlas aquí es simplemente ilustrativo. Hago notar que estas fórmulas son posibles para subrayar que existe una asimetría evidente en los extremos a los que puede llevar el sesgo en una distribución de escaños mediante fórmula electoral. Mientras que el sesgo máximamente mayoritario que es posible con una fórmula electoral es "todo para el mayor", el sesgo máximamente contra-mayoritario que es posible con una fórmula electoral no es "todo para el menor", sino "café para todos".

2.9. Los tipos de fórmulas y el orden de las fórmulas. La relación "ser al menos tan mayoritaria como"

Las fórmulas de reparto se dividen, así, en cuatro tipos, uno de los cuales puede ser despreciado por comprender fórmulas que no son fórmulas electorales. Las fórmulas electorales pueden ser igualitarias, proporcionales o mayoritarias. Con la excepción de la fórmula de voto único no transferible (cuya localización entre las igualitarias puede ser, no obstante, discutible), todas las fórmulas electorales conocidas son fórmulas proporcionales o mayoritarias. De hecho, la gran mayoría son proporcionales. Algunos métodos de prorrateo de escaños que emplean requisitos previos a la aplicación de una fórmula electoral pueden reconstruirse como fórmulas igualitarias, aunque no es ésta precisamente la práctica común en la literatura. En todo caso, todas las fórmulas electorales simples, es decir, aquellas que siempre son decisivas, se encuentran en los grupos proporcional y mayoritario. El cuadro 1.1 resume esta clasificación.

Después de clasificar las fórmulas en grandes grupos, es natural preguntarse si no es posible ordenarlas en un continuo, atendiendo al grado en el que las fórmulas resultan sesgadas hacia la mayoría, o sesgadas en sentido contrario. Efectivamente, un orden así es posible, aunque con algunas salvedades. La banda sombreada del cuadro 1.1 presenta de modo esquemático algunos hitos en ese continuo. La fórmula que debe aparecer en el extremo derecho (llámese polo positivo) es, indudablemente, la fórmula mayoritaria; la fórmula extrema en el polo negativo es la (absurda) fórmula minoritaria. Dentro de los límites de la proporcionalidad debemos encontrar, más bien hacia la derecha, a las fórmulas que, cuando el sesgo es inevitable, tienden a favorecer a los partidos mayores

Cuadro 1.1. Tipología de las fórmulas de reparto.			
Fórmulas decrecientes	Fórmulas electorales (crecientes)		
Fórmulas minoritarias o anti-fórmulas. (Ej: "minoritaria simple")	Fórmulas igualitarias (Ej: D-1, VUNT)	Fórmulas proporcionales (Ej: Adams, D'Hondt, etc)	Fórmulas mayoritarias (Ej: Imperiali de divisores; mayoritaria simple)
←Máximo sesgo contra-mayoritario (-)	←Igualdad	←Límites de la proporcionalidad→	Máximo sesgo→ mayoritario (+)

(como, por ejemplo, la fórmula D'Hondt); a su izquierda deben situarse las fórmulas proporcionales con una tendencia contraria (como la fórmula Adams). Más a la izquierda, fuera de la región proporcional, se disponen las fórmulas crecientemente igualitarias.

Definamos la relación "ser al menos tan mayoritaria como", que denotaremos como "$\geq$". Una fórmula F' es al menos tan mayoritaria como una fórmula F ($F' \geq F$) si, para cualquier magnitud M, para cualquier distribución **v** de votos y para cualesquiera partidos i y j en **v**, la siguiente implicación es cierta: si $v_i > v_j$, entonces, en cualquier **E** y cualquier **E'** que pertenecen a los conjuntos de soluciones $F(M,\mathbf{v})$ y $F'(M,\mathbf{v})$, es cierto que $E_i' \geq E_i$ ó $E_j' \leq E_j$ (disyuntiva no exclusiva).

Las asignaciones de escaños pueden expresarse en también en proporciones $e_i = E_i/M$ para facilitar la extensión de esta relación de las fórmulas a los sistemas electorales. De este modo, $F' \geq F$ si, si $v_i > v_j$, entonces $e_i' \geq e_i$ o $e_j' \leq e_j$.

De modo alternativo y equivalente la relación puede definirse así: si, para cualquier **E** y cualquier **E'** que pertenecen a los conjuntos de soluciones $F(M,\mathbf{v})$ y $F'(M,\mathbf{v})$, es cierto que $E_i' \geq E_i$ y

$E_j' \leq E_j$, entonces $v_i > v_j$; y si, en al menos una asignación **E** que pertenece al conjunto de soluciones $F(M,\mathbf{v})$ y en al menos una asignación **E'** que pertenece al conjunto de soluciones $F'(M,\mathbf{v})$, es cierto que $E_i' \geq E_i$ y $E_j' \leq E_j$, entonces (por simetría) $v_i = v_j$.

La anterior definición dice que, cualquiera que sea la distribución de los votos, no es posible que un partido que gane escaños sea menor que un partido que pierda escaños cuando, manteniendo todo lo demás constante, la asignación se hace por una fórmula más mayoritaria. Un corolario de esta definición es que el partido mayor sólo puede ganar escaños si la fórmula es más mayoritaria. De hecho, este corolario también puede servir, alternativamente como definición simplificada.

La definición alternativa es la siguiente: una fórmula F es al menos tan mayoritaria como una fórmula F' ($F \geq F'$) si, para cualquier magnitud M, para cualquier distribución **v** de votos y para un partido i tal que, para cualquier partido j en **v**, $v_i > v_j$, para cualquier **E** y cualquier **E'** que pertenecen a los conjuntos de soluciones $F(M,\mathbf{v})$ y $F'(M,\mathbf{v})$, es cierto que $e_i \geq e'_i$.

Las fórmulas se dividen en dos familias fundamentales, las *fórmulas de cuota* y las *fórmulas de divisores*. Las peculiaridades de estas fórmulas se explican en los capítulos 3 y 4. La relación "ser al menos tan mayoritario" induce un orden para todas las fórmulas constantes de divisores y un orden para todas las fórmulas de cuota y restos mayores. Este orden puede *representarse* mediante las funciones de umbrales de las fórmulas electorales. Los métodos son más mayoritarios cuanto menor es la pendiente de su función de umbrales. La definición de fórmula constante se introduce en el capítulo 4 (son aquellas en las que la pendiente de la función de umbrales es constante), pero puede advertirse ya que cubre prácticamente todas las fórmulas electorales conocidas.

Así, el estudio de las funciones de las fórmulas electorales nos permite ordenar las fórmulas como procedimientos que, *ceteris paribus*, presentan un mayor o menor sesgo en favor de la mayoría. Sin embargo, nos obliga a crear dos tablas periódicas, dos continuos separados, uno para cada familia de fórmulas. La relación "ser al menos tan mayoritario" no induce un orden para el conjunto formado por las dos familias de fórmulas. Para poder ordenar todos los sistemas electorales necesitamos una relación más restrictiva en la que la distribución de votos quede fijada, pues todas las fórmulas electorales pueden compararse y ordenarse para cada distribución del voto, aunque el orden no se conserve de una a otra distribución, excepto por familias de fórmulas.

Definamos la relación "ser al menos tan mayoritario cuando **v**=**v'** ($\geq_{v'}$)". Una fórmula *F'* es al menos tan mayoritaria como una fórmula *F* cuando **v**=**v'** ($F' \geq_{v'} F$) si, para cualquier magnitud *M*, para cualesquiera partidos *i* y *j* en **v'**, la siguiente implicación es cierta: si $v_i > v_j$, entonces, en cualquier **E** y cualquier **E'** que pertenecen a los conjuntos de soluciones $F(M,$**v'**$)$ y $F'(M,$**v'**$)$, es cierto que $E_i' \geq E_i$ ó $E_j' \leq E_j$ (disyuntiva no exclusiva).

La anterior definición dice que, dada una distribución de los votos **v'**, no es posible que un partido que gane escaños sea menor que un partido que pierda escaños cuando, manteniendo todo lo demás constante, la asignación se hace por una fórmula más mayoritaria dada la distribución **v'** ($\geq_{v'}$). De nuevo, es un corolario de esta definición que el partido mayor en **v'** sólo puede ganar escaños si la fórmula es más mayoritaria. De hecho, este corolario puede servir, alternativamente como definición simplificada.

La relación "ser al menos tan mayoritario cuando **v**=**v'**" induce un orden para todas las fórmulas electorales. y, por consiguiente, para todos los sistemas electorales. Esto quiere decir que, conocida la distribución de los votos, los procedimientos electorales por los que se pueden distribuir los escaños son todos comparables.

Dos fórmulas pueden no estar ordenadas por la relación "ser al menos tan mayoritario como", por ejemplo, una fórmula de cuota (Q+0) y una fórmula de divisores (D+0,5). Esto quiere decir que, con algunas distribuciones de votos, Q+0 es más mayoritaria mientras que, con otras distribuciones, D+0,5 es más mayoritaria. Esto quiere decir, a su vez, que las fórmulas están ordenadas por la relación "ser al menos tan mayoritaria cuando **v**=**v'**". Simplemente, el orden es distinto para cada distribución **v**.

Obviamente, la relación "ser al menos tan mayoritaria" es la más exigente.

2.10. Principios de clasificación pautados y procedimentales

Lo habitual es preocuparse de las fórmulas en la medida en la que unas parezcan más justas que otras, midiéndose la justicia, siquiera tentativamente, como "proximidad" a la proporcionalidad perfecta. Para esta empresa, se han desarrollado diversos índices que permiten medir la distancia entre los *resultados* "típicos", o frecuentes, de una fórmula y la proporcionalidad perfecta. La proporcionalidad perfecta es un principio pautado de distribución: lo que se compara, en esta tradición, no son procedimientos con procedimientos, sino resultados con respecto a una pauta considerada perfecta. Se juzga a los procedimientos (a las fórmulas) por sus resultados, con independencia de cómo se llegue hasta ellos.

Mi enfoque difiere del habitual en dos sentidos. En primer lugar, mi criterio de clasificación de las fórmulas es puramente procedimental, no mide la distancia de los resultados con respecto a ninguna distribución ideal. Para ordenar las fórmulas, sólo necesitamos conocer en qué consiste cada una, para lo que nos será de gran ayuda la determinación de sus funciones de umbral, y a ello se dedican muchas de las páginas que siguen. En segundo lugar, mi interés consiste en tratar de ordenarlas en un continuo con dos polos y prever sus efectos reales, con cierta independencia de las consideraciones normativas. Casi todas las fórmulas electorales conocidas en la realidad son simplemente proporcionales, en conformidad con la definición de más arriba (condición VI). Las que no lo son, se encuentran, si son simples, en la región de las fórmulas mayoritarias. La proporcionalidad perfecta no es un elemento del continuo, pues no es un procedimiento electoral, sino una prescripción sobre cómo debe ser el resultado. Es cierto que la proporcionalidad perfecta implica la ausencia de sesgos, pero una fórmula proporcional puede estar sesgada hacia las mayorías y otra puede estarlo hacia las minorías, siendo ambas igualmente proporcionales. Puede que alguna fórmula del continuo tienda, más que ninguna otra, a acercarse a la proporcionalidad perfecta en sus resultados, pero el orden de las fórmulas no tiene en ella uno de sus cabos, sino, más bien, un punto intermedio. Las fórmulas mayoritarias, esto es lo único evidente, siempre están sesgadas en favor de las mayorías y, de entre todas las fórmulas, la fórmula mayoritaria simple es la que presenta el mayor sesgo. Todos los procedimientos de reparto pueden ordenarse por su proximidad o lejanía a la fórmula mayoritaria.

2.11. La proporcionalidad como propiedad de los sistemas electorales: la magnitud perfecta. El orden de los sistemas electorales

A menudo se juzga que los sistemas electorales forman un continuo entre aquellos que favorecen la representatividad y aquellos que favorecen la gobernabilidad en un sistema político. La proporcionalidad perfecta y la mayoría *sí* son los extremos de esta escala. Esta escala sirve para ordenar *sistemas electorales proporcionales*, pero no fórmulas electorales.

De la definición de fórmula proporcional se sigue que toda fórmula electoral proporcional produce un resultado proporcional cuando el problema de reparto puede resolverse en enteros. Para cualquier vector de votos **V** existe al menos una magnitud de distrito M^* tal que los escaños se pueden distribuir de modo proporcional en un vector **E**: $E_i = v_i M$. Llamamos a ese número de escaños *magnitud perfecta*. El valor máximo de la magnitud perfecta es $M^* = V$, es decir, tantos escaños como votantes en el electorado; sin embargo, el valor más interesante de la magnitud perfecta no es el máximo, sino el mínimo. Para cada vector de votos **V** existe una mínima magnitud perfecta tal que el problema de reparto puede resolverse en enteros. La mínima magnitud perfecta depende, naturalmente, de la distribución del voto. Para

V:[50, 50] la magnitud perfecta mínima es dos, para V:[50, 25, 25] es cuatro, pero para V:[56, 23, 21] la menor es $M^*=100$. La mínima magnitud perfecta es, típicamente, mucho mayor que el número de escaños disponibles en cualquier sistema electoral, a menudo en el orden de los cientos de miles[4].

De otro lado, de las condiciones que definen una fórmula electoral, sea o no proporcional, se sigue que cualquier sistema electoral en el que la magnitud es $M=1$ produce idéntico resultado. Si el partido mayor no obtiene el único escaño, entonces la fórmula de reparto no es una fórmula electoral. Este resultado lo identificamos como resultado mayoritario aunque, adviértase bien, puede lograrse con una fórmula proporcional.

Un sistema electoral SE está formado por un par $[M,F]$. En principio, es posible dividir a los sistemas electorales en proporcionales, mayoritarios o igualitarios dependiendo del tipo de fórmula que empleen, pues la proporcionalidad de un procedimiento de asignación se ha definido en función de la magnitud o número de escaños. Esto conduce, no obstante, a un resultado contrario a la intuición, pues cualquier sistema $[1,F]$ donde la fórmula sea proporcional habría que clasificarlo como tal (el sistema que es proporcional cuando los votos del primer partido son todos los votos). Sin embargo, la coincidencia de todas las fórmulas electorales en un resultado mayoritario hacen que la convención, y el sentido común, denomine "sistemas mayoritarios" a los sistemas uninominales.

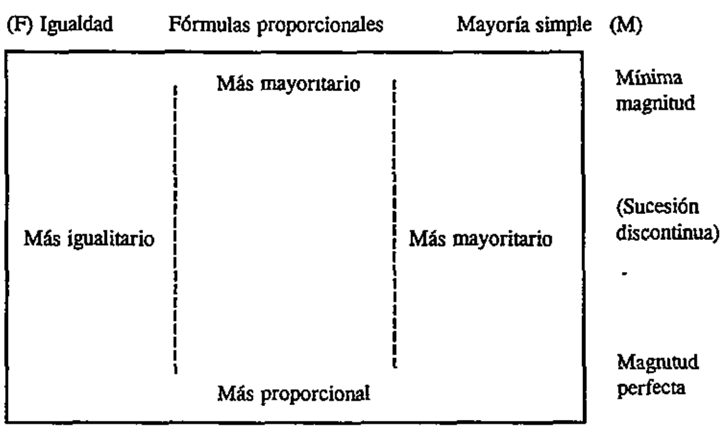
Podemos decir que un sistema electoral SE$=[M,F]$ es al menos tan mayoritario como un sistema SE'$=[M',F']$ si $M=M'$ y $F \succeq F'$. Dada una magnitud electoral, el sistema es más mayoritario cuanto más mayoritaria es la fórmula; si la magnitud es uno, todos los sistemas electorales son iguales y tan mayoritarios como sí mismos. El hecho de que la magnitud perfecta sea, en general, grande, y

[4] Piénsese en el problema de encontrar la mínima magnitud perfecta para un electorado de varios millones en el que algunas candidaturas tienen media docena de votos.

que la magnitud mínima haga que todos los sistemas sean como un sistema mayoritario, podría llevar a pensar que, dada una fórmula proporcional, el sistema es más mayoritario cuanto menor es la magnitud, y más proporcional cuanto mayor es la misma. Sin embargo, esto no es cierto. La proporcionalidad del sistema no varía monótonamente con el número de escaños que se reparten, sino de modo muy discontinuo, aunque sí es cierto que cuando la magnitud es mínima cualquier sistema electoral proporcional es idéntico a uno mayoritario y que la magnitud perfecta es de esperar que sea grande. Para muchas fórmulas y para muchos vectores de votos podemos encontrar que los sistemas "tienden" a ser menos mayoritarios cuando la magnitud aumenta. Pero una tendencia no es un orden.

La relación "ser al menos tan mayoritario cuando v=v'" induce un orden en todos los sistemas electorales [*M*, *F*], pero ese orden no puede representarse por la magnitud electoral. Ni siquiera la relación "ser al menos tan mayoritario cuando v=v' y *F*=*F*'", es decir, para cada una de las fórmulas, podría representarse por el número de escaños. Los sistemas electorales pueden ser ordenados para cada vector de votos, pero el orden no es una combinación lineal del orden de las fórmulas y la magnitud electoral.

Pares [*M*, *F*]



2.12. Propiedades de los resultados: concentración y desviación de la proporcionalidad

La insistencia en la comparación de procedimientos de la manera más general posible no implica rechazar el interés del análisis de resultados. Los capítulos 7 y 80 se dedican a la discusión de medidas y a su aplicación a resultados electorales. Los aspectos de los resultados electorales que nos interesan en un sistema elemental, dada la distribución del voto, son, desde un punto de vista positivo, la concentración o dispersión de los escaños entre los partidos y, desde un punto de vista también normativo, su proximidad a la proporcionalidad perfecta. Entender adecuadamente los procedimientos de elección nos ayuda a saber qué es lo que debemos buscar en los resultados.

En los párrafos anteriores hemos apuntado que para un vector de proporciones **v**:[0,4 0,3 0,2 0,1] y M=10 existe un número limitado de resultados posibles que parten de una fórmula electoral. Veamos, a modo de ejemplo, el menú completo. Cualquier fórmula igualitaria, como D−1, produce $\mathbf{E}^1$:[3 3 2 2]; para cualquier fórmula proporcional el resultado es $\mathbf{E}^2$:[4 3 2 1], que coincide con la proporcionalidad perfecta; para algunas fórmulas mayoritarias, como la Imperiali de divisores, el resultado es $\mathbf{E}^3$:[5 3 2 0], para otras aún más mayoritarias que no son sino "de laboratorio", pues no existen "en la naturaleza", encontramos $\mathbf{E}^4$:[6 3 1 0], $\mathbf{E}^5$:[7 3 0 0], $\mathbf{E}^6$:[8 2 0 0], $\mathbf{E}^7$:[9 1 0 0] y $\mathbf{E}^8$:[10 0 0 0]. El nombre por el que designo algunas fórmulas que producen este resultado es, respectivamente, D+4, D+7, D+14, D+26 y D+28. D+28 da lugar, en este caso, al mismo resultado que la fórmula mayoritaria simple[5]. Esta lista de ocho vectores de escaños es exhaustiva; *no*

---

[5] Mi nombre "técnico" para Imperiali de divisores es D+2 y, para la fórmula mayoritara, D+∞. Las fórmulas proporcionales en esta serie son las que se encuentran entre D+0 (Adams) y D+1 (D'Hondt). Como se explica con mucho detalle en los capítulos sucesivos, el numeral se corresponde con la constante del criterio de divisores de cada fórmula.

existe ninguna fórmula electoral que pueda producir un resultado distinto a partir de v:[0,4 0,3 0,2 0,1], aunque algunas fórmulas electorales pueden producir más de uno como resultado (por ejemplo, para D+6, tanto $\mathbf{E}^4$ como $\mathbf{E}^5$ son resultados de la fórmula).

El resultado $\mathbf{E}^1$ es el más igualitario y el resultado $\mathbf{E}^8$ el más mayoritario. Lo que varía cuando comparamos un vector con el vector contiguo más mayoritario es que un escaño pasa del partido menor con representación al partido mayor. Para comparar resultados, necesitamos un índice que refleje estos cambios, de manera que a cada vector le atribuyamos un número real y podamos ordenarlos como $\mathbf{E}^1 > \mathbf{E}^2 > \mathbf{E}^3$... Estos índices existen, son los índices de fragmentación (o de concentración, para un orden $\mathbf{E}^1 < \mathbf{E}^2 < \mathbf{E}^3$..).

El resultado $\mathbf{E}^2$ es obviamente proporcional, los demás resultados se desvían en mayor o menor medida de la proporcionalidad. El resultado $\mathbf{E}^1$ se desvía "en un escaño", pues habría que redistribuir un escaño para recuperar la proporcionalidad perfecta, pero igual sucede con el resultado $\mathbf{E}^3$. Los resultados restantes se desvían en dos, tres, cuatro, cinco y hasta seis escaños. En un sentido, es obvio que distribuciones más mayoritarias son menos proporcionales, pero en otro sentido no lo es. ¿Es más próximo a la proporcionalidad el resultado $\mathbf{E}^1$ o el resultado $\mathbf{E}^3$? Distintas medidas pueden dar lugar a respuestas distintas. En el capítulo 7 se discuten varias alternativas y se propone adoptar un índice que dice que ambos resultados son iguales por lo que toca a la proporcionalidad. Éste es el famoso índice conocido como índice de desviación de Loosemore-Hanby. Mi opción por este índice pretende subrayar el hecho de que la cuestión de la proporcionalidad no puede ser tratada con independencia del conocimiento de la dirección del sesgo, que es precisamente lo que nos facilita el estudio de las funciones de umbral de las fórmulas.

2.13. Recapitulación

Un sistema electoral elemental se compone de una fórmula electoral y un número de escaños a distribuir. Las fórmulas electorales son funciones de representación monótonas crecientes, decisivas, homogéneas, anónimas y neutrales. También es posible concebir fórmulas para distribuir escaños, o cualquier otro bien, que sean monótonas decrecientes, las anti-fórmulas o fórmulas minoritarias. Las fórmulas electorales se dividen en igualitarias, proporcionales y mayoritarias. Las fórmulas d-igualitarias, la subespecie más importante de las igualitarias, permiten construir en un solo procedimiento la provisión separada, en los sistemas de porrrateo de escaños, de un número de escaños a distribuir igualitariamente como requisito previo, dejando los demás al arbitrio de una fórmula proporcional. Por lo demás, las fórmulas igualitarias, con la excepción de la fórmula de voto único no transferible, que en cierto modo es un género propio (un caso límite de la especie q-igualitaria), no existen, como tales, en la práctica. La mayoría de las fórmulas conocidas en la práctica electoral son proporcionales, pues evitan el sesgo cuando el sesgo puede evitarse; algunas pocas son mayoritarias, pues siempre sesgan el resultado hacia el partido mayor. Aunque parece ser que en el mundo sólo se emplean, de modo habitual, apenas una docena de fórmulas[6], existen infinitas fórmulas electorales igualitarias, proporcionales y mayoritarias.

Para todas las fórmulas electorales constantes (que son la inmensa mayoría) es posible determinar los votos necesarios y suficientes para lograr un determinado número de escaños, en función de la magnitud del distrito y del número de partidos. Estas son las funciones de umbral. Los umbrales de representación (inclusión y exclusión) son los primeros valores de las funciones de umbral. Las funciones de umbral nos permiten comparar de modo estrictamente procedimental a las fórmulas electorales y

---

[6] Ver Lijphart (1994).

clasificarlas como más o menos mayoritarias (o, si se prefiere, como más o menos igualitarias, esto es, sesgadas hacia la minoría). La posibilidad de crear una tabla periódica de las fórmulas, o, al menos, para las grandes familias de fórmulas, debe servir como orientación del trabajo empírico que se ocupa de medir resultados, bien atendiendo a la fragmentación de los representantes, bien atendiendo al grado en el que la representación del electorado es proporcional.

Las fórmulas electorales se dividen también por la técnica de reparto: hay dos técnicas básicas, las cuotas y los divisores. Aunque aparentemente bien conocidas cada una de ellas, creo que vale la pena dedicar unas páginas a su exposición detallada. Se trata de una necesaria preparación del terreno antes de pasar a la abstracción de las funciones de umbral.

CAPÍTULO TRES

LOS MÉTODOS DE CUOTA Y RESTOS MAYORES

Como es bien sabido, las fórmulas de reparto de escaños se dividen en dos tipos básicos, los métodos de cuota y los métodos de divisores. Los primeros parten de la determinación de una cuota fija de votos, a partir de la magnitud del distrito, cuya obtención califica a los partidos para la asignación de cada escaño. Si el número de cuotas cubiertas por los partidos es inferior al número de escaños, los escaños no atribuidos por cuota se distribuyen, en general, de acuerdo con los restos mayores, esto es, con los votos restantes una vez sustraídas tantas cuotas como escaños se hayan otorgado a cada partido. Los métodos de divisores no fijan ninguna cuota de antemano sino que buscan un número cualquiera, un divisor (en singular), tal que, divididos los votos de los partidos por dicho número, los escaños queden asignados de una sola vez según cierta regla de simplificación o ajuste de los cocientes resultantes. Como se explica en el capítulo siguiente, los métodos de divisores suelen caracterizarse a partir de los algoritmos que normalmente se emplean para el reparto de escaños, consistentes en dividir los votos de los partidos por una serie de números (los divisores, en plural) que reúna ciertas propiedades. La conexión entre las fórmulas y los algoritmos no suele hacerse explícita en la literatura convencional sobre estudios electorales.

Las fórmulas de cuota se caracterizan por una cuota fija que deja abierto, dentro de unos límites, qué fracciones menores que la cuota pueden recibir escaños. Las fórmulas de divisores se caracterizan por una regla fija sobre qué fracciones menores que el divisor pueden recibir escaños, dejando abierto, dentro de unos límites, el tamaño del divisor.

En este capítulo se aclara e ilustra el funcionamiento de las fórmulas de cuota, con vistas a su ulterior comparación sistemática con las de divisores. Tras introducir el mecanismo de distribución por cuota, se presenta la diversidad de las fórmulas de cuota y se precisa el tipo de función (o correspondencia) de representación que define a estos métodos. Se trata de una función compuesta de dos funciones básicas, la asignación por cuota y la asignación por restos mayores. No obstante, en el capítulo 6 se vuelve a introducir una versión simplificada de esta función que facilita su comparación con las funciones de representación basadas en divisores. La determinación de esta función y de la desigualdad (una ecuación de mínimos y máximos) que caracteriza a los métodos es la contribución esencial de este capítulo. La ecuación de mínimos y máximos nos servirá para demostrar, en el capítulo 6, que las fórmulas de cuota están ordenadas por la relación "ser al menos tan mayoritario como". Este orden queda, por el momento, simplemente apuntado e ilustrado por medio de ejemplos.

El capítulo hace especial hincapié en las limitaciones de dominio de estos métodos y en el problema de las falsas cuotas. Las falsas cuotas dan lugar a fórmulas de cuota compuestas, que, como se verá en el capítulo 4, son una forma de hacer difícil algo semejante a lo que los divisores hacen fácil. En el capítulo se demuestra que sólo un cierto intervalo dentro de los posibles tamaños de cuota es decisivo (no tiene restricciones de dominio) y que dicho intervalo es, además, el mismo intervalo de cuotas que pueden emplearse en funciones de representación proporcionales. Por implicación, en el capítulo se demuestra que todos los métodos de cuota y restos mayores, simples o compuestos, son métodos de representación proporcional. No obstante, existe un tipo especial de métodos de cuota, los q-igualitarios, de los que el sistema VUNT es un ejemplo, que no son proporcionales, pero se trata de métodos limitados (ni simples ni compuestos).

3.1. La fórmula de cuota simple y restos mayores

La cuota simple, también conocida como cuota de Hare, o, más raramente, de Hamilton, es la cantidad de votos que deberían reunirse por escaño en un reparto proporcional perfecto. Si hay M escaños y el total de los votos es V, la cuota simple es $Q_0=V/M$; o bien, expresada como fracción, $q_0=1/M$. El problema del reparto proporcional, naturalmente, consiste en que, puesto que M está fijado de antemano, es improbable que los partidos o contendientes sumen sus votos de manera que cada uno de los p partidos, tenga exactamente un número *entero* E_i de cuotas, tal que $E_i=V_i/Q_0$ (o $E_i=v_i/q_0$) y $\sum E_i=M$. De ser así, a cada partido le corresponderían E_i escaños y la proporcionalidad sería perfecta. El problema es que el número de cuotas que suma los votos de cada partido no es, por lo general, un número entero, sino que el cociente V_i/Q_0 resulta ser un número fraccionado, de manera que $V_i/Q_0=S_i+r_i$, donde S es un número entero tal que $0\leq S\leq M$ y r es una fracción tal que $0<r<1$. El número S_i es la "cuota inferior" del partido i y mientras que r_i es su "resto" expresado como fracción de la cuota. Un método de cuota debe incluir una regla sobre qué se debe hacer con las fracciones o restos, es decir, qué partidos obtienen escaños equivalentes a su cuota inferior S y qué partidos obtienen escaños equivalentes a su cuota superior $S+1$.

La primera solución que parece natural intentar consiste simplemente en redondear los cocientes. A cada partido le correspondería el número entero E de escaños más próximo al número no entero de cuotas que suman sus votos. La fórmula de cuota podría escribirse como

$$F(\mathbf{V},M)=\{\ \mathbf{E}:\ E_i=\lfloor V_i/Q_0\rceil \text{ y } \textstyle\sum E_i=M \text{ para } Q_0=(\sum V_i)/M\ \}$$

donde $\lfloor z \rceil$ es el número entero más próximo al número real z. Esta definición puede escribirse como una desigualdad, de manera que a un partido con una cantidad V_t de los votos totales le corresponderían E escaños si y sólo si

$$E_t - 1 + 1/2 \leq V_t / Q_0 \leq E_t + 1/2.$$

En otras palabras, con este sistema sería condición necesaria y suficiente, para obtener E escaños, obtener un voto más de $E-1$ cuotas y media, mientras que los votos máximos para seguir recibiendo sólo E escaños estarían justo por debajo de E cuotas y media. Si el resto es una fracción menor de media cuota, el partido obtiene su cuota inferior ($E_t = S_t$); si el resto es mayor, el partido obtiene su cuota superior ($E_t = S_t + 1$). Media cuota, o $1/(2M)$, sería a la vez el umbral de inclusión y de exclusión de este método de reparto. Media cuota es el punto donde el método no puede tomar una decisión sobre si el partido debe ser incluido o excluido del reparto de escaños; ambas decisiones son igualmente correctas para la fórmula.

Este sistema es una buena aproximación a la proporcionalidad, pero sólo es una solución cuando el número de partidos se reduce a dos. De lo contrario, como muestra un sencillo ejemplo en el cuadro 3.1, los partidos pueden sumar más de M escaños una vez que los cocientes V_t / Q_0 se redondean de este modo. La fórmula de cuota simple y redondeo simple de los cocientes está restringida al dominio de la competición bipartidista. El método de asignación de los restos mayores es una regla para tratar las fracciones que elimina este problema.

La regla de restos mayores consiste en ir premiando a las fracciones por orden de tamaño, con independencia de la proporción que guarden con respecto a las cuotas enteras. A un partido le corresponden tantos escaños como cuotas enteras hay en sus votos (la cuota inferior S_t), más un escaño y sólo uno si su resto se encuentra entre los R mayores, donde R es la magnitud electoral menos el número de cuotas enteras cubiertas por los partidos

(R=M−S y $S=\sum S_i$). Si la distribución se produce por cuota simple, pero no en otro caso, el número de escaños a atribuir por restos es igual a la suma de las fracciones excedentes del número de cuotas enteras cubiertas por cada partido ($R=\sum r_i$). Convencionalmente, llamamos restos no a las fracciones r, sino al número escalar de votos que a cada partido "le sobran" una vez que se han sustraído de sus votos tantas cuotas Q como cuotas enteras suman (Resto=$V_i-S_iQ=r_i\,Q$)

Cuadro 3.1 Redondeo simple y asignación por restos mayores

	Magnitud=10 Q_0=100							
	Votos	*V/Q*	*Cuotas redondeadas*	*Cuotas enteras (S)*	*Fracciones (r)*	*Restos*	*R=3*	*Asignación por cuota y restos mayores*
A	790	7,9	8	7	0,9	90	1	8
B	54	0,54	1	0	0,54	54	1	1
C	53	0,53	1	0	0,53	53	1	1
D	52	0,52	1	0	0,52	52	0	0
E	51	0,51	1	0	0,51	51	0	0
Suma	1000	10	12>10	7	3			10

La regla de cuota y restos mayores es la *suma de dos funciones*. Cada partido recibe, en primer lugar, el menor número de escaños enteros más próximo al cociente de sus votos por la cuota. Es decir, la primera función redondea los cocientes siempre hacia abajo. En segundo lugar, se determina un vector ordenado de restos. La segunda función asigna un escaño a cada resto que es mayor o igual que el resto crítico, con el ordinal R en el vector, y cero escaños a cualquier resto menor. El vector de resultado es la suma de los dos vectores. La forma de esta función se especifica en el apartado siguiente.

3.2. Las variedades de los métodos de cuota

Un método de distribución por cuota tiene dos reglas: debe determinar la cuota por la que se dividen los votos y debe indicar cómo se tratan las fracciones o restos. El método conocido como método de Hare emplea la cuota proporcional o simple y asigna los escaños no cubiertos por las cuota mediante la regla de los restos mayores. También es conocido como el método de Hamilton para el prorrateo de escaños entre circunscripciones. Pueden idearse otras reglas distintas a la de restos mayores sin necesidad de que aparezcan los problemas del redondeo simple, por ejemplo, ponderar el tamaño del resto por los escaños ya recibidos. Sin embargo, en la práctica, la regla de restos mayores es, con gran diferencia, la más común, por lo que será la única que a la que se preste atención en estas páginas. Emplearé, así, los términos "método de cuota" y "método de restos mayores" de forma indistinta.

En todo caso, cualquier regla para el reparto de restos en los métodos de cuota se basa de un modo u otro en una forma de ordenarlos, no en un tamaño mínimo o máximo requerido para obtener un escaño. Esta es una diferencia fundamental frente a una regla cerrada, como la regla de redondeo en $r=½$, que trata a los restos como fracciones que deben superar un umbral preestablecido en función del tamaño de la cuota. El resto mínimo y máximo que puede recibir un escaño, añadido a la cuota inferior, no puede determinarse de antemano, como fracción r de la cuota, si los partidos son más de dos. Sin embargo, veremos que es posible obtener el tamaño del resto mínimo que suma un escaño a la cuota inferior S, la fracción r_{MIN}, en cada situación en la que, además de la cuota, conozcamos el número de partidos, es decir, como función de Q y de p. Así mismo, es posible obtener el resto máximo que puede no lograr su cuota superior $S+1$, la fracción r_{MAX}, como función de Q, p y E (el número de escaños que obtiene el partido si no alcanza $S+1$).

En el mundo de los sistemas electorales realmente existentes, las variaciones sobre la cuota consisten en diversas cuotas disminuidas con respecto a la cuota simple: se suma un número n a la magnitud en el denominador que determina la cuantía o fracción de votos que cuenta como una cuota. Podemos llamar a este número el *modificador de la cuota*. Es posible, al menos en teoría, que n sea negativo siempre y cuando $n > -M$. En cuanto a los valores positivos, el modificador puede ser arbitrariamente grande[1]. De este modo, las posibles cuotas quedan todas recogidas en la fórmula $Q_n = V/(M+n)$ (Taagepera y Shugart 1989; 30), donde V es el total de votos de las candidaturas y n un número real $n > -M$. En general, resulta más cómodo expresar la cuota como fracción, de manera que $q_n = 1/(M+n)$. Si los métodos son homogéneos, ambas expresiones son equivalentes. Al modificarse el tamaño de la cuota, cambia el número total de cocientes que los partidos suman ($\sum[V_i/Q_n] = M+n$), lo que modifica el tamaño de los restos mínimos y máximos que pueden adjudicarse uno de los R escaños no asignados por cuota ($R = n + \sum r_i$).

Empleando las más generales expresiones en fracciones, una fórmula de cuota y restos mayores basada en la cuota q_n puede escribirse como sigue:

---

[1] La variabilibdad empírica es, sin embargo, limitada. Entre los sistemas electorales de las democracias más consolidadas, la cuota simple de Hare, se emplea habitualmente en Costa Rica, y se ha empleado en Alemania (para el distrito nacional en 1989) e Israel (hasta 1969), entre otros. La fórmula de cuota Droop, aumentado el denominador en una unidad, es la base del sistema de voto transferible de Irlanda y la cuota empleada en los distritos del primer nivel en Austria (hasta 1970). Las fórmulas de cuota Imperiali e Imperiali reforzada (aumentado el denominador en dos y tres unidades, respectivamente) son comunes para los distritos de primer nivel en las elecciones italianas. Para encontrar más datos sobre los ejemplos, véase Lijphart (1994).

$$\begin{aligned}
&F_n(\mathbf{v},M)=\{\mathbf{E}\text{: } E_i=f(\mathbf{v},M)+h(g(\mathbf{v},M))\}\\
&f(\mathbf{v},M)=\mathbf{S}\text{: } S_i=\lfloor v_i/q_n\rfloor\text{ ; } q_n=1/(M+n);\ -1\leq n\leq 1;\ \textstyle\sum S_i\leq M\ .\\
&g(\mathbf{v},M)=\mathbf{r}\text{: } r_i=(v_i/q_n)-\lfloor v_i/q_n\rfloor\\
&h(g(\mathbf{v},M))=\{\mathbf{b}\text{: } b_i=1 \text{ si } r_i\geq r\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \text{ si } r_i\leq r \text{ y } \textstyle\sum b_i=M-\sum S_i \text{ para algún } r\}, \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

donde $\lfloor z\rfloor$ es el mayor entero menor que el número real z.

La función $f(\mathbf{v},M)$ determina la cuota inferior S_i que corresponde a cada partido por sus votos, expresados como frecuencia v_i, si la asignación se basa en una cuota $q_n=1/(M+n)$ con un modificador limitado dentro del intervalo decisivo $-1\leq n\leq 1$ (véase apartado 3.4 de más abajo). La función $g(\mathbf{v},M)$ determina los restos r_i que corresponden a cada partido una vez que se han sustraído las cuotas enteras o inferiores. La función $h(g(\mathbf{v},M))$ determina si el resto r_i es redondeado hacia arriba o hacia abajo, de manera que en las asignaciones del conjunto $F_n(\mathbf{v},M)$ algunos partidos tienen escaños $E_i=S_i$ y otros partidos tienen escaños $E_j=S_j+1$. La fracción r es una fracción igual o menor que el menor resto que obtiene un escaño, pero mayor que el mayor resto que no puede obtenerlo si la suma de los escaños $\sum E_i=\sum S_i+\sum b_i$ ha de ser igual a la magnitud M. La función $h(g(\mathbf{v},M)$ determina un *conjunto* de asignaciones, pues es posible que haya más de $M-\sum S_i$ partidos con restos $r_i\geq r$, de manera que dos partidos con restos iguales reciben distinto número de escaños por sus restos en cada asignación que es un resultado que pertenece al conjunto de resultados de la fórmula.

De modo mucho más sintético, podemos caracterizar un método de cuota y restos mayores escribiendo que, en toda asignación **E** del conjunto $F_n(\mathbf{v},M)$, debe ser cierto que, para cualesquiera dos partidos i y j,

$$V_i\ /Q_n-(E_i-1)\geq V_j\ /Q_n-E_j, \qquad (3.2)$$

y $\sum E_i=M=(\sum V_i\ )/Q_n-n$. O bien, de forma equivalente, $v_i/q_n-(E_i-1)\geq v_j\ /q_n-E_j$, y $\sum E_i=M=1/q_n-n$.

De la definición de método de cuota también se sigue que cada partido recibe E escaños si y solo si, para algún valor de r, el cociente de los votos de cada partido divididos por la cuota se encuentra dentro del intervalo

$$E_i - 1 + r \leq V_i / Q_n \leq E_i + r, \qquad (3.3)$$

o, de forma equivalente, $E_i - 1 + r \leq v_i / q_n \leq E_i + r$, de manera que $\sum E_i = M$.

La ecuación (3.2) es esencial para demostrar que los métodos de cuota están ordenados. La expresión (3.3) resulta especialmente útil para determinar las funciones de umbrales de los métodos, una vez que se determinan los valores mínimos y máximos de r. Ambas cosas son tarea del capítulo 6.

El cuadro 3.2 recoge algunas de las cuotas más comunes, además de una cuota aumentada, que llamo"larga", sin empleo que yo conozca, aunque tiene, como se verá, un notable interés teórico. En el cuadro se recoge también el sistema de voto único no transferible (VUNT) como un caso extremo o degenerado de sistema de cuota. Este método, que se asemeja a un sistema mayoritario, pues cada votante da su apoyo a un candidato y los M candidatos más votados resultan elegidos, puede reconstruirse como un sistema en el que la cuota se fija en el 100% de los votos. Puesto que ningún contendiente obtiene esa cantidad (de lo contrario, no habría competición) los escaños se distribuyen todos "entre los restos", que no son sino la cantidad intacta de votos que recibe cada candidato. Decir que la cuota es máxima es lo mismo que decir que la primera función $f(\mathrm{v},M)$ de la fórmula de cuota y restos mayores produce siempre el mismo resultado (S=0) y la asignación se efectúa sólo mediante la segunda función, la de los restos, lo que impone un techo de un escaño para cada partido. Como se argumenta más abajo, el que este sistema pueda caracterizarse así no es ninguna trivialidad, ya que muestra la capacidad de los métodos de cuota para producir distribuciones igualitarias, mediante el expediente de dilatar la cuota. En el límite, cuando la cuota es máxima, ninguna de las opciones ganadoras tiene más escaños que las restantes. El sistema VUNT se clasifica siempre, por sus efectos típicos, entre los sistemas mayoritarios, debidos a que un mismo partido presenta múltiples candidaturas, pero esto es independiente de la morfología del sistema. En muchos contextos no tiene demasiado sentido decir que el sistema VUNT es igualitario y no mayoritario, como no tenía sentido para Melville negar que la ballena fuese un pez.

Cuadro 3.2 Métodos de cuota

$Q_n = V/(M+n)$ $\quad V_i/Q_n - (E_i - 1) \geq V_j/Q_n - E_j$
$q_n = 1/(M+n)$ $\quad 0 \leq E \leq M, \ \sum E_i = M, \ \sum V_i = V$

(Q-[M-1])	Voto único no transferible	$q_{-M+1} = 1$	$n = -M+1$
(Q-1)	Cuota "larga"	$q_{-1} = 1/(M-1)$	$n = -1$
(Q+0)	Cuota simple o de Hare	$q_0 = 1/M$	$n = 0$
(Q+1)	Cuota Droop	$q_1 = 1/(M+1)$	$n = 1$
(Q+2+1)	Cuota Imperiali	$q_2 = 1/(M+2)$	$n = 2$
(Q+3+1)	Cuota Imperiali reforzada	$q_3 = 1/(M+3)$	$n = 3$

En el cuadro 3.2 se recoge también una sencilla propuesta de nomenclatura sistemática para las fórmulas de cuota. No hay nada malo en los nombres que se emplean de costumbre, pero a veces puede resultar cómodo referirse a la fórmula Q+0,75 sin tener que inventar una especie de apodo y aclarar que nos referimos una cuota disminuida en n=0,75, o emplear perífrasis tales como "la fórmula que emplea la cuota $1/(M+0{,}75)$". Sin embargo, en estas páginas empleo constantemente este tipo de perífrasis y respeto siempre los venerables nombres de algunas fórmulas (aunque a menudo, de puro venerables, tienen más de uno). Una ventaja de esta nomenclatura es que señala con claridad a las fórmulas compuestas e indica cuáles son sus componentes; así, la llamada fórmula Imperiali es la fórmula compuesta de las cuotas Imperiali y Droop, como se aclara en el apartado 3.4.

3.3. Tamaño de la cuota y sesgo en la distribución de escaños

Una conclusión aparentemente paradójica es que las cuotas menores tienden a favorecer a los partidos mayores y viceversa (Lijphart 1986; Gallagher 1992). Creo que sólo la confusión entre cuotas y umbrales de representación puede haber llevado a autores sólidos a deslizar la opinión contraria (Rae1971; 34). Aunque el empleo del término "paradoja" resulta impropio, me referiré a este enunciado, por brevedad, como la paradoja de las cuotas altas. En la siguiente tabla (cuadro 3.3) se ilustra el reparto de escaños por restos mayores utilizando tres cuotas distintas. En las primera fila de cada sección de la tabla se encuentran anotadas, además de la magnitud, algunos indicadores útiles para la comparación de las fórmulas: el tamaño de la cuota, los umbrales de exclusión (votos suficientes para el primer escaño) e inclusión (votos necesarios para el primer escaño) así como un índice de desviación agregada de la proporcionalidad, el índice de Loosemore-Hanby (*D*), resultante del reparto de escaños.

El ejemplo está escogido para ilustrar el enunciado del que Gallagher ofrece su propia demostración (1992; apéndice): nunca una reducción del tamaño relativo de la cuota puede dar lugar a que un partido mayor pierda un escaño en favor de uno menor. Si se producen cambios, siempre consisten en una redistribución en favor de los mayores. Trataré de aproximarme de modo algo más formal a este enunciado en los capítulos 5 y 6. Por ahora, que del descenso de la cuota no puede seguirse un beneficio para los partidos menores, podemos inferirlo, además de la simple inspección de la distribución de escaños, del hecho de que el umbral de exclusión es constante en todos los casos (está enteramente determinado por la magnitud del distrito) pero el umbral de inclusión es más bajo cuanto más alta es la cuota.

Cuadro 3.3 Asignación por tres fórmulas de cuota y restos mayores

Fórmula Hare. Magnitud=4; Q_0=250; U_{EX}=20%; U_{IN}=5%; D=25.

	Votos	*V/Q*	*Cuotas enteras (S)*	*Fracciones (r)*	*Restos*	*R=2*	*Asignación*
A	360	1,44	1	0,44	110		1
B	300	1,2	1	0,2	50		1
C	130	0,52	0	0,52	130	1º	1
D	120	0,48	0	0,48	120	2º	1
E	90	0,36	0	0,36	90		0
Suma	1000	4	2	2	500		4

Fórmula Droop. Magnitud=4; Q_1=200; U_{EX}=20%; U_{IN}=8%; D=26.

	Votos	*V/Q*	*Cuotas enteras (S)*	*Fracciones (r)*	*Restos*	*R=2*	*Asignación*
A	360	1,8	1	0,8	160	1º	2
B	300	1,5	1	0,5	100		1
C	130	0,65	0	0,65	130	2º	1
D	120	0,6	0	0,6	120		0
E	90	0,45	0	0,45	90		0
Suma	1000	5	2	3	600		4

Fórmula Imperiali RM. Magnitud=4; Q_2=167; U_{EX}=20%; U_{IN}=10%; D=34.

	Votos	*V/Q*	*Cuotas enteras (S)*	*Fracciones (r)*	*Restos*	*R=1*	*Asignación*
A	360	2,16	2	0,16	27		2
B	300	1,8	1	0,8	133	1º	2
C	130	0,78	0	0,78	130		0
D	120	0,72	0	0,72	120		0
E	90	0,74	0	0,74	90		0
Suma	1000	6	3	3	500		4

Es común comparar la cuota con un precio fijo inicial para cada escaño. Cuanto más bajo es el precio inicial, mayor es el número de escaños adquiridos a ese precio y menor el número de escaños que se reparten entre los restos mayores. Puesto que los escaños entre los restos se reparten a razón de uno por resto, hasta que se agotan (es decir, no son acumulables) el incremento de la cuota favorece, manteniendo lo demás constante, la *dispersión* de los escaños, mientras que su disminución favorece la *concentración* en manos de las listas más pudientes en número de votos. Al mismo tiempo, al reducirse el tamaño de la cuota, son mayores los restos de los partidos que obtienen escaños directamente en proporción a sus cuotas, por lo que se sitúan más ventajosamente en el orden para el reparto por restos mayores. El mecanismo salta a la vista al comparar las asignaciones de escaños de las tres fórmulas del cuadro 3.4. Debe notarse que el número de cuotas sumado por el conjunto de los partidos es $M+1$ en el caso de la cuota Droop y $M+2$ en el caso de la cuota Imperiali ($\sum[V_i/Q_0]=M+n$). Así, puede decirse que estos métodos de cuota reparten escaños, en un principio, como se haría en una distribución de cuota simple si hubiese uno y dos escaños más, respectivamente, de los que hay en realidad. En un segundo momento, se sustraen esos escaños de las listas que los habrían recibido con un resto menor.

Si la cuota es mayor que $1/M$, (por ejemplo, la cuota larga $1/[M$-$1]$) la fórmula de reparto puede inducir una distribución que "perjudique" a los partidos mayores. La cuota larga parece desviarse de la proporcionalidad en el sentido contrario al que estamos acostumbrados, pues favorece una "excesiva" dispersión de los escaños entre los partidos. El cuadro 3.4 proporciona un ejemplo en el que se compara un reparto por cuota simple y otro por cuota larga.

Cuadro 3.4 Asignación por cuota simple y por cuota larga

Cuota simple=16,7 D=14 uex=13,9 uin= 2,8						*Cuota larga=20 D=19,7 uex=13,3 uin =0*					
	Votos	*T*	*Cuotas*	*Restos*	*Asignación*		*Votos*	*T*	*Cuotas*	*Restos*	*Asignación*
A	50	3	3	0	3	A	50	2,5	2	10	2
B	12	0,72	0	12	1	B	12	0,6	0	12	1
C	12	0,72	0	12	1	C	12	0,6	0	12	1
D	12	0,72	0	12	1	D	12	0,6	0	12	1
E	11	0,66	0	11	0	E	11	0,55	0	11	1
F	3	0,18	0	3	0	F	3	0,15	0	3	0
	100	6	3	50	6		100	5	2	60	6

En el primer caso, un partido con la mitad de los votos recibe la mitad de los escaños, repartiéndose la otra mitad por restos mayores; en el segundo caso, el primer partido obtiene un escaño menos de su cuota proporcional, escaño que no consigue recuperar en el reparto por restos mayores. El mecanismo es exactamente el opuesto al anterior: se procede con la fórmula de cuota simple como si hubiese un escaño menos; finalizado el virtual reparto, el escaño añadido se concede al resto mayor que había quedado excluido. La dispersión favorece a los partidos menores pero produce una mayor desviación con respecto a la proporcionalidad. La ampliación del tamaño de la cuota da lugar a una caída del umbral de exclusión, además de a un desplome del umbral de inclusión, que pasa a ser nulo[2].

Si la distribución de escaños se efectuara, en el ejemplo anterior (cuadro 3.4) con el método VUNT, es decir, con la cuota igual al 100% de los votos, es evidente que cada uno de los partidos, desde el primero hasta el último, recibiría un escaño. Sin duda, éste es el método favorito para el partido F. La distribución no tendría nada de proporcional, pues el índice agregado de desviación sería considerable, D=33,3.

No cabe duda de que la cuota simple es la cuota "más próxima" al ideal de la proporcionalidad perfecta, pues, al menos, emplea la cuota proporcional como base del primer reparto. Puesto que las variantes conocidas son menores y puesto que las cuotas menores conllevan un sesgo en favor del partido o partidos con más votos, podría pensarse que las cuotas se ordenan en una escala de mayor a menor proporcionalidad, que implica mayor o menor sesgo hacia las mayorías. Esto es una ilusión que debe disiparse. Las cuotas se ordenan de mayor a menor, pero la cuota que, aparentemente, es la más proporcional, la cuota simple, no es la cuota mayor, ni la

[2]El umbral del 0% se verifica, en el caso extremo, cuando un partido tiene el 100% de los votos pero sólo M-1 cuotas y ningún resto, por lo que el último escaño se disputa entre restos de cero votos. Lo mismo sucede si dos partidos se reparten los votos a partes iguales, y así sucesivamente.

proporcionalidad uno de los polos sobre los que las cuotas oscilan. Cuotas mayores que la cuota simple no hacen sino continuar reduciendo la propensión a favorecer a las mayorías, sesgando el resultado, de hecho, en contra de la mayoría. El extremo del continuo es el sistema VUNT, en el que todos los escaños se reparten a partes iguales. La cuota simple ocupa una posición central y puede decirse, si se desea, que es la más proporcional, pero eso no es lo más interesante del asunto. Lo interesante es que, se sitúe la proporcionalidad donde se quiera, a mayor cuota, peor para los partidos mayores y, a menor cuota, mejor para los mismos. Este es el principal efecto *real* de las cuotas que nos interesa perseguir y comprender.

3.4. Restricciones de dominio: cuotas limitadas y falsas cuotas

A propósito del ejemplo con el que comenzaba la discusión de la cuota simple, observamos que la fórmula que concede un escaño a cualquier cociente cuya fracción r sea mayor que ½ tiene el dominio restringido a la competición bipartidista. La regla de restos mayores elimina la restricción de dominio para la fórmula de cuota simple, de manera que puede emplearse para asignar cualquier número de escaños a cualquier vector de votos. Sin embargo, otros métodos de cuota tienen importantes restricciones de dominio.

Las cuotas dentro del intervalo $-1 \leq n \leq 1$, que llamamos *decisivo*, no tienen ninguna restricción de dominio, es decir, siempre encuentran un vector o vectores de escaños que son una solución para el problema de asignación de M enteros, cualquiera que sea el vector (finito) de votos. Las fórmulas que emplean cuotas en el intervalo decisivo son fórmulas *simples*. Las cuotas tales que $n > 1$ son falsas cuotas, fórmulas para las cuales es necesario, pero no suficiente, que el número de partidos sea tal que $p > |n|$. Estas cuotas, aunque se presenten con nombre propio en la práctica de los sistemas electorales, son, en realidad, parte de fórmulas compuestas que incluyen una cuota del intervalo decisivo como fórmula de reserva. Las cuotas tales que $n < -1$ son cuotas limitadas al dominio de vectores de votos con al menos $p \geq M$ componentes; y son falsas cuotas en el dominio $M > p > |n|$. Ninguna fórmula de cuota existe, es decir, la fórmula no puede definirse, en un dominio tal que $p \leq |n|$.

Para determinar qué fórmulas son decisivas y cuáles no lo son, debemos determinar cuántos escaños se asignan por cuotas enteras o inferiores, en la primera función de la fórmula, como mínimo y como máximo. A partir de la definición en 3.1, debemos comprobar si el número de escaños obtenidos por cuota por el conjunto de los partidos puede dar lugar a uno de estos dos problemas opuestos: que sean demasiadas, de manera que la fórmula, en su primera función $f(\mathrm{V},M)$, dé derecho a los partidos a más escaños de los que se pueden repartir, pues todo partido obtiene, al menos en alguna asignación E que es resultado de una fórmula de cuota y restos mayores, su cuota inferior S_i; o, por el contrario, que sean demasiado pocas, de manera que puedan faltar partidos para recibir, en la segunda función $h(g(\mathrm{V},M)$, esto es, en el reparto de restos, los escaños no asignados por la primera función.

El número de cuotas enteras ($S=\sum S_i$) que deben sumar los partidos, como máximo, para que una fórmula pueda producir una solución es igual al número de escaños más uno: $S \leq M+1$. Cuando el número de cuotas alcanza dicho máximo, se produce un empate resoluble por la sustracción de un voto. Todo partido obtiene su cuota inferior en al menos un resultado de la fórmula. De otro lado, debe haber siempre al menos $p=R$ partidos para reclamar con sus restos el número de escaños que no se asignen por cuota. Dado que $R = M-S$, el número de cuotas enteras debe ser mayor que la diferencia entre la magnitud y el número de partidos, si el número de partidos es menor que el de escaños: $S \geq M-p$. Sólo si el número de partidos es igual o mayor al de escaños, no es un problema para la fórmula el que el número de escaños distribuidos por cuota sea cero: $S \geq 0$. Así, el número escaños que puede asignar una fórmula por cuotas enteras o inferiores (la primera función de la fórmula), para poder producir un vector **E** de solución, se encuentra en el intervalo

$$M-p \leq S \leq M+1 \text{ si } p \leq M \text{ ; } 0 \leq S \leq M+1 \text{ si } p \geq M. \qquad (3.4)$$

Estas desigualdades resumen las restricciones de dominio de los métodos de cuota. De no respetarse estos límites, faltarían escaños para repartir entre los partidos o faltarían partidos para recibir algunos de los escaños.

Puede comprobarse que, para cualquier fórmula de cuota y restos mayores, el número de cuotas enteras cubiertas por el total de los partidos se encuentra siempre en el intervalo

$$\begin{array}{ll} M+n+1-p \leq S \leq M+n & \text{si } p \leq M+n; \text{ y} \\ 0 \leq S \leq M+n & \text{si } p > M+n. \qquad (3.5) \end{array}$$

Por ejemplo, si la fórmula es la cuota simple (n=0) y M=5, y si los partidos son cinco, no es posible que al menos uno de ellos no tenga una cuota. Si cuatro de los partidos tienen fracciones de voto que son menores o iguales a 1/5, entonces el quinto partido tiene una fracción del voto que es mayor o igual a 1/5; así, el número de cuotas inferiores que resultan del redondeo "hacia abajo" de los cocientes de los partidos es uno cuando menos, $S \geq 1$. Si los partidos son cuatro, es obligado que, o bien uno de ellos tenga al menos dos cuotas, o dos tengan una cuota cada uno, y así sucesivamente. Sólo si los partidos son seis o más ($p \geq M+1$) es posible que el voto se distribuya de tal modo que para todo partido sea cierto que $v_i < 1/5$ y, por tanto, S=0. De otro lado, dado que $\sum(v_i/q_n)=M+n$, el máximo número de escaños asignados por cuota nunca es mayor que la magnitud más el modificador.

A partir de las desigualdades 3.4 y 3.5 es inmediato que para las cuotas dentro del intervalo decisivo, $-1 \leq n \leq 1$, el número de cuotas enteras que acumulan los partidos nunca imposibilita el reparto de escaños. Para las cuotas fuera de dicho intervalo, S puede ser mayor que $M+1$, si $n>1$, o menor que $M-p$, si $n<-1$, por lo que la fórmula puede no encontrar una distribución que sea una solución a un problema de reparto con p partidos.

De otro lado, también por la desigualdad 3.5, el número de partidos ha de ser, siempre y con cualquier fórmula, mayor que el valor absoluto del modificador de la cuota, $p > |n|$, pues, de lo contrario, cuando $n > 1$, el valor mínimo inferior de S es siempre mayor que el máximo tolerable $M+1$, y, cuando $n < -1$, el valor mínimo es menor que $M-p$. De aquí también se sigue que las cuotas mayor y menor del intervalo decisivo (Q-1, Q+1) están limitadas a un dominio en el que al menos hay dos partidos, pero esto no es una verdadera limitación, pues bien puede ser parte de la definición del problema de distribución de escaños que haya al menos dos contendientes.

Si la cuota es menor que $1/(M+1)$, como la cuota Imperiali ($1/[M+2]$) o, con mayor razón, la Imperiali reforzada ($1/[M+3]$), la fórmula no es decisiva como fórmula simple, pues puede encontrarse con problemas de asignación irresolubles. El número de cuotas enteras (S) alcanza el valor máximo admisible cuando, por ejemplo, en una distribución por cuota Droop, $M+1$ partidos obtienen idénticos votos y obtienen todos los votos, es decir, cuando se sitúan en el umbral de exclusión. Cada partido obtiene su cuota en al menos una distribución que es resultado de la fórmula. Este empate puede deshacerse sustrayendo un voto o, en su caso, por un sorteo o cualquier otra regla preestablecida. Con al cuota Imperiali, los partidos pueden llegar a sumar $M+2$ cuotas enteras en un empate equivalente, empate que no puede resolverse por un voto. Es más, pueden sumar $M+1$ cuotas enteras sin necesidad de estar empatados, por lo que no cabe el recurso al sorteo. En ninguna distribución de la fórmula podrían obtener los partidos el número de escaños equivalente a su cuota inferior.

Aun si el número de partidos supera la condición necesaria ($p > |n|$), las cuotas menores a la cuota Droop son necesariamente "tentativas" (tentativas, podemos decir, de fijar un precio subvencionado en favor de los partidos mayores). En la práctica, cuando la cuota Imperiali distribuye demasiados escaños, en Italia, donde tradicionalmente se ha empleado este sistema, suele estar previsto cambiar a la cuota Droop, que actúa como cuota de reserva. De este modo, la fórmula de cuota Imperiali es una *falsa fórmula*, la fórmula decisiva realmente existente es la *fórmula compuesta* Imperiali-Droop (Q+2+1). En lo sucesivo, siempre que nos referimos a la fórmula Imperiali de restos mayores (o a la Imperiali reforzada) lo hacemos a la fórmula compuesta con la cuota Droop de reserva.

En el otro extremo, la "cuota larga" (Q-1) es la mayor cuota con la que se cumple que, para cualquier número de partidos igual o mayor que dos, el número de cuotas enteras nunca puede ser menor que M-p. De este modo, siempre hay al menos tantos partidos como escaños no asignados por cuota (R=M-S) para reclamar, con sus restos, ese número de escaños ($p \geq R$). Este requisito implica que cualquier método de cuota aumentada ($n < -1$) puede emplearse para un problema en el que el número de partidos sea mayor o igual al número de escaños ($p \geq M$). Es decir, esta es la condición suficiente. Al mismo tiempo, las cuotas aumentadas sufren, en el dominio $M > p > |n|$, de la misma condición que las cuotas disminuidas: son falsas cuotas que sólo podrían emplearse como parte de una fórmula compuesta con una fórmula de reserva que sea decisiva.

En el caso de la cuota máximamente alargada, que no es sino la cuota máxima del sistema VUNT (n=-[M-1]), la condición necesaria ($p > |n|$) coincide con la suficiente ($p \geq M$), por lo que el método sólo puede definirse para problemas de reparto en los que los contendientes son al menos tantos como los escaños. El sistema VUNT es una *fórmula limitada* al dominio $p \geq M$. Las cuotas menores que la cuota del método VUNT, pero mayores que la cuota larga (-[M-1] < n < -1), pueden emplearse, tentativamente, cuando el número de partidos es el necesario ($p > |n|$) pero no el suficiente ($p \geq M$), siempre que la distribución esté lo bastante fragmentada como para permitir que los partidos capturen un número suficiente de cuotas enteras. De existir en la realidad -yo no las conozco- serían también fórmulas de cuota "tentativas"

(tentativas de fijar un precio desfavorable para los partidos mayores), como parte de fórmulas compuestas, aunque gravadas con menos limitaciones que las cuotas disminuidas $n>1$, ya que, al menos, siempre están definidas para cualquier problema en el que el vector de votos tenga M componentes o más.

El cuadro 3.5 propone un ejemplo en el que la fórmula de cuota Imperiali reforzada (Q+3+1) y su imagen especular, a saber, la fórmula de cuota alargada $n=-3$ (Q-3-1), no pueden resolver el problema de asignación de escaños que se les presenta y acuden a sus cuotas de reserva. En la segunda mitad de la tabla se altera la distribución de los votos, sin cambiar el número de partidos, de manera que las fórmulas sí encuentren una respuesta satisfactoria. Se trata de ejemplos en la región de casos en las que las cuotas pueden emplearse de modo tentativo, como parte de una fórmula compleja que comprenda una cuota de reserva dentro del intervalo decisivo. Cualquier cuota en el intervalo decisivo, produce, para el primer vector de votos del ejemplo, el resultado **E**:[4 2 1 1].

Cuadro 3.5 Asignaciones con falsas cuotas

M=8 n=-3 Cuota=20						*M=8 n=+3 Cuota=9,01*					
	V	V/Q	S	r	E		V	V/Q	S	r	E
A	50	2,75	2	0,75	3	A	50	6,05	6	0,05	6
B	25	1,25	1	0,25	2	B	25	2,75	2	0,75	2
C	15	0,75	0	0,75	1	C	15	1,65	1	0,65	1
D	10	0,5	0	0,5	1	D	10	1,11	1	0,11	1
Suma	100	5	3		7<8	Suma	100	11	10		10>8
M=8 n=-3 Cuota=20						*M=8 n=+3 Cuota=9,01*					
	V	V/Q	S	r	E		V	V/Q	S	r	E
A	45	2,25	2	0,25	3	A	45	4,95	4	0,95	4
B	25	1,25	1	0,25	2	B	25	2,75	2	0,75	2
C	25	1,25	1	0,25	2	C	25	2,75	2	0,75	2
D	5	0,25	0	0,25	1	D	5	0,25	0	0,25	0
Suma	100	5	4		8	Suma	100	11	8		8

En lo sucesivo, habrá que distinguir entre las fórmulas de cuota del intervalo decisivo, que son simples, y las fórmulas compuestas. Toda fórmula tal que $n>1$ supondremos que es una fórmula compuesta que emplea la cuota Droop ($n=1$) en todos aquellos problemas de distribución en los que ningún resultado de la primera fórmula es una solución. De igual modo, toda fórmula (excepto el método VUNT) que emplea una fórmula tal que $n<-1$ supondremos que es una fórmula compuesta, cuya cuota de reserva es la "cuota larga" $n=-1$. La fórmula VUNT es una fórmula limitada al dominio $p \geq M$, lo que no es, en general, una restricción relevante en la competición partidista. Puede subrayarse, una vez más, que las fórmulas compuestas del segundo tipo no existen en la práctica. La imaginación de los ingenieros electorales no ha concebido, que yo sepa, ninguna cuota entre la cuota simple $n=0$ y la cuota máxima $n=-(M-1)$, y esta última sólo puede describirse como fórmula de cuota forzando la intuición, aunque hacerlo sea analíticamente riguroso. Como se observa más abajo, las fórmulas compuestas son mecanismos torpes para lograr lo que, de forma más elegante y sencilla, se puede procurar con fórmulas de divisores. No está claro si es a la imaginación o a la falta de la misma, por parte de los imperiales ingenieros, que debemos agradecer la complicación que añaden este tipo de fórmulas.

3.5. Fórmulas de cuota y proporcionalidad

Todas las fórmulas de cuota y restos mayores, excepto el caso especial del sistema de voto único no transferible, son fórmulas proporcionales, en el sentido del criterio general de la proporcionalidad, esto es, producen un reparto proporcional siempre que esto es posible. El sistema de voto único no transferible es una fórmula del tipo igualitario, el resto de las fórmulas de cuota son del tipo proporcional, con independencia del sesgo que introducen cuando el reparto proporcional no es posible. Este enunciado sólo debe cualificarse, por lo que se refiere a las fórmulas compuestas de cuota aumentada mayor que la cuota larga, si permitimos simultáneamente que existan partidos cero (sin un solo voto) y que restos cero puedan obtener escaños.

Es fácil aproximarse a la idea una vez que se han delimitado los dominios de las fórmulas, pues puede comprobarse sin dificultad que todas las fórmulas decisivas son proporcionales. De otro lado, cuando la proporcionalidad es posible, las fórmulas compuestas o bien reproducen, con su primera cuota, el mismo reparto que una fórmula decisiva, o bien la cuota es inaplicable y han de acudir a una cuota de reserva decisiva y, por ello, proporcional.

Si una distribución de votos es resoluble en enteros para una magnitud perfecta M^*, entonces tiene la forma **v**: $v_i=E^*_i/M^*$, donde E^* son enteros mayores que cero tales que $\sum E^*_i=M^*$. El asterisco designa al entero como parte proporcional de una magnitud perfecta M^* para la fracción v_i. Tratamos de averiguar si, para un vector de votos y una magnitud perfecta para ese vector, alguna fórmula de cuota podría asignar a algún partido un número E de escaños distinto de E^*.

El cociente entre los votos de cada partido y una cuota cualquiera es $v_i/q_n= ([M^*+n]E^*_i)/M^*$. O bien,

$$v_i/q_n= E^*_i + (nE^*_i)/M^*. \tag{3.6}$$

Si n=0, la fórmula de cuota simple asigna directamente, sin dar lugar a ningún resto, la parte proporcional de escaños a cada partido. Siempre podemos escribir que $v_i/q_n=S_i+r_i$, sabiendo que S es el número mínimo de escaños que recibe cada partido y $S+1$ el máximo, si el resto r es positivo menor que uno. En el caso de la cuota de Hare, $S_i=E^*_i$ y r_i=0. Si n=1, el segundo sumando en (3.6) siempre es menor que la unidad, a menos que exista un único partido con votos v=1 y $E^*=M^*$. La cuota Droop no está definida para la "competición monopartidista", pero se trata de un caso manifiestamente absurdo y podemos despreciarlo. En cualquier otro caso, si el electorado es un vector resoluble en enteros, cada partido obtiene su parte proporcional de escaños y genera un resto que nunca es premiado: $S_t = E^*_t$ y $r_t < 1$. Si $n = -1$, el segundo sumando de (3.6) nunca es menor que -1, de no ser, otra vez, que sólo haya un partido. Con la cuota larga, todos los partidos reciben, por cuota, exactamente un escaño menos que su cuota proporcional y todos generan un resto positivo, por lo que la asignación es proporcional: $S_t = E^*_t - 1$ y $r_t > 0$. Así, todas las cuotas del intervalo decisivo son proporcionales. En un extremo, el cociente de los votos y la cuota da lugar a un entero igual a la cuota proporcional más un resto que nunca es premiado; en otro extremo, el cociente de los votos y la cuota da lugar a un número inferior en menos de la unidad a la cuota proporcional, por lo que todos los partidos reciben un entero menor que su cuota, pero completan siempre la cuota en la asignación por restos.

Si n es positivo, no importa su tamaño, por (3.6) comprobamos que el cociente de los votos y una cuota disminuida contiene siempre el entero que es la parte proporcional que le corresponde al partido. El segundo sumando de la expresión puede ser, para uno o más partidos, mayor que uno; de hecho, puede ser arbitrariamente grande, pero entonces la cuota no está definida: $\sum S_t > M^*$. La sencilla intuición detrás de esto es que fórmulas como Imperiali de restos mayores requieren, para poder funcionar con su primera cuota, que haya partidos con votos inferiores a la cuota proporcional y puedan excluirse de la representación para, así, sobrerrepresentar a algunos partidos.

Si n es negativo y $v_t > 0$, es decir, no hay partidos cero (tales que $v=0$ y $E^*=0$), entonces $n = -1$ es el método de mayor cuota que garantiza que todos los escaños quedan distribuidos (y, además, de modo proporcional) en un electorado con una magnitud perfecta, pues, por definición, la magnitud perfecta no puede ser mayor que el número de partidos, $p \leq M^*$. Si $n < -1$ es posible que el segundo sumando de (3.6) sea, para uno o más partidos, menor que -1, lo que implica que los partidos reciben como parte entera dos escaños menos (o tres si es menor que -2, y así sucesivamente) que su cuota: $S_t = E^*_t - 2$. Esto conduce a que los partidos no puedan recuperar la cuota proporcional en el reparto de restos, pero también a que queden escaños sin atribuir, por lo que la cuota ha de modificarse hasta llegar a una cuota decisiva.

Así, las fórmulas compuestas o bien reproducen el resultado proporcional (cuando el segundo sumando de la expresión 3.6 es, para todos los partidos, menor que la unidad y mayor que −1) o bien no están definidas.

Si hay partidos cero, entonces no es cierto que la magnitud perfecta sea siempre menor o igual al número de partidos, pues los partidos cero reciben cero escaños como cuota proporcional. Los escaños sin distribuir en una fórmula de cuota alargada mayor que la cuota larga Q-1 podrían atribuirse a esos partidos si se admiten los restos cero, por lo que estas fórmulas producirían un sesgo igualitario (dando "al que nada tiene") incluso cuando la proporcionalidad perfecta es posible. Sin embargo, esta posibilidad no tienen ninguna importancia práctica y puede eliminarse con el expediente de requerir que los restos premiados sean siempre positivos.

Por último, resulta inmediato que las cuotas limitadas no son proporcionales, pues se encuentran limitadas a un dominio ($p \geq M$) en el que la proporcionalidad es imposible salvo en caso de reparto igualitario del voto entre exactamente M partidos. Se trata de métodos de cuota que introducen un sesgo igualitario mayor que la más igualitaria de las fórmulas proporcionales, razón por la que los designararemos como q-igualitarios, para diferenciarlos de los métodos igualitarios de divisores (d-igualitarios), de propiedades distintas. Por decirlo una vez más, el único exponente conocido de estos métodos es el sistema VUNT.

3.6. Recapitulación

Las reglas de cuota y restos mayores determinan la cantidad de votos que cuesta un escaño como una fracción constante a partir del número de escaños a repartir. Dicha fracción es la cuota. El número de cuotas sumadas por los votos de un partido son su cuota inferior. Cualquier partido obtiene al menos tantos escaños como su cuota inferior en al menos una asignación **E** que pertenece al conjunto de soluciones $F_n(\mathbf{V},M)$, aunque puede haber empates en los que el partido pierda el escaño, en una asignación, "por sustracción de un voto". Los escaños no atribuidos por cuota se distribuyen entre los partidos de acuerdo con la regla de restos mayores, que concede un escaño y sólo uno a cada partido por orden de restos, de manera que algunos partidos pueden alcanzar la cuota superior, pero ninguno puede alcanzar más escaños que la cuota superior, ni menos que su cuota inferior. Veremos que ésta es una importante diferencia con respecto a algunos métodos de divisores.

En términos empíricos, las variaciones sobre las fórmulas de cuota consisten en alteraciones en el sentido de disminuir su tamaño con respecto a la cuota natural o proporcional $1/M$. Sin embargo, es posible, al menos teóricamente, concebir cualquier tipo de modificación de la cuota, en el sentido de disminuir su tamaño como en el sentido de aumentarla, aunque no puede ser mayor que el 100% de los votos. Llegados a ese límite nos encontramos con un sistema formalmente equivalente al de voto único no transferible.

Es teóricamente posible que la regla complementaria a la cuota dentro de la fórmula, a saber, la regla de restos mayores, sea sustituida por alguna variante que, por ejemplo, pondere el tamaño de los restos por el número de escaños ya asignados. Sin embargo, ninguna variante de este tipo se emplea, que yo sepa, en los sistemas electorales empíricos. Con todo, conviene subrayar que cualquier regla de atribución de los escaños que complemente a un método de cuota debe apoyarse en una forma de ordenar los restos, sin umbrales fijos. No es posible fijar simultáneamente el tamaño de la cuota y el tamaño de los restos; no es posible si los partidos son más de dos. Esto no quiere decir que no podamos descubrir los umbrales implícitos, en la forma de restos mínimos y máximos que pueden recibir un escaño más que la cuota inferior. Pero estos umbrales son una consecuencia aritmética del tamaño de la cuota y del número de contendientes, por lo que varían con dicho número.

Distintos tamaños de cuota tienen distintas consecuencias en la distribución de los escaños. Esto es obvio. La fórmula de cuota simple o de Hare tiene el atractivo normativo de emplear la cuota proporcional. De hecho, a veces se habla o escribe sobre *la* fórmula de cuota y restos mayores para referirse a este método. Sin embargo, existen al menos otros dos o tres tamaños de cuota, más pequeños, consolidados en la práctica electoral de algunos países como Italia y Austria. En una primera aproximación, ya hemos observado que, cuanto menor es la cuota, más parece que tienen que ganar los partidos más votados y más que perder los menos votados. El hecho de que la cuota Hare sea la mayor de las cuotas comunes puede producir una ilusión: a mayor cuota, más proporcional el resultado, luego mejor para los partidos menores; a menor cuota, menos proporcional el resultado y mejor para los partidos mayores. Es cierto, aunque no lo hayamos demostrado, que el tamaño de la cuota está directamente relacionado con el sesgo en favor de las mayorías: mayor sesgo cuanto menor la cuota. También es cierto que la cuota simple tiene, de entre todas las cuotas, la mayor afinidad con la proporcionalidad perfecta. Pero la cuota Hare no es la cuota mayor ni las cuotas se ordenan de más a menos proporcionales. Las cuotas se ordenan simplemente de mayor a menor y, de este modo, de más sesgadas contra los partidos mayores (y por ello también "desviadas" de la intuición normativa de la proporcionalidad) a más sesgadas en favor de los mismos ("desviadas" con una distinta polaridad).

En todo caso, la elasticidad del tamaño de la cuota tiene límites precisos. Sólo las cuotas comprendidas entre $1/(M-1)$ y $1/(M+1)$ son decisivas y pueden emplearse en fórmulas simples. Las cuotas mayores y, lo que es más importante en la práctica, las menores, son cuotas falsas que se emplean como parte de fórmulas compuestas. En una fórmula compuesta se prueba con dos tamaños de cuota: en primer lugar una cuota falsa, por ejemplo, $1/(M+3)$; si la cuota no produce un resultado, entonces se emplea una cuota de reserva que es decisiva, como $1/(M+1)$. Suponemos que toda fórmula de cuota falsa emplea como cuota de reserva la cuota más próxima que es decisiva. El método para hacer que las cuotas sean elásticas está inventado, se trata de las fórmulas de divisores.

En este capítulo se ha demostrado que las cuotas dentro del intervalo decisivo son proporcionales, en el sentido mínimo (condición general de la proporcionalidad) de reproducir un resultado proporcional cuando esto es posible. Las fórmulas compuestas con cuotas fuera del intervalo decisivo también son proporcionales, pues cuando la proporcionalidad es posible, o bien reproducen el resultado con su primera cuota, o bien han de acudir a la cuota de reserva que, por encontrarse en el intervalo decisivo, es proporcional. Los métodos de cuota limitados, sin embargo, no son proporcionales, sino q-igualitarios, pero no se trata de métodos que tengan importancia práctica, salvo el sistema VUNT. Los métodos de divisores, que se introducen a continuación, muestran, por ser mucho más flexibles, variantes no proporcionales tanto por ser mayoritarios como por ser igualitarios.

CAPÍTULO CUATRO

LOS MÉTODOS DE DIVISORES

A menudo, los métodos de divisores aparecen, en la literatura convencional sobre sistemas electorales, como mecanismos algo opacos de asignación de escaños, comparados con la relativa claridad de las cuotas. Esto se debe a su común caracterización a partir de algoritmos de cálculo que no son esenciales en estos métodos. Sin embargo, contamos con un análisis detallado y preciso de los métodos de divisores, el de Balinski y Young (1982), que con demasiada frecuencia se ignora. Estos autores precisan el tipo de función de representación que define a estos métodos, al menos a aquéllos que son proporcionales. Un objetivo de este capítulo es poner en conexión la descripción habitual, en la ciencia política y en la codificación legal, de los métodos (basada en algoritmos de cálculo) con su caracterización como funciones, mostrando, de paso, por qué funcionan los algoritmos. Sin embargo, el objetivo esencial de las páginas que siguen es generalizar la función de Balinski y Young para todos los métodos de divisores, sean o no proporcionales, incluyendo a la fórmula mayoritaria simple como caso límite.

En el capítulo se repasan y ejemplifican los métodos de divisores más comunes, se muestra que son infinitos y se ilustra su funcionamiento tanto a través de los habituales algoritmos de cálculo como directamente interpretados como funciones. Los ejemplos permiten comprobar, en una primera aproximación, cómo los distintos métodos pueden ordenarse en conformidad con la relación "ser al menos tan mayoritario", aunque la demostración se expone en el capítulo 6.

Los métodos de divisores muestran toda la variedad posible de las fórmulas electorales: igualitarias, proporcionales y mayoritarias. En este capítulo queda demostrado que, una vez que se rompe la limitación impuesta en la definición de Balinski y Young para los métodos, encaminada a asegurar la proporcionalidad, la fórmula mayoritaria simple es un caso límite de fórmula de divisores

Los métodos de divisores han sido comparados de modo impreciso con los de cuota. En este capítulo se sientan algunas bases para una comparación más rigurosa.

4.1. Dos presentaciones de los métodos de divisores

Los métodos de divisores se describen de dos maneras distintas. La primera se basa sencillamente en la lógica y propósito finales de los métodos de divisores de reparto proporcional: dividir los votos de todos los partidos por un mismo número, el divisor (en singular), de manera que los cocientes, partes o "cuotas" resultantes sumen, de acuerdo con cierta regla de ajuste, el número de escaños a repartir, asignándose a cada partido tantos escaños como partes sume. A diferencia de la cuota en los métodos de restos mayores, el tamaño del divisor no está determinado de antemano, sino que, conocida la distribución de los votos, debe encontrarse un divisor que se adapte a la regla, esta sí preestablecida, sobre cómo ajustar los decimales o partes no enteras, de forma que, "redondeando" o ajustando las fracciones, sumen el número de escaños. Una de las muchas posibilidades consiste en ajustar los cocientes redondeándolos del modo habitual (más de medio cociente es igual a un cociente); la fórmula más común ajusta los cocientes despreciando todos los decimales.

Designo al divisor con la letra X cuando se expresa como número escalar de votos, o x cuando se expresa como fracción. El divisor X es ciertamente análogo a la cuota Q: divididos los votos por el mismo nos proporciona los cocientes V_i/X (o bien v_i/x) a partir de los cuales asignamos los escaños. A diferencia de los métodos de cuota, el valor de la suma $\sum v_i/x$ no está determinado ($\sum[v_i/q_n]=1/q_n=M+n$), sino que es variable ($\sum[v_i/x]=1/x$). La única restricción es que el valor de la suma de los cocientes, *una vez ajustados por la regla*, sea exactamente M. La regla es una regla de ajuste que indica a partir de qué punto los cocientes son redondeados hacia la "cuota" superior o cuándo se ajustan hacia la inferior. Precisar los criterios de estas reglas de manera uniforme es el propósito de este capítulo.

El divisor puede encontrarse por ensayo y error o con ayuda de un algoritmo. El algoritmo más general consiste en dividir M veces los votos de todos los partidos por una serie de números (conocidos como los divisores, en plural) de manera que los escaños se asignan a los M cocientes mayores (a menudo llamados, oscuramente, "promedios mayores") de la matriz resultante. Algunas series de números, como los números impares, o los naturales, conducen a una asignación igual a la perseguida por un método de divisores con su regla de ajuste. Dicho de otra forma, permiten encontrar de forma mecánica un divisor X (en singular) adecuado. De este modo, lo más común es caracterizar a los métodos de divisores por la serie de números empleados para dividir los votos de los partidos.

Es evidente que la primera caracterización es la única esencial, pues describe a los métodos de acuerdo con su propósito final y no de acuerdo con algoritmos más o menos idiosincrásicos. Bien podría llamarse norteamericana o histórica, ya que coincide en gran medida con el modo de presentar los métodos por sus primeros descubridores conocidos, en los sucesivos debates sobre el prorrateo de los representantes entre los Estados de la Unión.[1]

---

[1] Aunque suele darse crédito al profesor belga D'Hondt (derecho civil) y al matemático francés Sainte-Laguë por dos de los más conocidos métodos de divisores, es un hecho sabido que fueron primeramente propuestos por Jefferson y Webster, políticos profesionales, en el contexto de los debates sobre el prorrateo de la

La exposición clásica de las fórmulas de reparto que sigue esta línea se encuentra en Balinski y Young (1982). La segunda y más accidental caracterización es la de costumbre europea. Describe a los métodos a la manera habitual de sus segundos descubridores, independientes, al parecer, de los primeros, en el contexto de los debates sobre la representación proporcional de los partidos propiamente dicha. También podría llamarse "descripción legal", ya que, en general, viene recogida en la legislación electoral de los países que emplean estas fórmulas de representación proporcional. Es la más común en los libros de ciencia política. Tiene el defecto de generar abundantes comentarios casuísticos basados en los algoritmos, cuya razón de ser, a menudo, permanece en penumbra.

4.2. Variedades de los métodos de divisores

El método D'Hondt (o, en su versión histórica, de Jefferson), el más sencillo y universal, busca un divisor tal que la suma de los números enteros (despreciando los decimales) que resultan de dividir así los votos de los partidos, sea igual al número de escaños. Los escaños se conceden a los partidos en número igual a dichos cocientes enteros, de manera que, con esta fórmula, a cada partido i le corresponden E escaños si, para algún valor de X, los cocientes de los votos por el divisor se encuentran en el intervalo

$$E_i \leq V_i/X \leq E_i + 1.$$

Esto es lo mismo que decir que de lo que se trata es de encontrar un divisor tal que a cada partido le corresponda su cuota inferior y ninguna fracción de cuota resulte premiada.

---

representación de los distintos Estados de EEUU. De igual modo, el método de cuota de Hare (otro abogado) no es sino el sistema de restos mayores propuesto por Hamilton en aquellos mismos debates. Por obvias razones de convención, me atengo a los nombres europeos de las fórmulas.

En realidad, existen varios modos posibles de poner este método en práctica. El algoritmo más habitual consiste en dividir los votos de cada partido sucesivamente por la serie de números naturales (1,2,3... hasta *M*) y asignar los escaños a los *M* cocientes ("promedios") mayores entre todos los partidos. El cociente menor que resulta premiado es un divisor D'Hondt, es decir, un número por el que se pueden dividir los votos de los partidos, de manera que el número entero resultante nos permita asignar todos los escaños a los partidos de una sola vez. Con este sistema, el último paso es innecesario, pues cuando conocemos el divisor ya sabemos cuántos escaños corresponden a cada partido. Existen otros caminos que producen *exactamente* el mismo resultado[2], como el que a veces se denomina método Hagenbach-Bischoff, o a veces simplemente suizo, una de cuyas versiones consiste en aplicar iterativamente la cuota Droop, a quien la fortuna dio un apellido breve. Otra posibilidad es ir probando números, tomando la cuota Droop como orientación, hasta hallar un divisor que produzca el reparto. En el cuadro 3.6 hay un ejemplo de reparto de cuatro escaños con el método D'Hondt. Los votos de los partidos son divididos sucesivamente por 1,2,3,4 y los escaños son asignados a los cuatro cocientes mayores. El menor de ellos puede tomarse como divisor (*X*), quedando anotado en la primera fila de su sección de la tabla. La mitad derecha de la tabla presenta los cocientes del voto de los partidos entre el divisor seleccionado (V_i /*X*). Los números enteros, esto es, las "cuotas inferiores", despreciando los decimales o "restos", se corresponden con el número de escaños. Esta asignación es independiente del procedimiento por el que hayamos llegado al divisor ($X=150$ en el ejemplo). La misma asignación puede producirse con otros

[2] Es posible encontrar lugares donde se diferencia 'método de media mayor', 'método D'Hondt' y 'método Hagenbach-Bischoff', cuando lo cierto es que se diferencian tanto entre sí como sumar con palotes a sumar con un ábaco o con números arábigos. Véase, por ejemplo, Vallés y Bosch (1997; p.96), donde se dice que el último 'produce resultados semejantes' (*sic*) al método D'Hondt.

números, siempre y cuando el número total de partes enteras sumadas por los partidos sea exactamente cuatro (en este ejemplo, el recorrido de los divisores es $130 < X \leq 150$).

El método conocido como Sainte-Laguë puro (o Webster) busca un divisor tal que la suma de los cocientes de los votos de los partidos, simplemente redondeados, sea igual a la suma de los escaños a repartir. Es decir, el método consiste en buscar un valor de X tal que, divididos los votos de los partidos por ese número, a cada partido le correspondan E escaños si se cumple que

$$E_t - 1 + 1/2 \leq V_t/X \leq E_t + 1/2.$$

Esto es lo mismo que decir que el método busca un divisor que permita que cada partido obtenga bien la cuota inferior, bien la superior, según a cuál se aproxime más.

La manera habitual de realizar una distribución de escaños conforme al criterio de Sainte-Laguë es parecida a la anterior, solo que en lugar de dividir los votos de los partidos por la serie de números naturales, se divide por la serie de números impares 1,3,5,7, etc. En este caso, el valor del menor cociente premiado con un escaño, multiplicado por dos, puede servir como divisor de Sainte-Laguë: divididos los votos de los partidos por este número y redondeados los cocientes del modo ordinario, se obtiene el número de escaños. Idéntico resultado se obtendría dividiendo los votos por 0,5-1,5-2,5... De proceder así, el cociente menor premiado sería un divisor adecuado para la fórmula. El cuadro 3.6 reproduce el ejemplo empleando este método. Puede observarse que el ejemplo exhibe un caso de empate entre dos cocientes, en el que la fórmula no puede decidir, justo cuando las fracciones de la "cuota" son del 0,5. Los dos posibles resultados que aparecen en el cuadro son valores **E** y **E'** de la fórmula electoral. Al producirse este empate, la fórmula sólo puede emplear un divisor, X=240, ya que un número mayor asignaría un escaño menos a cada uno de los partidos empatados, lo que no es una solución, y un número menor asignaría un escaño a cada uno de los partidos empatados, lo que tampoco lo es.

Cuadro 4.1 Asignación de escaños por tres métodos de divisores

D'Hondt	*Divisor X=150; Uex =20%; Uin =12,5%; D = 34.*										
	V	1	2	3	4	E	*V/x*	Cuotas (*S*)	*r*	Restos	*V/x* ajustado
A	360	**360**	**180**	120	90	2	2,40	2	0,4	60	2
B	300	**300**	**150**	100	75	2	2,00	2	0,00	0	2
C	130	130	65	43	33	0	0,87	0	0,87	130	0
D	120	120	60	40	30	0	0,80	0	0,80	120	0
E	90	90	45	30	23	0	0,60	0	0,60	90	0
Suma	1000					4	6,67	4	2,67	400	4
Ste Lague	*Divisor X=240; Uex =20%; Uin =9,1%; D =26-25.*										
	V	1	2	3	4	E-E'	*V/x*	Cuotas (*S*)	*r*	Restos	*V/x* ajustado
A	360	**360**	**120**	72	41	2-1	1,50	1	0,50	120	2-1
B	300	**300**	100	60	43	1	1,25	1	0,25	60	1
C	130	**130**	43	26	19	1	0,54	0	0,54	130	1
D	120	**120**	40	24	17	0-1	0,50	0	0,50	120	0-1
E	90	90	30	18	13	0	0,38	0	0,38	90	0
Suma	1000					4	4,17	2	2,17	520	4
Danesa	*Divisor X=360; Uex =20%; Uin =7,1%; D = 25.*										
	V	1	2	3	4	E	*V/x*	Cuotas (*S*)	*r*	Restos	*V/x* ajustado
A	360	**360**	90	51	36	1	1,00	1	0,00	0	1
B	300	**300**	75	43	30	1	0,83	0	0,83	300	1
C	130	**130**	33	19	13	1	0,36	0	0,36	130	1
D	120	**120**	30	17	12	1	0,33	0	0,33	120	1
E	90	90	23	13	9	0	0,25	0	0,25	90	0
Suma	1000					4	2,78	1	1,78	640	4

El cuadro de ejemplos se completa con al fórmula danesa, poco utilizada en la práctica, pero interesante como punto de comparación. La serie de divisores (en plural) que se puede emplear en el algoritmo es 1,4,7,10, etc. El cociente menor premiado, multiplicado por tres, sirve de divisor (en singular, o *X*) del método. Lo que el método se propone es encontrar un divisor tal que el número de "cuotas" sumadas por los partidos, redondeadas de manera especial, pues un tercio de cuota se hace equivaler a una cuota entera, sume el número de escaños a distribuir. Los escaños se distribuyen a razón de uno por cociente generosamente redondeado, o, dicho de otro modo, premiando a todos los restos que superen un tercio de la "cuota". Así, el intervalo dentro del cual cada partido recibe E escaños viene dado por las desigualdades:

$$E_i - 1 + 1/3 \leq V_i/X < E_i + 1/3.$$

A cada partido le corresponde la cuota superior siempre que su fracción de cuota exceda a un tercio de la misma. La "cuota" que cumple esta regla es cualquier cantidad de votos entre 270 y 360.

Algunas reglas de divisores sólo pueden emplearse cuando el número de escaños es mayor que el número de contendientes. Son reglas concebidas para el prorrateo de escaños entre Estados o circunscripciones. Por ejemplo, la fórmula Adams (o fórmula de la mínima fracción) busca un divisor tal que los escaños se distribuyan a razón de uno por cociente entero o por *cualquier fracción* del mismo. Es la imagen especular del método D'Hondt. A cada partido (circunscripción) le corresponde siempre su cuota superior, es decir, le corresponden E escaños si, para algún X, el cociente de sus votos se encuentra en el intervalo:

$$E_i - 1 \leq V_i/X \leq E_i .$$

El algoritmo habitualmente sugerido para encontrar un divisor Adams es dividir los votos de los partidos por la serie 0,1,2,3, etc. Divididos los votos por el valor del cociente menor que alcanza un escaño y redondeando todas las fracciones hacia arriba, cualquiera que sea su tamaño, habremos reproducido un reparto según la fórmula. Es evidente que este método no puede definirse si hay más partidos que escaños, pues los primeros cocientes de cada partido en la matriz que genera el algoritmo tienen todos un valor infinito.

Existen algunas fórmulas más complejas que comparten con la fórmula Adams la restricción a un dominio donde los escaños abundan con respecto a los contendientes. Por ejemplo, la fórmula de Hill-Huntington, también llamada fórmula de proporciones iguales, y la fórmula de Dean. El modo más sobrio de describir estas fórmulas se debe a Balinski y Young (1982; 60-61), pues ponen a la luz las reglas de ajuste implícitas en descripciones más complejas. La fórmula de Dean ajusta los cocientes de manera tal que a cada partido le corresponde su cuota superior si el cociente entre los votos y el divisor es mayor que la media *armónica* entre la cuota inferior y la superior. La media armónica es el producto dividido por la media aritmética, luego podemos escribir que esta fórmula busca un divisor tal que a cada partido le corresponden E escaños si, para algún valor de X, sus votos se encuentran en el intervalo

$$((E_i-1\ E_i))/(E_i-1+1/2) \leq V_i/X \leq (E_i\ (E_i+1))/(E_i+1/2).$$

El método de Hill-Huntington ajusta los cocientes de manera que a cada partido le corresponda su cuota superior si el cociente es mayor que la media *geométrica* de las cuotas superior e inferior. La media geométrica es la raíz cuadrada del producto, por lo que la proporción entre los votos de los partidos, un valor del divisor y el número de escaños obtenidos debe cumplir la restricción

$$\sqrt{}((E_i-1)E_i) \leq V_i/X \leq \sqrt{}(E_i(E_i+1).$$

Ambos métodos pueden interpretarse como variaciones sobre el método de Sainte- Laguë (conocido como método de Webster para el prorrateo de escaños), que emplea la más sencilla media aritmética para ajustar los cocientes y determinar, así, si el cociente se "redondea hacia arriba" o "hacia abajo", es decir, si la fracción resulta premiada o no con un escaño añadido a la cuota inferior.

Sin embargo, a diferencia de este método, los criterios de media armónica y geométrica conceden un escaño a todo partido que tenga cualquier número de votos: el valor de ambas medias entre cero y uno es cero. El algoritmo natural para encontrar un divisor de Dean es dividir los votos de los partidos por la serie (0x1)/0,5, (1x2)/(1,5) etc. Esto es: 0 1,33 2,4 3,43 4,44... De modo análogo, el algoritmo para encontrar un divisor adecuado para la regla de Hill-Huntington consiste en dividir los votos por la serie √(0x1),√(1x2), etc. Esto es: 0 1,41 2,45 3,46 4,47... A medida que se avanza en la serie (en el número *E* de escaños) el criterio de ajuste se va aproximando más y más a la media aritmética y, por tanto, a la fórmula de Sainte-Laguë. (Recuérdese que uno de sus algoritmos es 0,5 1,5 2,5 3,5...).

En los ejemplos del cuadro 4.1, si suponemos que los escaños a distribuir son cinco, cualquiera de estas tres fórmulas de prorrateo, Adams, Hill y Dean, asignaría, naturalmente, un escaño a cada opción, arrojando un índice de desviación D=26. Hasta donde yo sé, estas fórmulas no se emplean para la asignación de escaños a partidos políticos, es decir, en el contexto de sistemas electorales propiamente dichos. Para eliminar, siquiera en la teoría, la restricción de dominio que hace que estas fórmulas sólo sean útiles en los contextos en que $p \leq M$, a veces se adopta la convención (Balinski y Young 1982; 99) de que, si los escaños son menos numerosos que los contendientes, los escaños se distribuyen entre los M mayores. Esto es lo mismo que decir que se emplea el sistema VUNT como fórmula complementaria.

4.3. Caracterización general de las fórmulas de divisores proporcionales y mayoritarias.

A continuación se introduce, en primer lugar, la caracterización general de las fórmulas de divisores para el prorrateo proporcional de escaños debida a Balinski y Young (1982). En la literatura convencional sobre estudios electorales, donde el trabajo de

Balinski y Young no ha tenido demasiado impacto, existen otros intentos informales de caracterización de las fórmulas, a partir del tipo de algoritmos que emplean. De ello me ocupo en segundo lugar. La propuesta fundamental de esta sección consiste en ampliar la definición de Balinski y Young para poder incluir fórmulas de divisores que son fórmulas electorales pero que no son proporcionales, concretamente, las fórmulas de tipo mayoritario. En la sección 4.6 se sugiere ampliar la definición también a las fórmulas igualitarias. Al mismo tiempo, toda la atención se concentra en las fórmulas de divisores constantes, grupo al que pertenecen casi todas las fórmulas electorales conocidas en la práctica política.

4.3.1. Criterios de divisores proporcionales.

Así como los métodos de cuota se caracterizan por el tamaño de la misma, podemos caracterizar a los métodos de divisores por su regla para ajustar las fracciones de los cocientes. Con una cuota fija, sabemos que la fracción mínima de cuota que puede recibir escaños no puede fijarse como constante, salvo que los partidos sean dos (hemos visto, en 3.1 un ejemplo para la fracción ½). De este modo, los métodos de cuota premian fracciones variables, normalmente por orden de restos mayores. Los métodos de divisores, por el contario, fijan de antemano el criterio según el cual una fracción de divisor recibe un escaño añadido (½ es el caso en la fórmula de Sainte Laguë), lo que obliga a que el divisor-cuota (X) sea variable.

Un ajuste-*d* de un número real z, $[z]_d$, es un número entero E tal que $d(E-1) \leq z \leq d(E)$. El ajuste es un valor único a menos que $z=d(E)$, en cuyo caso puede tomar cualquiera de los valores E o $E+1$. Por ejemplo, el criterio d de ajuste empleado por la regla de Sainte-Laguë es el redondeo simple de los cocientes, de manera que $d(E-1)=E-½$ y $d(E)=E+1/2$. Así, con este método, $V_i/X=3{,}3$ se ajusta como E=3, V_i/X=3,6 se ajusta como E=4 y V_i/X=3,5 se ajusta como E=(3 ó 4).

En la definición de Balinski y Young (1982; 99), un *criterio de divisor* es cualquier $d(E)$ creciente y monótono, definido para todos los enteros $E \geq 0$ y que satisface la restricción $E \leq d(E) \leq E+1$. Una *fórmula F de divisores basada en d* es

$$F_d(\mathbf{V},M) = \{\mathbf{E}\colon E_i = [V_i/X]_d \text{ y } \textstyle\sum E_i = M \text{ para algún } X\}.$$

Los seis métodos de divisores que se han expuesto más arriba emplean los criterios de ajuste que se detallan en el cuadro 4.2.

Cuadro 4.2. Criterios de divisores de seis métodos de reparto

Adams	$d(E)=E$	Danés	$d(E)=E+1/3$
Dean	$d(E)=(E(E+1))/(E+1/2)$	Sainte-Laguë	$d(E)=E+1/2$
Hill-Huntington	$d(E)=\sqrt{(E(E+1))}$	D'Hondt	$d(E)=E+1$

De este modo, podemos rescribir mediante una fórmula general el conjunto de desigualdades que caracterizan a los métodos de divisores. Dado un criterio $d(E)$, existe al menos un valor de X tal que cada partido obtiene E de M escaños si el cociente de sus votos por el divisor X se encuentra en el intervalo

$$d(E_i-1) \leq V_i/X \leq d(E_i).$$

De esta desigualdad se sigue también que para cualquier par de partidos i y j, debe ser cierto que

$$V_i/d(E_i-1) \geq V_j/d(E_j). \qquad (4.1)$$

Un ejemplo: sea el electorado V:[550, 200, 150, 90, 10], una circunscripción M=6 y la fórmula Sainte-Laguë, basada en $d(E)=E+0{,}5$. Para un valor de X como, por ejemplo, X=175, se obtiene V_1/X=3,14, V_2/X=1,14, V_3/X=0,86, V_4/X=0,51, y V_5/X=0,06; ajustados los cocientes por el criterio de Sainte-Laguë, obtenemos $[V_1/X]_d$=3, $[V_2/X]_d$=1, $[V_3/X]_d$=1, $[V_4/X]_d$=1, $[V_5/X]_d$=0. Luego F(V,6)=E:[3,1,1,1,0]. El ejemplo se reproduce en el cuadro 4.4.

4.3.2. Criterios no negativos constantes: proporcionales y mayoritarios

Un *criterio de divisor no negativo constante* es cualquier regla de ajuste $c(E)$ monótona creciente con la forma $c(E)=E+c$ definido para todos los enteros $E \geq 0$ donde c, el *término de ajuste*, es un número real $c \geq 0$. Un ajuste-c de un número real z , $[z]_c$, es un número entero E tal que $c(E) \leq z \leq c(E-1)$. Esta definición de criterio de divisor es más estrecha que la definición general de Balinski y Young, pues excluye criterios en los que, como en $d(E)= \sqrt{[E(E+1)]}$, la regla de ajuste no se basa en un término constante. Todos los criterios constantes son criterios de divisores en la definición de Balinski y Young, pero algunos criterios de divisores no son constantes.

Balinski y Young añaden una restricción, que no se sigue de la definición, para que un criterio de divisor pueda ser la base de una fórmula de reparto, a saber, que $E \leq c(E) \leq E+1$ (lo que implica $0 \leq c \leq 1$). Sin embargo, de mi definición de criterio de divisor se sigue simplemente que $E \leq c(E)$, pues el término de ajuste no es negativo; no es necesario suponer que la segunda desigualdad, $c(E) \leq E+1$, sea también el caso.[3] De este modo, podemos dar una definición de fórmula de divisores que, si bien se limita a criterios

[3] De hecho, también podemos concebir criterios de divisores negativos para los que $c(E) < E$. Esta posibilidad teórica, que conduce a las fórmulas igualitarias, se explora en el apartado 4.6.

constantes, es más amplia que la de Balinski y Young. Una *fórmula electoral de divisores no negativos constantes* F_c es una fórmula que emplea un criterio de este tipo.

$$F_c(\mathbf{V},M) = \{\mathbf{E}: E_i = [V_i/X]_c \text{ y } \textstyle\sum E_i = M \text{ para algún } X\}.$$

Esta definición incluye a toda fórmula electoral en la que el reparto de escaños sea tal que para todo partido i y algún X,

$$E_i - 1 + c \leq V_i/X \leq E_i + c, \qquad (4.2)$$

donde c es un número real $c \geq 0$ y $\sum E_i = M$.

La decisión de concentrar la atención en los criterios de divisor constantes viene dictada por sencillas razones de conveniencia: como veremos, con estas fórmulas, la expectativa mínima de escaños crece linealmente con la fracción de votos de cada partido. Esto permite construir sus funciones de umbrales en una expresión analítica que indique los votos necesarios para cada número de escaños como función de la magnitud y del número de partidos. Las reglas de ajuste variable, como la media aritmética o la media armónica, sólo permite construir la función de umbrales en el caso especial de la competición bipartidista; en cualquier otro caso los umbrales han de obtenerse por tabulación. Hay que advertir, no obstante, que prácticamente todos los métodos de divisores que se emplean en los sistemas electorales son constantes.[4]

Desde el punto de vista analítico, la decisión más importante es la de ampliar la definición de manera que comprenda a todas las fórmulas basadas en criterios tales que $E \leq c(E)$, pues esto incluye a cualquier fórmula constante de divisores proporcional o

[4] La única excepción es una fórmula *sui generis* conocida como fórmula de Sainte-Laguë modificada, que, si bien no se puede despreciar, por su importancia empírica, debe tratarse aparte. En todo caso, esta fórmula tampoco queda cubierta por la definición de Balinski y Young. Las fórmulas de Hill-Huntington o de Dean, con criterios de divisores no constantes, no tienen empleo como fórmulas electorales.

mayoritaria. La restricción de Balinski y Young, a saber, $E \leq d(E) \leq E+1$, limita su definición a fórmulas *electorales proporcionales*, según la condición general de la proporcionalidad. En el caso de las fórmulas contantes, aquéllas cuyo término de ajuste es $0 \leq c \leq 1$ siempre producen un reparto proporcional cuando esto es posible, mientras que las fórmulas tales que $c > 1$ siempre sesgan el resultado en favor de los partidos mayores, esto es, son de tipo mayoritario. Pero cualquier fórmula basada en un criterio $c(E)$ es una fórmula *electoral*, es decir, una fórmula monótona en la que la expectativa de escaños no desciende con la fracción del voto de un partido. Suponer que c es no negativo resulta bastante razonable, pues lo contrario da lugar a fórmulas igualitarias, algo chocantes dentro de la familia de las fórmulas electorales y desconocidas en la práctica. Sin embargo, el que las fórmulas electorales deban ser proporcionales es algo que no debe prejuzgarse. La realidad empírica ofrece diversas fórmulas electorales mayoritarias tan dignas de examen como las demás.

¿Qué tipo de fórmulas electorales no proporcionales son éstas? Un ejemplo bien conocido es la fórmula Imperiali de divisores, en la que el término de ajuste o "fracción" crítica es c=2. Puede describirse como un método que busca un número tal que, divididos los votos de los partidos por el mismo, nos permita asignar los escaños una vez que despreciamos los decimales *y una parte entera* de los cocientes V_i/X. A cada partido le corresponden E escaños en una asignación **E** que pertenece al conjunto de asignaciones Imperiali para un problema **V** si, para algún X, el cociente de sus votos se encuentra en el intervalo

$$E_i+1 \leq V_i/X \leq E_i+2.$$

El método busca un divisor tal que todos los partidos obtienen un escaño menos que su cuota inferior. Puede encontrarse mediante el algoritmo consistente en dividir los votos de los partidos por la serie de números 2,3,4 hasta $M+1$ y asignar los escaños, como de costumbre, a los cocientes mayores. El cociente menor premiado en la matriz del algoritmo puede servir de divisor Imperiali. Esta regla de ajuste, o simple poda, de los cocientes, hace imposible la distribución proporcional. Gallagher ofrece, en sus propios términos, una prueba de este extremo (1992; 477).

Un ejemplo de distribución Imperiali sesgada hacia la mayoría: sea el electorado **V**:[550, 200, 150, 90, 10], una circunscripción M=6 y la fórmula Imperiali, basada en $c(E)=E+2$. Para un valor de X como, por ejemplo, X=90, se obtiene V_1/X=6,11, V_2/X=2,22, V_3/X=1,67, V_4/X=1,00, V_5/X=0,11; ajustados los cocientes por el criterio de término constante c=2, obtenemos $[V_1/X]_c$=5, $[V_2/X]_c$=1, $[V_3/X]_c$=0, $[V_4/X]_c$=0, $[V_5/X]_c$=0. Luego F (**V**,6)=**E**:[5,1,0,0,0]. El ejemplo se reproduce en el cuadro 4.4.

4.3.3. Algoritmos generales

En el contexto de los estudios electorales, una manera bastante habitual de caracterizar (a la europea, por decirlo así) a los métodos de divisores es reducir las secuencias de números de los algoritmos a un formato común. Taagepera y Shugart (1989; 33) proponen reducir las series al formato 1, $1+b$, $1+2b$, $1+3b$, etc. Así, $b=1$ distingue al método D'Hondt, $b=2$ al método Sainte-Laguë y $b=3$ a la fórmula danesa. De este modo, de la serie se desprenden las secuencias de divisores de los métodos más corrientes en la forma en la que nos resultan más familiares, es decir, empleando números enteros. Gallagher (1992; 474) propone un formato común alternativo para las fórmulas de divisores, que no es sino $1/b$, $1+1/b$, $2+1/b$, etc; o bien c, $c+1$, $c+2$, etc, y $c=1/b$. En esta versión, para las fórmulas proporcionales, los divisores de la serie tienen valores entre cero y la unidad, de modo que, por ejemplo, la fórmula D'Hondt emplea $c=1$, la de Sainte-Laguë $c=1/2$ y el método danés $c=1/3$. No es éste el formato en el que normalmente se encuentra la descripción de los métodos en los libros de leyes, o en los manuales, pero ambos algoritmos son equivalentes. Puede llamarse algoritmo A al más tradicional y frecuente y algoritmo B a la alternativa de Gallagher. A efectos prácticos, las series de divisores en los algoritmos de las fórmulas electorales (pero sólo si son constantes) puede caracterizarse de cualquiera de las dos maneras.

Algoritmo A: $1, b+1, 2b+1, 3b+1 \ldots (M-1)b+1;\ b \geq 1$
Algoritmo B: $c, 1+c, 2+c, 3+c \ldots (M-1)+c.\ ;\ c=1/b$

Ahora bien, a pesar de tratarse de algo esencial, me parece que suele pasar inadvertido el hecho de que c, o $1/b$, es la fracción mínima de un cociente V_i/X que resulta premiada con un escaño *añadido a la cuota inferior con cada fórmula, es decir, coincide con* el término de ajuste de los criterios de divisores constantes[5]. Sólo subrayando este hecho podemos entender por qué las series de divisores permiten asignar los escaños de acuerdo con los criterios de las respectivas fórmulas: el algoritmo B está formado por la serie de números $E-1+c$, donde E es cada uno de los enteros $1 \leq E \leq M$ y c un número real que, para las fórmulas de reparto proporcional, se encuentra en el intervalo $0 \leq c \leq 1$. Es decir, la serie de números del algoritmo despliega el criterio $c(E)$, que caracteriza a la fórmula.

De la desigualdad (4.2) se sigue que si la distribución de escaños se efectúa con una fórmula F_c, para dos partidos cualesquiera i y j debe cumplirse que

$$V_i/(E_i-1+c) \geq V_j/(E_j+c), \qquad (4.3)$$

lo que no es sino la expresión equivalente a (4.1) para el caso especial de los criterios de divisores constantes.

---

[5] Tanto Taagepera y Shugart (1989) como Gallagher (1992) designan sus números con la letra d y, con ellos, muchos de los lugares que recogen la idea. Designo los números como b y c para evitar confusiones y para subrayar su coincidencia con el término de ajuste de los criterios de divisores definidos más arriba.

Por ejemplo, de la definición de fórmula de divisores de Sainte-Laguë se sigue que, para cualesquiera partidos *i* y *j*, debe ser cierto que $V_i/(E_i-½)\geq V_j/(E_j+½)$. Dividir los votos de todos los partidos por ½, 1+½, 2+½, ... $(M-1)+½$, y buscar los *M* cocientes mayores garantiza que se satisface el criterio expresado en la desigualdad. Del mismo modo, de la definición de la fórmula D'Hondt se sigue que, para dos partidos *i* y *j*, debe ser cierto que $V_i/(E_i)\geq V_j/(E_j+1)$. Dividir los votos de todos los partidos por 1, 2, 3, ... *M*, y asignar un escaño a cada uno de los *M* cocientes mayores, asegura que se cumple esta condición.

Es evidente que no todas las series de divisores se pueden caracterizar a partir de una *c* o *b* constantes. En las fórmulas de Hill-Huntington y de Dean el criterio de divisor no da lugar a una fracción constante sino a una fracción variable, que se obtiene en función de *E*. Cuanto mayor es el número de escaños, mayor es la fracción. Pero el algoritmo se construye siguiendo el mismo principio. De la definición del primero de estos métodos se sigue que, en una distribución de escaños conforme al criterio de Hill-Huntington, debe ser cierto que $V_i/\surd[(E_i-1)E_i)] \geq V_j/\surd[(E_j(E_j+1)]$. Dividir los votos de todos los partidos por la serie $\surd(0x1)$, $\surd(1x2)$, $\surd(2x3)$, etc, asignando un escaño a cada uno de los cocientes mayores, hasta *M*, nos proporciona de modo mecánico una distribución que respete el criterio de la media geométrica.

Puede ser útil detallar aquí por qué los algoritmos A y B son equivalentes. La razón se encuentra en una propiedad introducida en la definición de las fórmulas electorales: la homogeneidad. Puesto que las fórmulas electorales son homogéneas, la asignación de escaños no varía si el número de votos de todos los partidos se multiplica por una misma constante, obteniéndose así un nuevo electorado que es un vector equivalente. De este modo, si *k* es una constante cualquiera que se multiplica a todos los partidos en el vector *k*V, puede rescribirse la desigualdad (4.3) como $kV_i/(E_i-1+c)\geq kV_j/(E_j+c)$. Ahora bien, sea $k=c$, entonces también puede escribirse que, si la distribución se efectúa con una fórmula que emplea un criterio *c*, para dos partidos *i* y *j* debe ser cierto que

$$V_i/([E_i-1]/c+1) \geq V_j/(E_j/c+1),$$

o, lo que es lo mismo, si $b=1/c$,

$$V_i/([E_i-1]b+1) \geq V_j/(E_jb+1). \qquad (4.5)$$

El algoritmo general de Taagepera y Shugart, o algoritmo A, se construye como la serie $(E-1)b+1$ para los enteros $1 \leq E \leq M$, que es el denominador de la parte izquierda de la desigualdad (4.5).

4.3.4. La fórmula mayoritaria simple

Parece natural preguntarse si, puestos a considerar criterios de divisores que producen resultados sesgados hacia la mayoría, no es posible construir una fórmula de divisores que dé lugar a lo que comúnmente llamamos un reparto mayoritario simple: todos los escaños para el partido mayor. Es sencillo comprobar que, efectivamente, éste es el caso.

La fórmula mayoritaria concede $E_1=M$ escaños al partido mayor y $E=0$ a cualquier partido con votos $v_i<v_1$. En particular, el segundo partido no debe obtener ningún escaño, lo que excluye la posibilidad de que cualquier partido distinto del mayor lo haga. A partir de (4.3) podemos escribir que, si el partido mayor tiene índice uno y el segundo partido índice dos, una fórmula basada en un criterio $c(E)$ produce un reparto mayoritario en al menos un resultado E que es solución de la fórmula si

$$V_1/(M-1+c) \geq V_2/c.$$

Por lo que puede demostrarse que, para un electorado ordenado $V_1 \geq V_2 \geq \ldots V_p$ una fórmula constante de divisores basada en un criterio de ajuste $c(E)=E+c$, produce una asignación mayoritaria si el término de ajuste es

$$c \geq (V_2[M-1])/(V_1 - V_2). \qquad (4.6)$$

Un ejemplo de distribución mayoritaria simple: sea el electorado V:[550, 200, 150, 90, 10] y una circunscripción M=6. Por (4.6) sabemos que la fórmula de divisores que reproduce el reparto mayoritario ha de basarse en un criterio con término de ajuste $c \geq 20/7$ o, aproximadamente, $c \geq 2,857$. Adoptemos, por simplicidad, la fórmula D+3, basada, naturalmente, en $c(E)=E+3$. La regla busca un divisor tal que cada partido recibe tantos escaños como el tercer entero menor que el cociente entre sus votos y el mismo (el ajuste "redondea" despreciando los decimales y dos partes enteras de las fracciones). Para un valor de X como, por ejemplo, X=68, se obtiene V_1/X=8,09, V_2/X=2,94, V_3/X=2,21, V_4/X=1,32, V_5/X=0,15; ajustados los cocientes por el criterio de término constante c=3, obtenemos $[V_1/X]_c$=6, $[V_2/X]_c$=0, $[V_3/X]_c$=0, $[V_4/X]_c$=0, $[V_5/X]_c$=0. Luego F(V,6)=E:[6,0,0,0,0]. El mismo ejemplo se reproduce en el cuadro 4.4.

La condición (4.6) indica el mínimo término de ajuste que produce el máximo sesgo minoritario para un vector de votos, conocido al menos el tamaño de sus dos primeros componentes. La siguiente pregunta natural es si existe un término de ajuste que siempre, para cualquier electorado, reproduzca el reparto mayoritario, es decir, si existe un criterio $c(E)$ en el que se basa la fórmula mayoritaria simple. La respuesta obvia es que la fórmula mayoritaria simple es la fórmula de divisores con término de ajuste arbitrariamente grande o infinito, esto es, un caso degenerado de fórmula de divisores, cuando $c \to \infty$.

Este razonamiento puede conectarse con una muy buena intuición de Taagepera y Shugart (1989; 34), quienes, a partir de la sencilla sistematización de los algoritmos comunes para los métodos de divisores, sugieren que el método mayoritario plurinominal es el caracterizado por el algoritmo al que da lugar b=0. Al reducir a cero la distancia entre los divisores de su serie nos encontramos con que los votos de los partidos son divididos por una sucesión de números iguales (1,1,1,1..), de manera que el primer partido siempre tiene el cociente mayor (el famoso "promedio mayor", que nada promedia). Puesto que $c=1/b$, cuando la distancia de su serie (algoritmos A) tiende a cero, nuestro término de ajuste tiende a infinito.

Ahora bien, por (4.6) podemos precisar que el valor de c que genera una fórmula con resultado de reparto por mayoría simple es

Cuadro 4.3. Métodos de divisores no negativos constantes

$c(E)=E+c$ $\qquad E_i-1+c \leq V_i/X \leq E_i+c; \qquad 1 \leq E \leq M; \; c \geq 0; \; c=1/b$

Algoritmo para hallar un valor de X: A) Dividir los votos de los partidos por $1, 1+b, 1+2b, 1+3b \ldots 1+(M-1)b$; multiplicar el M-ésimo mayor cociente encontrado por b. O bien, B) dividir los votos de los partidos por c, $1+c$, $2+c$, $3+c \ldots (M-1)+c$; tomar el M-ésimo mayor cociente.

D+0.	Fórmula Adams. $E-1 \leq V_i/X \leq E$.	$b \to \infty$; $c=0$. Algoritmo: 0-1-2-3-4..
D+1/3.	Fórmula danesa. $E-1+1/3 \leq V_i/X \leq E+1/3$.	$b=3$; $c=1/3$. Algoritmo: 1-4-7-10.. / 0,33-1,33-2,33..
D+0,5.	Fórmula Sainte Laguë (Webster). $E-1+1/2 \leq V_i/X \leq E+1/2$.	$b=2$; $c=1/2$. Algoritmo: 1-3-5-7../ 0,5-1,5- 2,5-3,5..
D+1.	Fórmula D'Hondt (Jefferson). $E \leq V_i/X \leq E+1$	$b=1$; $c=1$. Algoritmo: 1-2-3-4...
D+2.	Fórmula Imperiali (de divisores). $E+1 \leq V_i/X \leq E+2$.	$b=0{,}5$; $c=2$. Algoritmo: 1- 1,5- 2- 2,5../ 2-3-4-5..
D+∞.	Fórmula mayoritaria (caso límite).	$b=0$; $c \to \infty$. "Algoritmo": 1-1-1-1-1...

necesariamente infinito sólo cuando el primer y el segundo partido son iguales. El máximo término de ajuste es suficiente pero no necesario a menos que $V_1 = V_2$. Si en el electorado existe un partido que aventaja en votos a todos los demás, entonces también existe una fórmula basada en $c(E)$ con término de ajuste finito que resuelve el problema de asignación de escaños de modo estrictamente mayoritario.

El cuadro 4.3 presenta los datos de los miembros destacados de la familia de los divisores constantes, incluyendo a la fórmula mayoritaria como caso límite. No hay que decir que las posibles fórmulas electorales de divisores son *infinitas*.

El cuadro se completa con una modesta propuesta de nomenclatura sistemática para las fórmulas, paralela a la sugerida para los métodos de cuota. Los nombres históricos, sin duda, tienen mejor sonido y eco, pero no se pueden inventar nombres para cada una de las infinitas fórmulas de divisores.

4.4. ¿Pueden compararse las cuotas y los divisores?

El parecido entre las cuotas y esa especie de cuotas variables que son los divisores ha llevado a algunos autores (Lijphart 1986; Gallagher 1992) a sugerir que los métodos de divisores pueden considerarse como casos especiales de métodos de cuota.[6] Estos autores identifican la "cuota" de los métodos de divisores con una cifra concreta, el divisor que se puede hallar por medio del algoritmo habitual de cada método, que es el divisor máximo posible dada la distribución de los votos.

Hasta cierto punto, la propuesta de Lijphart y de Gallagher de buscar la cuota implícita de los métodos de divisores se encamina hacia una formulación menos accidental de estos métodos. Esto es plausible en la medida en que contribuya a que los métodos de divisores dejen de discutirse, frente a la aparente claridad de las fórmulas de cuota, como ristras de números de las que

---

[6]Otros autores siguen una línea parecida en su exposición de las fórmulas electorales Por ejemplo, Ramírez (1993).

mecánicamente, y hasta sorprendentemente, se desprende una asignación de escaños. Sin embargo, la simple equiparación de las cuotas y de los divisores presenta evidentes problemas y es fuente de inexactitudes.

4.4.1. El divisor como cuota variable

Contemplado bajo la especie de las cuotas, podemos decir que el método D'Hondt emplea una "cuota" tan baja como sea necesario para que ningún resto resulte jamás premiado. Puede describirse como una fórmula que parte tentativamente de la cuota Droop, pero la reduce tanto como sea necesario para lograr su fin. Por su parte, el método de Sainte-Laguë emplea una "cuota" lo bastante generosa como para que resulten premiados todos los restos si y sólo si son superiores a la mitad de la "cuota", que tiende a oscilar alrededor de la cuota simple (es su cuota tentativa). Todavía más liberal, la "cuota" del método danés es tan alta como para premiar a los restos equivalentes a un tercio de la misma. El método Adams, un campeón de las minorías, busca una cuota tan alta como sea necesario para que todos y cada uno de los partidos reciban un escaño por sus restos. Podría describirse como un método que parte tentativamente de la "cuota larga" (la mayor cuota que es decisiva) y la extiende tanto como se precise para que hasta el más pequeño de los partidos logre un escaño.

Las fórmulas de divisores recuerdan, en cierto modo, a las fórmulas compuestas de cuota y restos mayores. El método D'Hondt, por ejemplo, guarda parecido con el método Imperiali de restos mayores, pero éste tiene sólo dos posiciones o estados ($1/[M+2]$) y $1/[M+1]$), una de las cuales, la de menor cuota posible, se selecciona tras conocerse la distribución del voto en V. El método D'Hondt, como cualquier método de divisores, tiene infinitas posiciones posibles y se ajusta automáticamente: la cuota empleada puede ser $1/(M+1)$, $1/(M+1{,}95)$ o $1/(M+2{,}87)$. Puede ser, en definitiva, cualquier cuota que permita distribuir los escaños sin premiar ningún resto, pues *ésa* es la regla.

En el cuadro 4.4 se presenta una nueva serie de ejemplos de asignación de escaños (M=6) por métodos de divisores constantes, tomando como divisor efectivo (X) el valor del menor cociente que obtiene un escaño en la matriz del algoritmo. En segundo lugar, dentro de la tabla, aparece la fórmulas D'Hondt, cuyo divisor efectivo es, en el ejemplo, X=137,5; si deseamos expresar este divisor como cuota en forma de fracción $x=q$, la "cuota" que el método emplea en el problema V del ejemplo es $1/(M+1{,}3)$. Sin embargo, en un ejemplo distinto introducido más arriba, en el cuadro 4.1, el divisor de la fórmula D'Hondt es X =150 (para un sistema que también suma V=1000 votos, pero con solos M=4 escaños), lo que, traducido a una cuota, equivale a $1/(M+2{,}7)$. La magnitud exacta de la cuota no es esencial, como sí lo es en los métodos de cuota y restos mayores, lo esencial es que la cuota permita despreciar todos los "restos" para asignar los escaños. Pueden también compararse los casos en los que se aplica la fórmula de Sainte-Laguë en los cuadros 4.1 y 4.4, donde los divisores efectivos son equivalentes a las cuotas $1/(M-0{,}44)$ y $1/(M+0{,}17)$, respectivamente. Se diría que el divisor trata de aproximarse a la cuota simple de Hare, pero, de nuevo, lo que hay que subrayar es que el valor específico de la cuota no es lo esencial, sino que la cuota permite despreciar todos los "restos" que no alcanzan el tamaño de media cuota.[7]

Los divisores son variables y, en ese sentido, las fórmulas de divisores son, si acaso, semejantes a las fórmulas compuestas de cuota y restos mayores. La principal diferencia se encuentra en que, en lugar de las rudimentarias dos posiciones de las fórmulas de cuota como Imperiali o Imperiali reforzada, las fórmulas de divisores están compuestas por infinitas posiciones dentro de un

---

[7] Contra la pretensión de dar una importancia sustantiva al valor del divisor, pueden traerse aquí las palabras de Webster, primer descubridor de la fórmula de Sainte-Lague: 'What is a divisor? Not necessarily a simple number. It may be composed of a whole number and a fraction; it may itself be the result of a previous process; it may be anything, in short, which produces accurate and uniform division' (Citado por Balisnki y Young 1982; 33).

recorrido. La estrategia adecuada para intentar una comparación entre las cuotas propiamente dichas y los divisores no es generar una carga de ejemplos y, a continuación, afirmar que, por ejemplo, la "cuota" de Sainte-Laguë tiende a oscilar en torno a la cuota simple, o que la "cuota" D'Hondt tiende a ser menor que la cuota Droop, aunque ambas cosas sean ciertas. Teniendo a la vista el caso de las fórmulas compuestas, la estrategia adecuada consiste en delimitar los valores máximo y mínimo del recorrido del divisor en cada fórmula. Esto es, el valor máximo y mínimo que permite que el criterio de divisores quede satisfecho en cada caso.

4.4.2. Divisores mínimo y máximo y divisor efectivo

El problema de la determinación de los recorridos teóricamente posibles para el divisor-cuota en cada una de las fórmulas aparece complicado por el hecho de que el divisor ni siquiera es un único número, para cada problema de distribución de escaños, sino que, como ya se ha señalado, normalmente (salvo cuando hay empates) comprende un recorrido de números que, en cada caso, pueden "hacer el trabajo". En los ejemplos del cuadro 4.4, el divisor D'Hondt es $110 < X \leq 137{,}5$, o bien, aproximadamente, $1/(M+3) < x \leq 1/(M+1{,}3)$; el divisor de Sainte-Lagüe es $157{,}2 < X \leq 180$, o bien $1/(M+0{,}36) < x \leq 1/(M-0{,}44)$; el divisor de Adams, el mayor posible, es $276 < X \leq 550$, o bien $1/(M-2{,}4) < x \leq 1/(M-4{,}2)$.

Llámese $x^+(\mathbf{V},M,c)$ al divisor mayor de cada recorrido, es decir, el divisor mayor que es posible que produzca una asignación **E** de M para **V** conforme a cada criterio $c(E)$. De igual modo, llámese $x^-(\mathbf{V},M,c)$ al divisor menor que produce una asignación **E** para **V** en M con un criterio $c(E)$. Para cada criterio de divisores $c(E)$ existe un *divisor máximo* x_{MAX} que es una función del número de partidos o componentes del sistema y del número de escaños a distribuir, $x_{\mathrm{MAX}}(p,M,c)$, así como un *divisor mínimo* $x_{\mathrm{MIN}}(p,M,c)$. Los divisores mínimo y máximo no son los valores extremos que puede adoptar la variable "cuota" en un problema de distribución de M escaños, pero sí los valores máximo y mínimo que nos proporcionan alguna información, pues para cualquier sistema **V** con p partidos, $x_{MAX}(p,M,c) \geq x^-(\mathbf{V},M,c)$ y $x_{MIN}(p,M,c) \leq x^+(\mathbf{V},M,c)$. Cualquier recorrido de divisores, o bien contiene al divisor máximo, o bien contiene al divisor mínimo, o bien está comprendido entre ambos. Demostrar la existencia de los divisores máximo y mínimo y hallar las funciones que los determinan excede los confines de este capítulo, pues constituye la natural introducción a las funciones de umbrales, materia de los capítulos siguientes (5 y 6).

Hasta aquí se ha tomado como divisor efectivo, según es la costumbre, al divisor más alto del recorrido (x^+), que es el resultado necesario de seguir mecánicamente el procedimiento de buscar el cociente menor premiado en la matriz del algoritmo. La decisión de equiparar *ese* valor con la cuota, tal y como hacen tanto Lijphart (1986) como Gallagher (1992), no está justificada. La comparación directa de cuotas y divisores induce así a confusiones, como sucede cuando Gallagher (1992; 484) insiste, tratando de corregir a Lijphart (1986; 176), en que la "cuota" D'Hondt puede ser mayor que la cuota Droop. Un valor del *divisor* D´Hondt puede ser mayor que la cuota Droop, pero no cualquier divisor puede ser identificado con una cuota de manera informativa. En el caso del método D'Hondt, el divisor pierde efectividad si supera la cuota Droop, pues ésta queda contenida siempre en el mismo recorrido que cualquier divisor D'Hondt que sea mayor, y, lógicamente, produce los mismos resultados. En otras palabras, la cuota Droop, $1/(M+1)$ es el divisor máximo x_{MAX} del método D'Hondt.

Puede anticiparse que el divisor mínimo del método D'Hondt es $x_{MIN}=1/(M+p-1)$. En un problema, como en el ejemplo del cuadro 4.4, de cinco partidos, el divisor mínimo es $1/(M+4)$. El método D'Hondt funciona en este caso como una especie de fórmula (compuesta) Imperiali super-reforzada, que, además, puede probar con todas las cuotas en el intervalo $1 \leq n \leq 4$, y no sólo con las dos extremas.

En adelante, seguiremos la convención de llamar *divisor efectivo* al divisor mayor de un recorrido, siempre que no incluya ni al máximo ni al mínimo. Si el recorrido de divisores posibles comprende al divisor máximo, éste es el divisor efectivo. Si el recorrido de divisores comprende al divisor mínimo, éste es el divisor efectivo.

4.4.3. Los divisores no son cuotas inviolables

La cuota es inviolable, es decir, cada partido obtiene, en una fórmula de cuota y restos mayores, al menos su cuota inferior S_l. El divisor de muchas fórmulas (para ser preciso, de las no proporcionales), no es una cuota en este sentido. Nótese que el método D'Hondt encuentra la cuota mínima que es posible aplicar en un problema cualquiera de distribución de escaños en cualquier **V**; con una "cuota" menor no sería posible que cada partido recibiese tantos escaños como cuotas, pues no habría escaños suficientes. El método D'Hondt encuentra y adopta como divisor la cuota mínima que es decisiva en **V**; su divisor máximo es idéntico a la cuota Droop, que es la cuota mínima que es decisiva para cualquier **V** (recuérdese que el intervalo decisivo para las cuotas es $-1 \leq n \leq 1$). Sin embargo, ninguna fórmula de cuota puede funcionar con una "cuota" semejante a los valores que pueden ser típicos del divisor Imperiali.

En el ejemplo del cuadro 4.4, el divisor efectivo de la fórmula Imperiali es el mayor del recorrido $76 < X \leq 91{,}7$, lo que aproximadamente equivale al intervalo $1/(M+7{,}2) < x \leq 1/(M+4{,}9)$. Aunque Gallagher (1992; 484) los incluya con las cuotas en una misma tabla comparativa, no tiene ningún sentido decir que los divisores Imperiali son "casos especiales" de cuota. El divisor Imperiali ha de ser lo bastante pequeño como para que cada partido obtenga un escaño menos que su "cuota inferior", lo

Cuadro 4.4.Asignación de escaños con cinco métodos de divisores, mayoritarios y proporcionales

D+3 Divisor máximo X=68,7, Uex=27,3%, Uin=13,04%, D=45										
	V	3	4	5	6	7	8	E	*V/x*	$[V/x]_c$, *c*=3
A	550	**183**	**138**	**110**	**91,7**	**78,6**	**68,7**	6	8	6
B	200	67,7	50	40	33,3	28,6	25	0	2,9	0
C	150	50	37,5	30	25	21,4	18,7	0	2,2	0
D	90	30	22,5	18	15	12,9	11,2	0	1,3	0
E	10	3,3	2,5	2	1,7	1,4	1,2	0	0,14	0
Suma	1000							6	14,5	6
Imperiali de divisores Divisor X=91,7, Uex=22%, Uin=12,5%, D=28,3										
	V	2	3	4	5	6	7	E	*V/x*	$[V/x]_c$, *c*=2
A	550	**275**	**183**	**138**	**110**	**91,7**	78,6	5	6	5
B	200	**100**	67,7	50	40	33,3	28,6	1	2,18	1
C	150	75	50	37,5	30	25	21,4	0	1,64	0
D	90	45	30	22,5	18	15	12,9	0	0,98	0
E	10	5	3,3	2,5	2	1,7	1,4	0	0,11	0
Suma	1000							6	10,9	6
D'Hondt Divisor X=137,5 Uex=14,3%; Uin=10%; D=13,3										
	V	1	2	3	4	5	6	E	*V/x*	$[V/x]_c$, *c*=1
A	550	**550**	**275**	**183**	**138**	110	91,7	4	4	4
B	200	**200**	100	67,7	50	40	33,3	1	1,45	1
C	150	**150**	75	50	37,5	30	25	1	1,09	1
D	90	90	45	30	22,5	18	15	0	0,65	0
E	10	10	5	3,3	2,5	2	1,7	0	0,07	0
Suma	1000							6	7,3	6
Sainte-Lague. Divisor *X*=180; *Uex*=11,1%, *Uin*=6,7%; *D*= 9,3										
	V	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5		E	*V/x*	$[V/x]_c$; *c*=0,5
A	550	**1100**	**361**	**220**	157	122		3	3,06	3
B	200	**400**	133	80	57,1	44,4		1	1,11	1
C	150	**300**	100	60	42,9	33,3		1	0,83	1
D	90	**180**	60	36	25,7	20		1	0,5	1
E	10	20	6,7	4	2,9	2,2		0	0,06	0
Suma	1000							6	5,6	6
Adams Divisor X=550, Uex=0%, Uin=0%; D=25.										
	V	0	1	2	3	4		E	*V/x*	$[V/x]_c$, *c*=0
A	550	∞	**550**	275	183	138		2	1	2
B	200	∞	200	100	67,7	50		1	0,36	1
C	150	∞	150	75	50	37,5		1	0,27	1
D	90	∞	90	45	30	22,5		1	0,16	1
E	10	∞	10	5	3,3	2,5		1	0,02	1
Suma	1000							6	1,8	6

que supone una violación de la cuota. Como se refleja en las dos últimas columnas de la tabla, el ajuste de los cocientes disminuye su valor en al menos una parte entera. Este reparto es inconcebible para una fórmula de cuota y restos mayores, simple o compuesta que sea

La identificación de las fórmulas de divisores como un tipo de fórmula de cuota, aunque bastante forzada, es posible sólo si pensamos en las fórmulas de divisores como fórmulas compuestas de un número indeterminado de cuotas dentro de un recorrido. Sin embargo, mantener la analogía cuando pasamos a fórmulas de divisores no proporcionales, en los que $c > 1$, es simplemente una equivocación, pues el divisor es siempre demasiado pequeño como para asemejarse a una cuota propiamente dicha.

4.5. Divisores y sesgo en la distribución de escaños

Es evidente que de los divisores-cuota se predica la misma "*paradoja de las cuotas altas*" *que de las cuotas propias*. Menores divisores benefician más a los partidos mayores: mayores divisores dispersan los escaños, menores divisores los concentran. Nuevamente, podemos observar en el cuadro 4.4 que, de forma análoga a lo que sucede con los métodos de cuota, el umbral de exclusión permanece constante, al menos siempre que los partidos son más que los escaños, mientras que el umbral de inclusión disminuye con el divisor X. En los ejemplos del cuadro 4.4 tanto el umbral de exclusión como el umbral de inclusión varían en sentido inverso al tamaño de la cuota.

El valor preciso del divisor efectivo en cada problema es variable, por lo que no es un buen asidero para intentar ordenar las fórmulas con el fin de comparar sus efectos. Sin embargo, el término c de ajuste en el criterio de divisores $c(E)$ en los que se basa cada una de las fórmulas constantes ofrece un modo sencillo y natural de ordenarlas. Cuanto mayor es el término de ajuste c, más parece favorecer el reparto de escaños al partido mayor, pues más concentrados aparecen los escaños en el primer componente de **E**. De modo inverso, cuanto menor es el término c, más favorece el reparto a los partidos menores, pues más dispersos aparecen los escaños entre los componentes de **E**.

El mínimo término de ajuste no negativo es $c=0$; D+0 da lugar a una distribución máximamente igualitaria de seis escaños entre cinco partidos. A mayores valores de c en el criterio de ajuste, más se concentran los escaños en el primer partido, que, en este caso, tiene la mayoría absoluta de los votos. Con la fórmula Imperiali, la mayoría obtiene todos los escaños menos uno. Con la fórmula D+3, la mayoría obtiene todos los escaños. Cualquier criterio de ajuste $c \geq 2{,}86$ da lugar a un reparto mayoritario para el vector **V** del cuadro 4.4. Si pensamos en una fórmula en la que el término de ajuste tiende a infinito, D+∞, entonces obtenemos la fórmula mayoritaria simple, que siempre y en todo caso asigna el conjunto de los escaños a la mayoría.

Ejemplos como los presentados en el cuadro 4.1 pueden hacer pensar que las fórmulas más favorables a los partidos menores son más proporcionales y viceversa, pues, en dicho ejemplo, el indicador D de desviación de la proporcionalidad disminuye cuando el término de ajuste es menor. Sin embargo, la segunda serie de ejemplos (cuadro 4.4) deja claro que esta apreciación, nada infrecuente, es un error. La desviación de la proporcionalidad disminuye monótonamente con c hasta la fórmula Sainte-Lagüe, pero vuelve a aumentar con la fórmula Adams. La fórmula Adams y la fórmula mayoritaria son fórmulas que se desvían de la proporcionalidad perfecta en sentidos opuestos, sesgando el resultado en favor de la mayoría o de las minorías (aunque la fórmula Adams sólo lo hace cuando el sesgo es inevitable). Los indicadores de desviación, como D, no pueden reflejar esa polaridad. En este ejemplo, el reparto mayoritario da lugar a una desviación agregada $D=45$ y la fórmula Adams da lugar a $D=25$, pero su posición en la escala de proximidad a la proporcionalidad no nos informa sobre el hecho de que ambas fórmulas son, en realidad, extremos opuestos de fórmulas de divisores (divisores con término negativo aparte).

A partir de ejemplos como los de 4.4 es posible argumentar que la fórmula de Sainte-Laguë es la más proporcional. La fórmula más proporcional, idealmente, sería aquella que no introdujese sesgos de ningún tipo, ni en favor de los partidos mayores ni en favor de los menores. La fórmula de Sainte-Lagüe, al redondear los cocientes de modo ordinario, es una buena candidata a ocupar el puesto. Sin embargo, la conclusión esencial es que, con independencia de si alguna fórmula merece el título de no sesgada, en cualquier fórmula de divisores constantes, cuanto mayor sea el término de ajuste c, mayor el premio para la mayoría; y cuanto menor sea el término de ajuste, menor el premio, llámese castigo si se quiere.

4.6. Fórmulas igualitarias

Con la técnica de los divisores es posible inventar fórmulas con un sesgo favorable a las minorías más pronunciado aún que el presente en la fórmula Adams; son las fórmulas de tipo igualitario. Las fórmulas de tipo igualitario son una construcción que sólo tiene interés como posibilidad teórica, ya que equivalen al reparto igual de una parte de los escaños, seguido de la distribución, mediante una fórmula proporcional, de otra parte de los mismos. Es decir, las fórmulas de tipo igualitario resumen en una única función la distribución de escaños con un requisito previo de asignación mínima, que es aquello que a menudo encontramos en los sistemas de prorrateo de representantes entre circunscripciones.

Las fórmulas igualitarias pueden construirse con criterios de divisor negativo constante. Un criterio de divisor negativo constante es una regla de ajuste $c(E)$ monótona creciente con la forma $c(E)=E+c$ definido para todos los enteros $E \geq 0$ donde c, el término de ajuste, es un número real negativo $-(\lfloor M/p \rfloor -1)/p < c < 0$, donde $\lfloor M/p \rfloor$ se lee como el (mayor) entero menor o igual que la fracción M/p. Recuérdese que el ajuste $c=0$ de un cociente es el primer entero mayor del mismo, $[z]_0=\lceil z\rceil$, de manera que todas las partes no enteras, hasta la mínima fracción, obtienen un escaño; con un ajuste negativo todas las partes no enteras obtienen más de un escaño. Un ajuste negativo de un cociente siempre es un número mayor que el menor entero mayor que el cociente, de manera que $c(E)<E$. Por ejemplo, el criterio de ajuste de la regla D-1 es $c(E)=E-1$. Con esta regla, un partido recibe E escaños si y solo si

$$E_i-2 \leq V_i/X \leq E_i -1.$$

Este método es la imagen especular de la fórmula Imperiali de divisores (D+2). Cada circunscripción (o "partido") obtiene tantos escaños como los equivalentes al *segundo* entero mayor que el cociente V_i/X. Esta fórmula es equivalente a distribuir un escaño a cada uno de los p partidos y asignar los restantes $M-p$ escaños por el método Adams. El algoritmo natural para encontrar un divisor D-1 es dividir los votos de los partidos por 0-0-1-2-3...M-2 y buscar el M-ésimo mayor cociente.

Si la magnitud es lo suficientemente grande, en relación al número de partidos, el término de ajuste puede decrecer bastante. He aquí un ejemplo de distribución con fórmula aún más igualitaria que la anterior: sea el electorado **V**:[550, 240, 210], una circunscripción $M=12$ y la fórmula D-2, basada en $c(E)=E-2$. Para un valor de X como, por ejemplo, $X=230$, se obtiene $V_1/X=2,39$, $V_2/X=1,04$, $V_3/X=0,91$; ajustados los cocientes por el criterio de término constante $c=-2$, obtenemos $[V_1/X]_c=5$, $[V_2/X]_c=4$, $[V_3/X]_c=3$. Luego $F(\mathbf{V},12)=\mathbf{E}$:[5,4,3]. La fórmula se caracteriza por la desigualdad

$$E_i-3 \leq V_i/X \leq E_i -2;$$

un divisor X para esta fórmula puede encontrarse con el algoritmo 0-0-0-1-2-3, etc. Cada partido obtiene siempre tres escaños como mínimo.

Podría pensarse que es un prurito analítico intentar crear una fórmula con nombre propio para lo que no es sino una fórmula común precedida de un requisito de asignación mínima de escaños. Pero debe notarse que la fórmula Adams es equivalente al método que consiste en distribuir un escaño a cada partido y $M-p$ escaños por el método D'Hondt. Sin embargo, a nadie se le ha ocurrido decir que no se trate de una verdadera fórmula. También puede decirse, por cierto, que la fórmula D-1 es equivalente a distribuir dos escaños a partes iguales y $M-2p$ escaños empleando la regla D'Hondt; que la fórmula D-2, distribuye tres a todos por igual y asigna los restantes con esa misma regla; y así sucesivamente.

Muchos otros ejemplos de fórmulas igualitarias no tienen un término de ajuste entero. Por ejemplo, D-0,5 es la fórmula que emplea el criterio $c(E)=E-0{,}5$ y distribuye un escaño para cada partido y $M-p$ mediante la fórmula Sainte-Laguë. Puede encontrarse un divisor D-0,5 empleando el algoritmo 0-0,5-1-2... La fórmula se caracteriza por la desigualdad

$$E_i-1{,}5 \leq V_i/X \leq E_i -0{,}5.$$

Todas las reglas en las que el término de ajuste se encuentra en el intervalo $-1<c\leq 0$, es decir, la fórmula Adams incluida, garantizan un escaño a cada parte, por lo que se encuentran limitadas a un dominio tal que $p\leq M$; todas las reglas en las que el término de ajuste se encuentra en el intervalo $-2<c\leq -1$ garantizan dos escaños a cada parte, por lo que su limitación consiste en que el número de contendientes sea tal que $2p\leq M$; y así sucesivamente. La limitación para las fórmulas igualitarias, incluyendo como caso especial a la fórmula proporcional más igualitaria o Adams, es $mp\leq M$, donde m, el número mínimo de escaños, que suele presentarse como requisito previo en los sistemas de prorrateo, es igual a uno más el entero mayor o igual del valor absoluto del

término de ajuste, cuando dicho término es igual o menor que cero: $m=1+\lfloor |c| \rfloor$ y $c \leq 0$.

El valor mínimo extremo del término de ajuste c es mayor que $-(M-1)/p$, que cobra distintos valores dependiendo de la relación entre p y M. Si M/p es un entero, éste es el número máximo de escaños que se puede garantizar a un partido en una distribución de tipo igualitario es la parte alícuota de los representantes, $m=M/p$. Si M no es divisible entre p, entonces el valor máximo de m se encuentra entre la parte alicuanta $(M-1)/p$, cuando, por así decirlo, sobre un escaño para completar un reparto igualitario perfecto, y la parte alicuanta $(M-p+1)/p$, cuando fata un escaño, o sobra un partido, para lo mismo. La regla D$-(\lfloor M/p \rfloor -1)$ puede caracterizarse como la que persigue un divisor lo suficientemente grande como para que para cada partido i sea cierto que

$$E_i - \lfloor M/p \rfloor \leq V_i/X \leq E_i - \lfloor M/p \rfloor + 1,$$

por lo que todos los partidos obtienen siempre $\lfloor M/p \rfloor$ y algunos partidos pueden obtener $\lfloor M/p \rfloor + 1$ escaños. Nótese que, en la igualdad perfecta, para todo partido es cierto que $E_i=M/p$, por lo que el cociente de los votos y el divisor es siempre cero, o el divisor es infinito: $X \to \infty$.

En el cuadro 4.5 se muestran ejemplos de distribuciones de escaños con fórmulas igualitarias, contrastadas con fórmulas de término de ajuste no negativo (proporcionales y mayoritarias). De hecho, en la tabla aparecen todas las distribuciones de doce escaños que son posibles a partir de un vector de votos **V**: [550, 240, 210] y una fórmula de divisores. Puede haber infinitas fórmulas que produzcan un mismo resultado, las fórmulas que se emplean en la tabla son sólo un ejemplo; pero no existen resultados distintos de los nueve vectores $\mathbf{E}^1$ a $\mathbf{E}^9$.

El resultado estrictamente igualitario se alcanza con un criterio de ajuste $c(E)=E-3$; téngase en cuenta que, en este problema, éste es el valor mínimo posible del término negativo de ajuste: $-(\lfloor M/p \rfloor -1)=3$. Puesto que la igualdad es perfecta, el divisor es infinito. De otro lado, el resultado estrictamente mayoritario puede alcanzarse con un criterio de ajuste $c(E)=E+9$. Tanto la igualdad perfecta como la "mayoría perfecta" son resultados de fórmulas electorales, aunque existe una asimetría entre ambos polos: la mayoría perfecta siempre es un resultado posible de una fórmula, la igualdad perfecta sólo cuando los escaños son divisibles entre los partidos.

Por último, vale la pena subrayar que la tabla vuelve a transmitir el mensaje de que, si bien la desviación de la proporcionalidad tiende a ser mayor en los resultados a medida en que el sesgo es más favorable a los partidos mayores, la desviación también es posible con un sesgo igualitario, y puede ser considerable.

Cuadro 4.5. Distribuciones de doce escaños en un sistema de tres partidos

V: [550, 240, 210]	Desviación	Divisor	Fórmula (Clave D+*c*)		Tipo
E^1: [4, 4, 4]	0,217	$X \to \infty$	D-3		Tipo igualitario
E^2: [5, 4, 3]	0,133	X=240	D-2		
E^3: [6, 3, 3]	0,050	X=137,5	D-1		
E^3: [6, 3, 3]	0,050	X=105	D+0	Adams	Tipo proporcional
E^4: [7, 3, 2]	0,043	X=78,6	D+1	D'Hondt	
E^5: [8, 2, 2]	0,117	X=61	D+2	Imperiali	Tipo mayoritario
E^6: [9, 2, 1]	0,200	X=45,8	D+4		
E^7: [10, 1, 1]	0,283	X=35	D+6		
E^8: [11, 1, 0]	0,367	X=30	D+8		
E^9: [12, 0, 0]	0,450	X=27,5	D+9		
E^9: [12, 0, 0]	0,450	$X \to 0$	D+∞		

4.7. Recapitulación

Las fórmulas electorales de divisores se basan en distintos criterios de ajuste para los cocientes entre el voto de los partidos y el divisor, un número escogido de entre aquéllos que hacen posible que, dada la magnitud electoral, todos los escaños sean distribuidos respetando el criterio de ajuste en cada caso. Los criterios de ajuste pueden ser o no constantes. Los criterios de ajuste constantes son los habituales en las fórmulas electorales que se emplean en los sistemas de competición partidista. Los criterios de ajuste pueden conducir o no a fórmulas proporcionales, en el sentido mínimo del criterio general de proporcionalidad.

El divisor final de un reparto con estas fórmulas guarda cierto parecido con las cuotas, parecido que se oscurece cuando se intenta entender el funcionamiento de estos métodos a partir de sus algoritmos de cálculo, pero la técnica de las fórmulas de divisores impide hablar sin ambigüedad de algo equivalente a la cuota en estas fórmulas. Las cuotas son rígidas, inviolables y, por ello, restringidas a su dominio de aplicación. En las fórmulas de divisores el valor exacto del divisor es, en la mayoría de los casos, irrelevante; lo importante es que facilite la división que se busca con el criterio concreto que caracteriza a la fórmula. De cada criterio de ajuste en una fórmula de divisores se siguen unos valores máximo y mínimo que el divisor puede tomar en cada problema de distribución de escaños. Dichos divisores máximo y mínimo son los que se debe comparar, si se desea, con las cuotas, como si fuesen las cuotas mayor y menor de una fórmula compuesta. Aunque la analogía es bastante débil, es lo más lejos que se puede llegar.

Las fórmulas de divisores son infinitas. Las fórmulas en las que el criterio de ajuste es constante pueden ordenarse por el tamaño del *término de ajuste*. El orden por el término de ajuste produce un orden paralelo al orden de las fórmulas de cuota por el tamaño de la misma, o, más precisamente, por el tamaño del modificador: cuanto mayor el modificador, mayor el sesgo hacia la mayoría. En las fórmulas de divisores constantes, cuanto mayor es el término de ajuste, mayor es el sesgo hacia la mayoría en el resultado de la fórmula. La fórmula no negativa más favorable a los partidos menores es la fórmula Adams. La fórmula más favorable a la mayoría es, lógicamente, la fórmula mayoritaria simple. La fórmula mayoritaria no es sino un caso límite, de fórmula de divisores, cuando el término de ajuste tiende a infinito, aunque se ha demostrado que, excepto si los dos primeros partidos son iguales, existe siempre una fórmula de término de ajuste finito que reproduce un resultado mayoritario.

Las fórmulas con criterio de divisor no constante son menos fáciles de ordenar. Por ejemplo, la media geométrica es siempre menor que la media aritmética, por lo que el divisor de la fórmula Hill-Hiuntington estará siempre entre el divisor de la fórmula Sainte-Laguè y el de la fórmula Adams. Sin embargo, no es posible ordenar estas tres fórmulas y, digamos, la fórmula danesa, de modo simultáneo. La media geométrica es a veces menor y a veces mayor que un tercio, que es el criterio de ajuste de la fórmula danesa.

Las fórmulas de divisores pueden clasificarse en igualitarias proporcionales y no proporcionales. Las fórmulas igualitarias son fórmulas peculiares, inexistentes en la práctica electoral (salvo bajo la especie de sistemas de prorrateo de escaños con requisito previo) que emplean criterios de divisores basados en términos negativos de ajuste. No son fórmulas proporcionales aquellas en las que el término de ajuste en el criterio de divisor constante es mayor o menor que la unidad. En el primer caso encontramos a las fórmulas mayoritarias, en el segundo caso a las igualitarias. No parece fácil responder a la pregunta acerca de cuál, entre las proporcionales, lo es más, pero es una pregunta que, en general, considero secundaria. Lo más importante es poder predecir los efectos de las fórmulas, la dirección y magnitud del sesgo. El distinto efecto de las fórmulas sobre los partidos según el tamaño relativo de los mismos es lo que nos interesa perseguir y entender.

CAPÍTULO CINCO

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y FUNCIONES DE UMBRAL: EL BIPARTIDISMO

5.1. Introducción

Este capítulo está dividido en dos grandes secciones de desigual extensión. En la primera de ellas se comienza por repasar parte del terreno conocido, los umbrales de representación de las fórmulas electorales, y por reseñar los primeros intentos de generalización de los umbrales de manera que puedan obtenerse las funciones completas de cada fórmula. En segundo lugar, dentro de esta primera sección, se propone la forma general de las funciones de umbral que se irán descubriendo a lo largo de este capítulo y el próximo.

Las funciones de umbral indican los límites dentro de los cuales pueden encontrarse los vectores que son resultado de una fórmula, dado el número de partidos y la magnitud electoral. Es decir, conocido el número de partidos, podemos determinar los votos que cada fórmula puede requerir como mínimo y como máximo para cada número de escaños. A partir de las funciones de umbral se pueden determinar también las funciones de pagos, que son las funciones que indican los escaños que un partido puede cosechar, en el mejor y en el peor de los casos, con sus votos. Una fórmula electoral es una función que asigna votos a escaños, conocida la distribución del voto; la función de pagos de una fórmula electoral asigna una "horquilla" de escaños a un partido cualquiera, el partido que podemos llamar de referencia, conocido el número de sus competidores, para cualquier distribución del voto entre los mismos.

Los intentos que se han efectuado hasta la fecha para determinar las funciones de umbrales se reducen, que yo sepa, a dos: Rae (1971) y Lijphart y Gibberd (1977). El segundo de ellos es preciso en lo que alcanza, pero carece de la suficiente generalidad, pues analiza las funciones de una en una, hasta cuatro, como si fueran individuos realmente peculiares. Ninguno sugiere las funciones de pagos propiamente dichas. Lo que aquí se propone son las funciones generatrices de todas las funciones de umbrales, basadas en el hecho de que todas las fórmulas electorales son variaciones de dos temas: las cuotas y los divisores. Esto no sólo tiene una considerable ventaja práctica, pues ahora podemos conocer de modo mecánico infinitas funciones de umbrales, sino que aclara de modo que juzgo definitivo algunas cuestiones importantes sobre el funcionamiento de las fórmulas. Creo que al poder verlas "todas juntas", me atrevo a decir que por primera vez, resultan inmediatas las semejanzas entre unas y otras, su parentesco con la proporcionalidad y, sobre todo, su parentesco con la fórmula mayoritaria.

En la segunda sección de este capítulo se exploran las funciones de umbrales en el caso especial del bipartidismo. La presencia de dos partidos simplifica considerablemente el problema de la representación y permite apreciar con especial nitidez las virtudes del enfoque que aquí se propone. Las fórmulas electorales son, en el dominio bipartidista, variaciones sobre un único tema, los divisores, pues las fórmulas de cuota o no están definidas o son idénticas a una fórmula de divisores. Todas las fórmulas electorales pueden ordenarse en un *continuo* entre la fórmula de reparto mayoritario simple y la fórmula de reparto igualitario simple.

El espacio de la representación lo forman dos ejes: los votos y los escaños. En las funciones de umbrales situamos a los votos necesarios y suficientes en las abscisas y al número de escaños en las ordenadas. Cuando invertimos las funciones, en las funciones de pagos, los escaños mínimos y máximos se sitúan en las abscisas y los votos en las ordenadas. La información es esencialmente la misma que en las funciones de umbrales, aunque hay algunas conclusiones interesantes que se derivan con más facilidad a partir de las funciones de pagos. Dentro de este espacio, la bisectriz indica siempre la proporcionalidad perfecta. La función de umbrales de la mayoría es una función plana, la función de umbrales de la igualdad es vertical; entre ambas, todas las funciones de umbrales se ordenan por su mayor o menor pendiente, que indica su tendencia más bien mayoritaria o más bien igualitaria.

El espacio de la representación también se puede "regionalizar", determinando así qué funciones son proporcionales, cuáles mayoritarias y cuáles igualitarias. También puede buscarse la fórmula que merezca el honroso título de no sesgada, aunque esto no debe confundirse con la clásica búsqueda de un orden para las fórmulas como mejores o peores aproximaciones a la proporcionalidad. La proporcionalidad no es una fórmula electoral, sino un criterio que algunas fórmulas electorales respetan. No es una fórmula, sino una región. La proporcionalidad *perfecta*, como prescripción universal para los resultados, no forma parte del continuo de las fórmulas.

El espacio de la representación puede ampliarse para incluir anti-fórmulas electorales, fórmulas que rinden menos escaños cuanto más votos se suman. Como un puro ejercicio analítico, se presentan también las funciones de estas anti-fórmulas. El objetivo es subrayar que las fórmulas electorales y no electorales son infinitas variaciones sobre un mismo tema.

Las funciones de umbrales (o, alternativamente, las funciones de pagos) permiten elaborar una especie de tabla periódica general para todas las fórmulas electorales constantes (y, de hecho, también para las anti-fórmulas), al menos para el caso del bipartidismo. Creo que esta conclusión es el resultado más importante de este capítulo. Una tabla periódica permite enfocar correctamente las peculiaridades de cada fórmula, permitiéndonos situarlas dentro de una serie en la que los elementos adyacentes las comparten hasta cierto punto. Permite también comprender cuándo se producen cambios cualitativos, cuándo empiezan los metales y terminan los no metales (o las fórmulas proporcionales y las mayoritarias).

Permite, por último, situar elementos en la tabla que no son conocidos "en la naturaleza" y describir sus propiedades.

Aunque la analogía con la tabla periódica de los elementos no es perfecta (sugerirlo sería una pretensión grotesca), creo que también permite describir la actividad de los estudios electorales como la de los químicos que se afanan en medir las reacciones de cada compuesto tomado por separado, sin encontrar pautas enteramente precisas. Se observan los resultados electorales "en la naturaleza", se producen ejemplos de laboratorio, a menudo complejos e ingeniosos, y se tabulan las mediciones. En no pocas ocasiones se encuentran pautas generales bastante convincentes e incluso, algunas de ellas, se retrotraen a principios deductivos, es decir, basados en propiedades abstractas de los procedimientos. No obstante, los principios generales de clasificación son siempre aproximados.

Una excepción más que notable es el trabajo de Balinski y Young (1982), que es, en prácticamente todos los sentidos, muy superior al que aquí se presenta. Sin embargo, su enfoque deductivo se centra en una relativamente pequeña región del espacio de la representación: las fórmulas de divisores de representación proporcional. Por lo que a estas fórmulas se refiere, su trabajo prácticamente podría considerarse definitivo (aunque, en realidad, no exploran más que las cinco fórmulas tradicionales de divisores, sugiriendo tan sólo que su número es infinito). Pero en ningún momento tratan de encontrar la continuidad, y la discontinuidad, entre estas fórmulas y las infinitas fórmulas posibles, por lo que, dentro de su esquema, es inconcebible que las fórmulas proporcionales sean miembros de una misma familia que la fórmula mayoritaria simple. En mi opinión, el instrumento del que carecen y que les impide avanzar más es el de las funciones de umbrales de las fórmulas. Es para mí increíble que hayan rodeado la cuestión sin llegar a ella. De hecho, su única observación sobre los umbrales, exactamente al final del libro, está completamente desconectada del resto de su análisis y, lo que es más sorprendente, está equivocada (Balinski y Young 1982; 153-154). Posiblemente se trata del único error positivo (aparte de las ausencias) del mejor libro sobre fórmulas de representación proporcional que existe. Lo único que puede explicar que su investigación dejara de lado estas funciones es que su dieta de ejemplos proviene de los sistemas de prorrateo de escaños, donde la pregunta sobre cuántos escaños crece un partido con sus votos no es empíricamente acuciante.

Precisamente, dos de las funciones analizadas por Balinski y Young obligan a hacer algunas salvedades importantes en la tabla clasificatoria. Las fórmulas proporcionales que emplean criterios de divisores variables (la media geométrica y la media armónica) no pueden reducirse a una expresión analítica general que conecte umbrales con escaños en el caso general de la competición multipartidista. En el caso especial del bipartidismo, veremos que las funciones de umbrales sí existen, pero solo pueden ordenarse parcialmente en la tabla de las funciones constantes.

Por lo demás, a partir del estudio de las funciones de umbrales y su disposición en una tabla resultan transparentes los dos efectos mecánicos esenciales de un sistema electoral elemental: la fragmentación y la proporcionalidad en la distribución de los escaños. Aquí hay que subrayar la palabra *sistema* electoral. Un sistema electoral se compone de magnitud y fórmula. En este capítulo comparamos fórmulas con una magnitud constante y con un número de partidos fijado en dos. Pero es un hecho conocido que la magnitud es decisiva en los sistemas electorales, tanto que, si la magnitud es uno, todos los sistemas son iguales. Las fórmulas electorales tienden a concentrar o a dispersar los escaños entre los partidos, pero no puede dispersarse lo que no puede dividirse. Dada una magnitud electoral, las fórmulas son responsables del grado de fragmentación en el reparto de escaños (la fragmentación "parlamentaria"), pero un escaño no puede fragmentarse y dos escaños sólo admiten un grado de fragmentación. Dada una fórmula electoral, la magnitud electoral es responsable del grado de proporcionalidad en los resultados: son más proporcionales cuanto mayor la magnitud, aunque no de modo lineal sino como tendencia, al menos hasta la magnitud perfecta.

I. UMBRALES DE REPRESENTACIÓN Y FUNCIONES DE UMBRALES

5.2. Umbrales de exclusión y de inclusión

En toda circunscripción electoral existen dos umbrales que son determinantes para comprender las posibilidades de acceso a la representación de los partidos o candidatos en la misma. Uno de ellos nos indica el porcentaje de votos por debajo del cual es imposible lograr la mínima representación, mientras que el otro señala la fracción de votos por encima de la cual es imposible no obtenerla.

El primero de estos umbrales está identificado al menos desde Rokkan (1971), quien lo llamó umbral de representación, aunque también es conocido como umbral de inclusión, término que voy a preferir en estas páginas. Para la fórmula D'Hondt de reparto de escaños (pero no para otras) viene dado por

$$U_{IN} = 1/(M+p-1).$$

Donde M representa la magnitud del distrito y p el número de partidos o listas que compiten por los M escaños.

La primera determinación del segundo de estos umbrales se atribuye a Rae, Loosemore y Hanby (1971). A este umbral lo llamamos umbral de exclusión. En el caso de la fórmula D'Hondt y de algunas de las fórmulas más comunes, el umbral es independiente del número de partidos y se corresponde con esta fracción:

$$U_{EX} = 1/(M+1).$$

En un distrito electoral en el que cuatro partidos compiten por tres escaños, que se distribuyen de acuerdo con la fórmula D'Hondt, el umbral de inclusión resulta ser del 16,7% de los votos. En ese mismo distrito, el umbral de exclusión se situaría en el 25% de los votos, cualquiera que fuese el número de partidos. El umbral de inclusión señala el porcentaje mínimo de votos con el cual un partido, en las mejores circunstancias, puede obtener un escaño en un distrito, dadas la fórmula (D'Hondt en el ejemplo), el número de escaños y el número de competidores. El umbral de exclusión indica el porcentaje máximo de votos con el que un partido puede, en las peores circunstancias, quedarse sin representación. O, lo que es lo mismo, el umbral cuya superación le asegura un escaño en cualquier caso. En otros términos: superar el umbral de inclusión es *condición necesaria* (pero no suficiente) para obtener un escaño, mientras que superar el umbral de exclusión es *condición suficiente* (pero no necesaria) para lo mismo. Dicho todavía en otros términos: un partido con una fracción de votos igual al umbral de inclusión obtendrá un escaño como máximo; un partido con una fracción de votos por encima del umbral de exclusión obtiene un escaño como mínimo.

Lijphart y Gibberd (1977), corrigieron diversos errores en Rae *et al.*(1971) y en Rae (1971) y determinaron los umbrales de inclusión y de exclusión para cuatro fórmulas electorales. En este importante artículo, siguiendo una propuesta de Rae (1971), generalizaron la idea de umbral para cualquier número de escaños que pueda obtener un partido, introduciendo las nociones de votos mínimos y máximos. Gallagher (1992), construyendo sobre la contribución de estos autores, determina, en un trabajo prácticamente exhaustivo, los umbrales de inclusión y de exclusión de nueve fórmulas de reparto de escaños.

El cuadro 5.1 presenta los umbrales de exclusión e inclusión de una muestra de quince de las muchas fórmulas de reparto de escaños que existen o que podemos inventar, proporcionales y no proporcionales. La única ausencia importante, entra las fórmulas comunes, es la llamada fórmula de Sainte-Laguë modificada, que es una fórmula anómala que debe ser tratada aparte. Las seis primeras fórmulas son variedades de métodos de cuota y restos mayores, incluyendo el sistema de voto único no transferible. La segunda mitad de la tabla ofrece ejemplos de umbrales para fórmulas de divisores. El método mayoritario es, ya lo hemos visto, un caso límite de las fórmulas de divisores. Pero también es un caso límite de toda fórmula de reparto de escaños cuando la magnitud electoral es uno. Nótese que los umbrales de exclusión y de inclusión de *todas* las fórmulas se reducen a ½ y a $1/p$, respectivamente, cuando la magnitud de los distritos es la unidad, excepto aquellas que no están definidas para ese caso.

Cuadro 5.1. Umbrales de representación de distintas fórmulas electorales.

Fórmula	Umbral de exclusión		Umbral de inclusión
	$p \geq M+1$	$p \leq M+1$	
VUNT[1]	$1/(M+1)$	$(1/(M+1), 0, \varnothing)$	$(0, 1/p, \varnothing)$
"Cuota larga"	$1/(M+1)$	$(p-2)/(p(M-1)$	0
RM-Hare	$1/(M+1)$	$(p-1)/(pM)$	$1/(pM)$
RM-Droop	$1/(M+1)$	$1/(M+1)$	$2/(p(M+1))$
RM-Imperiali	$1/(M+1)$	$1/(M+1)$	$3/(p(M+2))$
RM-Imperiali reforzada	$1/(M+1)$	$1/(M+1)$	$4/(p(M+3))$
Adams, Hill, Dean[2]	$\varnothing$	$(\varnothing, 0)$	$(\varnothing, 0)$
Danesa	$1/(M+1)$	$1(3M-2p+3)$	$1/(3M+p-3)$
Sainte-Laguë (pura)	$1/(M+1)$	$1/(2M-p+2)$	$1(2M+p-2)$
D'Hondt	$1/(M+1)$	$1/(M+1)$	$1/(M+p-1)$
Imperiali (divisores)	$2/(M+3)$	$2/(M+3)$	$2/(M+2p-1)$
Mayoritaria simple	$1/2$	$1/2$	$1/p$

Notas: 1. La fórmula igualitaria VUNT no está definida en el caso en el que $p<M$. Si $p=M$, el umbral de exclusión es nulo. Si $p=M+1$ el umbral de exclusión es el umbral ordinal. El umbral de inclusión es nulo en los casos en los que la fórmula está definida, excepto si $M=1$, elevándose a $1/p$. 2.Estas fórmulas no están definidas para $p>M$.

El cuadro nos recuerda que la magnitud del distrito determina por sí misma el umbral de exclusión en la mayoría de los casos; es decir, en general, de la magnitud de los distritos se sigue inmediatamente la condición suficiente para obtener la *mínima* representación. Todo método de representación proporcional ofrece a los partidos un umbral de exclusión idéntico a $1/(M+1)$ si su número es mayor que el número de escaños a repartir ($p \geq M+1$).

Dicho de otro modo, las fórmulas en las que el umbral de exclusión es más elevado no son fórmulas de reparto proporcional. El hecho de que el umbral de exclusión dependa de la magnitud y no discrimine entre las fórmulas proporcionales se sigue de que todas respetan un principio ordinal de exclusión. Ningún partido queda excluido si no es posible ordenar los partidos de mayor a menor (de más a menos preferido por el conjunto de votantes) de manera que haya M partidos mayores (mejor clasificados en la preferencia colectiva). Si un partido obtiene una fracción de votos mayor que $1/(M+1)$, entonces no puede situarse como el partido con el ordinal $M+1$, cualquiera que sea el voto obtenido por los demás partidos. Obviamente, el sistema de voto único no transferible hace de este principio su única guía de acción. No es una fórmula proporcional, pero este hecho muestra su parentesco con aquéllas.

La fracción $1/(M+1)$ puede llamarse *umbral ordinal* o estructural. Es una variable puramente institucional. Esta fracción marca una situación de posible empate entre partidos que es relevante para todas las fórmulas proporcionales y que ninguna fórmula puede solucionar, dando lugar a múltiples resultados. Encontramos este empate cuando $M+1$ partidos compiten por M escaños y todos tienen idéntico número de votos. Sólo una pequeña perturbación en la distribución del voto, sustrayendo un voto a uno de los partidos, resuelve el empate.

El umbral de exclusión de los métodos no proporcionales, de los que la fórmula de divisores Imperiali es un ejemplo, es superior al umbral ordinal. El umbral ½ es el máximo umbral posible en un método de reparto en el que no sea mejor tener menos votos que los rivales, más bien que lo contrario, es decir, el máximo umbral de una fórmula electoral.

Con algunas fórmulas, si el número de partidos que compiten es menor o igual a la magnitud, el umbral de exclusión decrece con dicho número. Esto es cierto en todas las fórmulas proporcionales de divisores excepto en D'Hondt y Adams, que son las alternativas límites dentro de la proporcionalidad. También es cierto en todas las fórmulas de cuota en las que la cuota es menor que la cuota Droop. Los valores de estos umbrales vienen dados por la segunda columna de la tabla. Nótese que cuando el número de partidos es exactamente

M+1, las fórmulas de las dos columnas arrojan idéntico resultado (1/[M+1]). Aunque resulta menos inmediato para la intuición, estos umbrales se computan, igualmente, en el punto en el que las diversas fórmulas no pueden decidir cómo distribuir p-1 escaños entre los p partidos contendientes.

El umbral de inclusión no es una variable puramente institucional, dado que su valor se incrementa o decrece con el número de partidos. El umbral de inclusión de las fórmulas se calcula en el punto en el que cada una de ellas no puede decidir sobre cómo asignar un escaño por el que compiten todos los p partidos. El umbral más alto posible para una fórmula electoral es el del método mayoritario y se produce en la igualdad de voto entre todos los partidos (v_i=1/p). El umbral de inclusión más alto de un método de reparto proporcional es el umbral de la fórmula D'Hondt. El umbral mínimo posible es cero, que es el caso de la fórmula de "cuota larga" o la fórmula Adams, entre otras.

Los umbrales de exclusión y de inclusión han demostrado ser herramientas fundamentales en los estudios electorales, tanto por sí mismos como en la medida en que son la base del *umbral efectivo* de los sistemas electorales, concepto operacionalizado a partir de los anteriores por Lijphart (1994) y que se ha mostrado muy útil en la ciencia política comparada. Es natural preguntarse por la posibilidad de extender los umbrales a fin de conocer sus valores para cada número de escaños, no simplemente el primero. Así lo hicieron Rae, Loosemore y Hanby (1971) y Lijphart y Gibberd (1977), quienes determinaron con precisión la función de umbrales para cuatro fórmulas electorales. Sin embargo, la investigación sobre estas funciones se ha detenido donde ellos la dejaron.

5.3. Funciones de umbral

Lijphart y Gibberd (1977; 230) introducen el término "función de pagos de las fórmulas electorales" para designar lo que en estas páginas se denomina funciones de umbral. Sus funciones se construyen "en términos de las proporciones máximas y mínimas del voto que un partido puede tener que pagar para ganar un cierto número de escaños". Estos autores siguen la pista abierta por Rae, Hanby y Loosemore (Rae 1971; 193) en su generalización de los umbrales de exclusión e inclusión de algunas fórmulas para cualquier número de escaños más allá del primero. Los votos mínimos para alcanzar *E* escaños son el umbral de inclusión para el escaño *E*-ésimo. Los votos máximos con los que se pueden lograr *E* escaños son el umbral de exclusión para alcanzar *E*+1 escaños. Las funciones de pagos propiamente dichas se construyen, como veremos, a partir de las funciones de umbral. Con una determinada proporción de los votos, las funciones de pagos nos indican cuántos escaños pueden esperarse como máximo y como mínimo.

Construir las funciones de umbral en términos de votos mínimos y máximos puede ser muy útil, en la medida en que ayuda a la intuición, si lo que queremos examinar es la horquilla de votos con los que un partido puede no cambiar el número de sus escaños. Esto también puede indicarnos las desviaciones máximas y mínimas respecto a la norma de la proporcionalidad perfecta. Una forma alternativa de construir las funciones es hacerlo de manera que indiquen cuántos son los votos que un partido debe alcanzar como mínimo (condición necesaria) y como máximo (condición suficiente) para lograr una misma cifra de escaños. Se trata, en definitiva, de construir la función de votos necesarios y suficientes. Los votos necesarios, obviamente, son los votos mínimos y podemos designarlos de cualquiera de las dos maneras. Los votos suficientes son iguales a los votos máximos, pero retrasada la variable *E* (el número de escaños) en una unidad, de manera que los votos máximos para *E* escaños son los votos suficientes para *E*+1 escaños. La función de votos máximos está definida para $E=0$, mientras que la función de votos suficientes sólo se encuentra definida para $E \geq 1$. El lenguaje de los votos máximos y el de los votos suficientes simplemente nos sitúa en las dos caras de un mismo umbral. Los votos máximos para tener cero escaños son el umbral de exclusión del primer escaño. El lenguaje de los votos máximos nos sitúa del lado desde el que convencionalmente interpretamos el umbral de exclusión, como línea más allá de la cual la probabilidad de obtener un escaño es uno.

La diferencia entre el enfoque de Lijphart y Gibberd (1977) y el que aquí se presenta es su generalidad. Lijphart y Gibberd deducen una a una, por un procedimiento complicado, pero exacto, las funciones de umbrales de cuatro fórmulas electorales: Hare, Sainte-Laguë, Sainte-Laguë modificado y D'Hondt, corrigiendo de paso algunos notables errores en Rae y sus colaboradores (1971). Lo que aquí se persigue es la función generatriz de todas las funciones de umbrales, de manera que se puedan determinar los umbrales de *cualquier* fórmula electoral.

5.3.1. Forma general de las funciones de umbral

Para determinar los votos necesarios o suficientes necesitamos conocer cuáles son los puntos en los que se pueden producir empates máximamente competitivos. Recuérdese que los empates por la inclusión son aquéllos que, implicando a todos los partidos, pueden resolverse añadiendo un voto a uno de ellos, mientras que los empates por la exclusión pueden resolverse sustrayendo un voto a uno de los partidos. En la primera situación, el partido que obtiene el escaño consigue el máximo provecho posible de sus votos, pues logra un escaño con la menor cantidad de votos con que es posible obtenerlo. En la segunda situación, el partido que pierde el escaño obtiene el peor resultado posible con sus votos, pues deja de recibir un escaño con la máxima cantidad de votos con la que un partido se puede ver privado del mismo.

Para los métodos de cuota, dado que ésta es invariante, lo que buscamos son el menor resto que puede quedar sin un escaño añadido a la cuota inferior y el mayor resto que puede quedar excluido para un escaño añadido a la cuota inferior. Buscamos, en definitiva, el valor mínimo de la fracción r (r_{MIN}) que puede hacer que un partido alcance su cuota superior, así como el valor máximo de r (r_{MAX}) que puede impedir que un partido alcance su cuota superior (o bien, leída la fracción como un umbral, la que garantiza que lo alcanza) para cada fórmula basada en q_n, cada magnitud M y cada número de competidores p. Así, para todo partido i tal que $v_i / q_n = S_i + r_i$, si $r_i < r_{\text{MIN}}$, entonces $E_i = S_i$, y si $r_i > r_{\text{MAX}}$, entonces $E_i = S_i + 1$. De este modo, y a partir de la desigualdad

$$E_i - 1 + r \leq v_i / q_n \leq E_i + r,$$

pueden establecerse las funciones de votos mínimos y máximos, o de votos necesarios y suficientes,

$$v_{\mathrm{MIN}}(E) = (E - 1 + r_{\mathrm{MIN}})q_n \qquad v_{\mathrm{NEC}}(E) = v_{\mathrm{MIN}}(E)$$
$$v_{\mathrm{MAX}}(E) = (E + r_{\mathrm{MAX}})q_n \qquad v_{\mathrm{SUF}}(E) = (E - 1 + r_{\mathrm{MAX}})q_n.$$

Para los métodos de divisores constantes, lo que buscamos son los valores mínimos y máximos del divisor *efectivo* x (x_{MIN} y x_{MAX}) para cada fórmula F_c basada en una regla de ajuste constante $c(E)$, cada magnitud y cada número de partidos, que pueden dar lugar a que un partido obtenga o pierda E escaños. La fracción mínima y máxima que puede recibir un escaño añadido a su "cuota" es invariante (c), pero es una fracción tomada sobre una "cuota" variable V/X (o $1/x$). El divisor x_{MIN} es el divisor efectivo en caso de empate por la inclusión de todos los partidos, lo que constituye la mejor situación posible para el ganador. El divisor x_{MAX} es el divisor efectivo en caso de empate por la exclusión del mayor número posible de partidos, lo que constituye la peor situación posible para el perdedor. Son los divisores efectivos mayores y menores. Recuérdese que el divisor puede ser un número cualquiera dentro de un recorrido de divisores que pueden resolver un mismo problema de distribución en conformidad con un mismo criterio $c(E)$. El número más bajo de cualquier recorrido de divisores (x^-) es mayor que el divisor máximo x_{MAX} y el número más alto de cualquier recorrido (x^+) nunca es menor que el divisor mínimo x_{MIN}. Puede haber divisores empíricos mayores que el divisor máximo, pero siempre contienen al divisor máximo en su recorrido. Puede haber divisores menores que el divisor mínimo, pero como parte de un recorrido que contiene al divisor mínimo. No puede haber recorridos que contengan ambos límites a la vez, salvo que el divisor máximo coincida con el mínimo, como sucede en la competición bipartidista, pero puede haber recorridos de divisores que no comprendan a ninguna de las dos posibilidades extremas. Conocido los valores límite, máximo y mínimo, de los divisores efectivos, y a partir de la desigualdad

$$E_i - 1 + c \leq v_i / x \leq E_i + c,$$

pueden establecerse las funciones de votos mínimos y máximos, o de votos necesarios y suficientes,

$$v_{\text{MIN}}(E) = (E - 1 + c)x_{\text{MIN}} \qquad v_{\text{NEC}}(E) = v_{\text{MIN}}(E)$$
$$v_{\text{MAX}}(E) = (E + c)x_{\text{MAX}} \qquad v_{\text{SUF}}(E) = (E - 1 + c)x_{\text{MAX}}$$

Tanto el resto mínimo r_{MIN} como el divisor mínimo x_{MIN} son funciones de la magnitud, el número de partidos y, por supuesto, la fórmula (en qué tamaño de cuota q_n o qué regla de ajuste $c(E)$ se base la fórmula). Dados estos parámetros como constantes, los votos mínimos o necesarios son *funciones lineales* del número de escaños a los que aspira un partido. Tanto el resto máximo r_{MAX} como el divisor máximo x_{MAX} son funciones de la magnitud, el número de partidos y el tipo de fórmula, pero también del número de escaños a los que aspira el partido. Como veremos, dados los parámetros, los votos máximos y los votos suficientes no son funciones lineales del número de escaños a los que aspira un partido.

Los escaños que obtiene un partido con sus votos se determinan con certeza una vez que se conoce toda la distribución de apoyos entre los partidos. Las funciones de pagos permiten conocer la horquilla de escaños para un partido de referencia que tenga una cierta expectativa de votos, dada toda la información sobre F, M y p, comoquiera que se distribuya el voto entre los restantes partidos.

II. UN CASO ESPECIAL: LA COMPETICIÓN BIPARTIDISTA

5.4. Función generatriz de los umbrales

Con dos partidos, las fórmulas de cuota y restos mayores son idénticas a las fórmulas de divisores, aunque hay que tener en cuenta que sólo las cuotas del intervalo decisivo ($-1 \leq n \leq 1$) están definidas en el dominio de la competición bipartidista. La fórmula de Sainte-Laguë (D+0,5) es, en este dominio, equivalente a la fórmula de Hare (Q+0) de restos mayores: el único resto premiado, tras descontarse los votos equivalentes a las cuotas simples enteras de los partidos, necesariamente es mayor que la fracción ½ de la cuota, pues de lo contrario sería menor que el resto del contrincante. La fórmula D'Hondt (D+1) es ahora idéntica a la fórmula Droop de restos mayores, pues, tras aplicar la cuota Droop (Q+1) en una competición bipartidista, todos los escaños son asignados por cuota y ningún resto puede recibir escaños. La fórmula Adams (D+0) equivale a la distribución de escaños por "cuota larga" y restos mayores (Q-1). La fracción menor que recibe escaños es ahora la fracción mínima, o cualquier resto, pues el número máximo de escaños que se asignan por cuota es $M-1$.

Todas las fórmulas basadas en cuotas dentro del intervalo decisivo pueden construirse como fórmulas de divisores en el caso del bipartidismo. Sin embargo, en el caso del bipartidismo pueden construirse fórmulas de divisores que no tienen equivalente alguno en la tecnología de las cuotas y restos mayores. Éstas son las fórmulas de divisores en los que la regla de ajuste $c(E)$ es tal que $c > 1$. Con dos partidos, podemos fijar simultáneamente la cuota y la fracción de la cuota que debe recibir escaños no asignados por cuota, pero si la fracción, esto es, el término de ajuste, es superior a un entero, no podemos leer las fracción como "resto" que recibe un escaño.

El hecho de que las fórmulas de cuota se puedan traducir a fórmulas de divisores, pero no a la inversa, no quiere decir, necesariamente, que el lenguaje de las fórmulas de divisores sea más fundamental. En el contexto del multipartidismo observaremos que las fórmulas de cuota y de divisores son simplemente intraducibles, lo que se reflejará en un problema de inconmensurabilidad parcial a la hora de ordenarlas. Este problema se simplifica notablemente en el bipartidismo, situación en la que todas las fórmulas electorales constantes están ordenadas.

La peculiaridad de la competición bipartidista es que los votos necesarios y suficientes para obtener un determinado número de escaños son los mismos. Por ejemplo, con la fórmula de Sainte-Laguë, el umbral de inclusión, o condición necesaria para obtener un primer escaño, se sitúa en la mitad de la cuota $(1/(2M))$, pero rebasar ese umbral es también condición suficiente para obtenerlo. El umbral de inclusión coincide con el de exclusión. Esta identidad se verifica para cualquier número de escaños, por lo que la función de votos mínimos coincide con la de votos suficientes. Esto no quiere decir otra cosa sino que el divisor máximo y mínimo son idénticos, $x_{MIN}=x_{MAX}$, o que cada fórmula produce un único divisor efectivo x_{MNMX} para cada problema de distribución entre dos partidos. El divisor empírico siempre puede ser un número cualquiera dentro de un recorrido, excepto en los puntos precisos en los que los partidos están empatados por un escaño, pues en éstos el recorrido se reduce a un único número. El divisor efectivo x_{MNMX} de las fórmulas electorales, en la competición bipartidista, es un número que está comprendido en todos los recorridos, es decir, un número que podría resolver cualquier problema de asignación de escaños entre dos partidos, comoquiera que se distribuyan los votos. El número de escaños de un partido de referencia puede predecirse así con toda certeza, y no dentro de una horquilla, a partir de sus votos, lo que no es precisamente una gran sorpresa, ya que los votos del segundo son conocidos a partir de los del primero.

El empate máximamente competitivo por la inclusión/exclusión, es decir, la situación en la que la fórmula electoral arroja dos valores **E** y **E'**, se da siempre que del cociente de ambos partidos por el divisor sea tal que pueda ajustarse o "redondearse" hacia un entero más tanto como hacia uno menos, de manera que los partidos se disputen ambos con una fracción igual a c el escaño marginal. Es decir, cuando $v_1/x_{MNMX}=E_1-1+c$, $v_2/x_{MNMX}=E_2-1+c$, $v_1+v_2=1$ y $E_1+E_2=M+1$. Se trata de la distribución del voto en la que, para cada uno de los partidos, el ajuste $[v_i/x_{MNMX}]_c$ tiene dos valores E_i-1 y E_i. La fórmula electoral es neutral con respecto a cuál de los dos partidos recibe E_i y cuál se contenta con E_i-1. El conjunto $F_c(\mathrm{v},M)$ para $\mathrm{v}:[v_1, v_2]$ está formado por $\mathbf{E}:[E_1, E_2-1]$ y $\mathbf{E}':[E_1-1, E_2]$ y debe existir un procedimiento anónimo para decidir entre los resultados. Por ejemplo, si el primer partido tiene el 90% de los votos, el segundo partido el 10%, los escaños a repartir son M=5 y la fórmula es D+0,5, el divisor es $x_{\mathrm{MNMX}}=1/5$ y tanto [5,0] como [4,1] son soluciones de la fórmula.

Para determinar el valor de la fracción divisor en una expresión analítica para cada valor de c y M, podemos sumar los cocientes v_i/x_{MNMX} de los dos partidos, de donde obtenemos $1/x_{\mathrm{MNMX}}= M-1+2c$, o bien

$$x_{\mathrm{MNMX}}= 1/(M-1+2c). \qquad (5.1)$$

Es fácil comprobar así que, con dos partidos, el método de divisores de Sainte Laguë (D+0,5) es idéntico a la fórmula Hare (Q+0), pues $x_{\mathrm{MNMX}}= q_0=1/M$; el método D'Hondt (D+1) es igual a la fórmula Droop (Q+1), pues $x_{\mathrm{MNMX}}= q_1 =1/(M+1)$; y el método danés (D+1/3) coincide con un método de cuota ligeramente alargada Q−1/3: $x_{\mathrm{MNMX}}= q_{-1/3}=1/(M-1/3)$. El método Imperiali de divisores (D+2) produce una divisor igual a la cuota de la fórmula Imperiali reforzada de restos mayores ($x_{\mathrm{MNMX}} = q_3 =1/(M+3)$), aunque los métodos no son coincidentes.[1] Cuando c=0, el método Adams (D+0) coincide con la cuota larga Q−1: $x_{\mathrm{MNMX}}=q_{-1} =1/(M-1)$.

Puesto que sabemos que el cociente de los votos de un partido que obtiene E escaños se encuentra dentro del intervalo $E_i-1+c \leq v_i/x \leq E_i+c$, podemos determinar los votos mínimos y máximos con los que un partido obtiene E escaños como función de la magnitud del distrito y de la regla $c(E)$ de distribución.

---

[1] La fórmula de cuota Imperiali reforzada y restos mayores no está definida para p=2, pues los partidos siempre sumarían más cuotas que escaños haya. La técnica de los restos mayores no es compatible con la noción de que los restos o fracciones puedan ser mayores de un entero.

$$(E_i - 1 + c)/(M - 1 + 2\,c) \leq v_i \leq (E_i + c)/(M - 1 + 2\,c).$$

A partir de la primera desigualdad, obtenemos los votos necesarios y suficientes para que un partido cualquiera obtenga E escaños, dados M y c. La segunda desigualdad indica los votos máximos con los que se pueden obtener sólo E escaños.

Funciones de umbral:

$$v_{\text{NEC-SUF}}(E) = v_{\text{MIN}}(E) = (E - 1 + c)/(M - 1 + 2\,c);$$
$$p = 2,\ 1 \leq E \leq M, \tag{5.2}$$
$$v_{\text{MAX}}(E) = (E + c)/(M - 1 + 2\,c);$$
$$p = 2,\ 0 \leq E \leq M - 1. \tag{5.3}$$

Estas son las funciones generatrices de las funciones de umbrales de toda fórmula de divisores constantes F_c (o toda fórmula de cuota equivalente F_n) en el dominio del bipartidismo $p=2$. Los votos máximos para lograr E escaños son el umbral de votos que es suficiente rebasar para obtener $E+1$ escaños. Siendo los votos necesarios los mismos que los suficientes, la función de votos máximos es paralela a la de votos mínimos cualquiera que sea la regla, por lo que no añade ninguna información. La función de votos máximos sólo es lineal hasta $E \leq M-1$, pues para $E=M$ la fracción de votos máximos no puede ser sino $v=1$.

El umbral de representación (umbral, a la vez, de inclusión y de exclusión) se obtiene dando el valor $E=1$ en la función generatriz de las funciones de umbral.

Umbral único de representación:

$$(U_{\text{IN}} = U_{\text{EX}})\ U = c/(M - 1 + 2c);\ p = 2. \tag{5.4}$$

La función generatriz representa a una familia de infinitas funciones *lineales*[2] con la forma

$$v_{\mathrm{NECSUF}}(E) = x_{\mathrm{MNMX}}\, E - x_{\mathrm{MNMX}} + U;$$

o bien

$$v_{\mathrm{MAX}}(E) = x_{\mathrm{MNMX}}\, E + U, \text{ para } 0 \le E \le M-1, \text{ y } v_{\mathrm{MAX}}(E) = 1 \text{ para } E = M.$$

Tanto la pendiente como la constante de las funciones dependen de c, dado M como un parámetro. Por 5.2 y 5.4 comprobamos que, manteniendo lo demás constante, cuanto mayor es c, menor es el divisor-cuota x_{MNMX} y mayor es el umbral de representación U; cuanto menor es c, mayor es el divisor-cuota x_{MNMX} y menor es el umbral de representación U. Esta es la "paradoja de las cuotas altas".

5.5. Posición e inclinación de las funciones de umbrales.

Dada la magnitud del distrito M, la pendiente o inclinación de las funciones de umbrales varía con la regla de ajuste. Dentro de las fórmulas de criterio de ajuste no negativo $c \geq 0$, los casos extremos son la fórmula Adams (coincidente con la cuota larga) y la fórmula mayoritaria simple. La primera es la función más vertical de todas las fórmulas con término de ajuste no negativo, (de hecho, la función de mayor pendiente entre las proporcionales), mientras que la segunda es una función completamente plana (de pendiente cero). Es notable que la función plana puede construirse como caso límite de fórmula de divisores cuando el término c tiende a infinito: ésta es la función de pagos de la fórmula mayoritaria simple. La *posición* de todas las rectas viene dada por el umbral de mayoría. Con cualquier fórmula electoral, la mitad de

---

[2] Recuérdese que excluye a las fórmulas en las que la regla de ajuste o criterio de divisor no es una regla constante.

los votos representa, en la competición bipartidista, el umbral que es necesario y suficiente superar para obtener la mayoría absoluta de los escaños.

Todas las fórmulas de regla de ajuste constante no negativa quedan comprendidas entre los dos casos límite de la función generatriz 5.2 (c=0, $c \to \infty$):

Fórmula Adams (c=0):

$$v_{\text{NECSUF}}(E) = \frac{E-1}{M-1}.$$

Fórmula mayoritaria simple:

$$v_{\text{NECSUF}}(E) = \lim_{c \to \infty}\left(\frac{E-1+c}{M-1+2c}\right) = \frac{1}{2}.$$

En el primer límite, el máximo divisor conlleva el mínimo umbral; en el segundo límite, el mínimo divisor conlleva el máximo umbral. De un lado, encontramos a la fórmula de cuota larga, idéntica ahora a la fórmula Adams (D+0), cuya pendiente es máxima y cuyo umbral de representación es cero: $x_{\text{MNMX}} = 1/(M-1)$, U=0. De otro lado, la fórmula mayoritaria (D+∞) es la función plana que se obtiene cuando la fracción c tiende a infinito. La pendiente desaparece x_{MNMX}=0, alcanzando el umbral un valor máximo U=½.

A partir de la función generatriz de los umbrales de las fórmulas constantes, puede comprobarse fácilmente que, para toda fórmula electoral F_c con p=2, $v_{\text{NECSUF}}([M+1]/2)$=½. Con cualquier fórmula electoral, superar la mayoría absoluta, esto es, obtener más votos que el rival, es condición necesaria y suficiente para obtener la mayoría de escaños cuando esta mayoría existe, es decir, cuando los escaños son impares. La posición de las rectas está determinada por el umbral de mayoría: todas las funciones pasan por ese punto.

La función 5.2 es una función generatriz de *fórmulas electorales*, es decir, fórmulas de reparto en las que la expectativa de escaños no decrece con los votos (condición de monotonía positiva). De este modo, si para dos partidos i y j es cierto que $v_i \geq v_j$, entonces $E_i \geq E_j$ en toda asignación **E** que pertenece al conjunto de soluciones de la fórmula $F(\mathbf{v},M)$. Si los dos partidos son iguales, $v_i = v_j$, entonces para alguna asignación **E** se cumple que $E_i \geq E_j$ y para alguna asignación **E'** se cumple que $E_i \leq E_j$, perteneciendo **E** y **E'** al conjunto de soluciones de la fórmula. No es posible que un partido con menos votos que otro tenga más escaños, aunque es posible que ambos tengan los mismos escaños; de otro lado, si dos partidos son iguales, es posible que un partido tenga más escaños que otro, pero nunca en todas las asignaciones que son un resultado de la fórmula, pues suponemos que los desempates se efectúan por una regla anónima. Así, por definición, con *cualquier fórmula electoral*, dados dos partidos, superar el umbral de mayoría absoluta de los votos, esto es, lograr más votos que el rival, es condición necesaria y suficiente para obtener la mayoría de los escaños. Esta importante proposición se refiere a todas las fórmulas electorales en la competición bipartidista, sean o no proporcionales, sean o no constantes.[3]

Con cualquier fórmula electoral distinta de la fórmula mayoritaria, si el número de escaños M es impar y los partidos son $p=2$, entonces siempre que $v_1 = v_2$, hay una asignación **E** que pertenece a $F(\mathbf{v},M)$ en la que $E_1 = (M+1)/2$ y $E_2 = (M-1)/2$ y una asignación **E'** que pertenece a $F(\mathbf{v},M)$ en la que $E_1 = (M-1)/2$ y $E_2 = (M+1)/2$. La función de umbrales refleja la relación de votos y escaños de un partido de referencia que rompe los empates en su favor, por lo que, para toda fórmula electoral F_c con $p=2$, $v_{\text{NECSUF}}([M+1]/2) = ½$. Con la fórmula mayoritaria la fracción $v = ½$ es el umbral cuya superación es condición necesaria y suficiente para lograr toda la representación.

Si el número de escaños es par, es decir, si $(M+1)/2$ no es un entero, la función de umbrales indica que la fracción de votos que

[3] De hecho, se refiere a todas las fórmulas no negativas, incluyendo también a las fórmulas igualitarias.

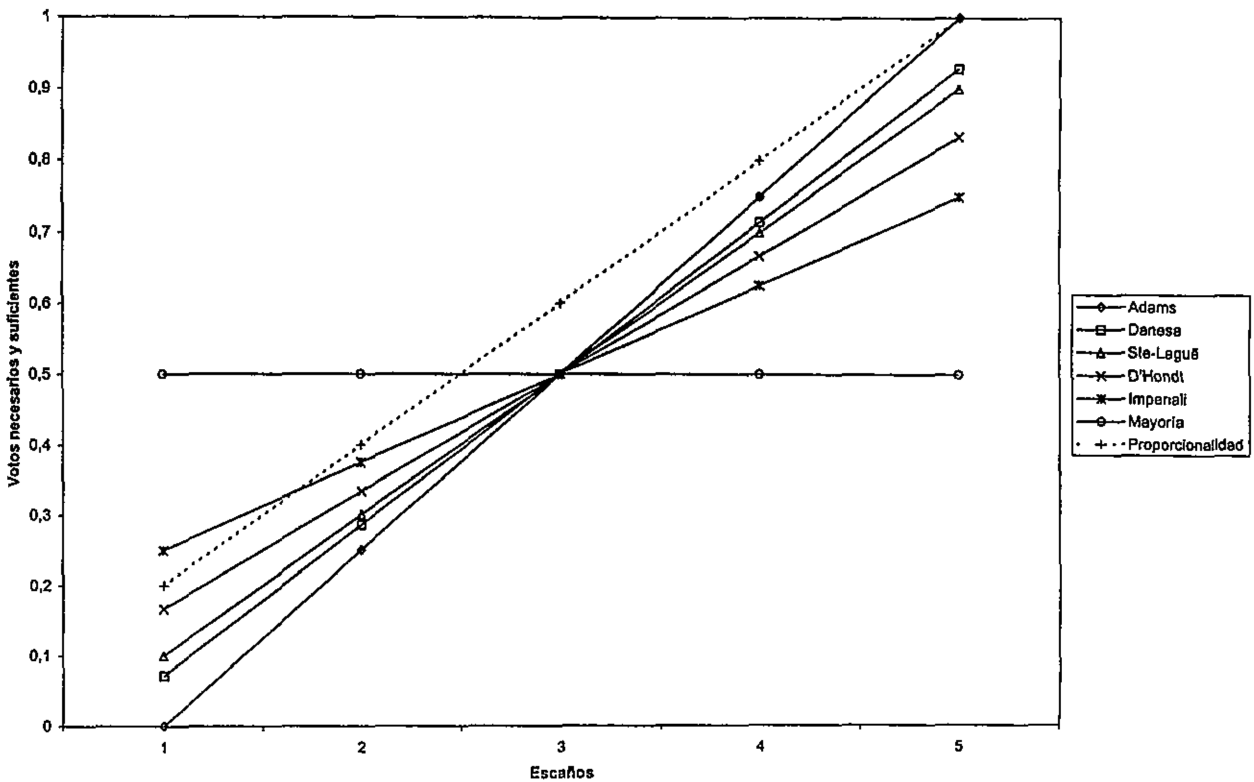
es necesario y suficiente superar para obtener la mitad de los escaños es siempre menor que la mitad de los votos (salvo en el caso de la fórmula límite de mayoría). Si los escaños a repartir son $M=3$ y los partidos $p=2$, con cualquier fórmula electoral, es condición necesaria y suficiente superar el 50% de los votos para lograr dos escaños. Si los escaños en disputa son $M=2$, con la fórmula D'Hondt es condición necesaria y suficiente superar un tercio de los votos, con la fórmula Sainte-Laguë es necesario un cuarto de los votos, y así sucesivamente.

El gráfico 5.1 muestra, como foto de familia, un ejemplo de parte del haz formado por las funciones de algunas fórmulas electorales constantes en una circunscripción de cinco escaños, lo que nos permite examinar, mediante sencilla inspección visual, los asuntos que se han mencionado. El cuadro 5.2 detalla la información del gráfico. Las funciones de votos necesarios y suficientes de todas las fórmulas pasan por un mismo punto ($v=½$; $E=[M+1]/2$). Estando constreñidas a pasar por ese punto, cuanto mayor es su pendiente menor es el umbral de representación y viceversa. El coste del acceso está inversamente relacionado con el coste del crecimiento: cuanto más sencillo es lograr el primer escaño, más difícil es lograr un escaño añadido. Es la "paradoja de las cuotas altas".

Cuadro5.2. Votos necesarios y suficientes para *E* escaños ($M=5$; $p=2$)

E	Adams	Danesa	Ste-Laguë	D'Hondt	Imperiali	Mayoría
1	0,00%	7,14%	10,00%	16,67%	25,00%	50,00%
2	25,00%	28,57%	30,00%	33,33%	37,50%	50,00%
3	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
4	75,00%	71,43%	70,00%	66,67%	62,50%	50,00%
5	100,00%	92,86%	90,00%	83,33%	75,00%	50,00%

Gráfico 5.1. Haz de funciones de umbrales para la competición bipartidista



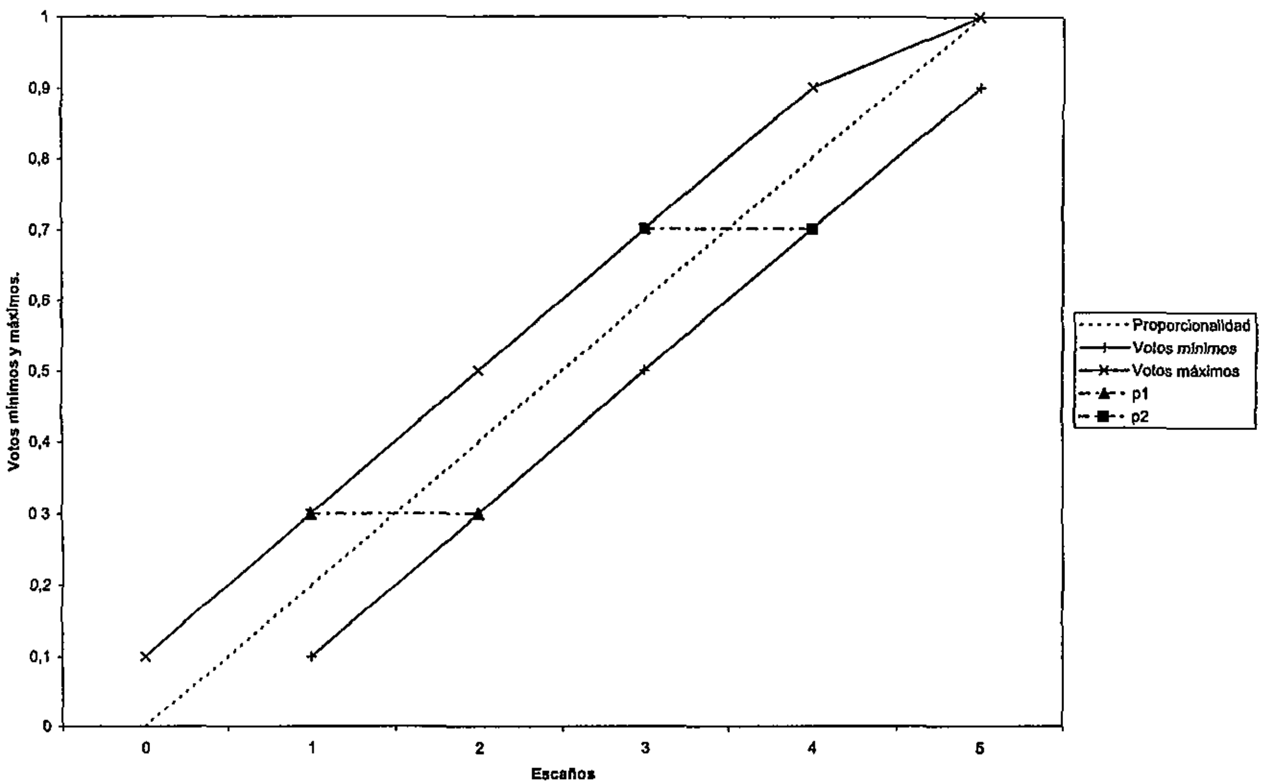
La máxima pendiente proporcional es la cuota larga, $x_{MNMX}=1/(M-1)$, generada por el criterio de ajuste Adams, $c=0$. Se puede obtener un escaño con cero votos, pero, en una circunscripción de cinco escaños, cualquier escaño añadido "cuesta" un 25% de los votos totales. Con la fórmula mayoritaria, el primer escaño cuesta no menos del 50% de los votos, pero los siguientes tienen coste cero. La cuota Droop, $x_{MNMX}=1/(M+1)$, idéntica al divisor generado por la regla $c=1$ de la fórmula D'Hondt, es un caso central dentro del haz de funciones, pues la pendiente o divisor de la función coincide con el umbral de representación: $v_{NECUF}(E)=E/(M+1)$. El umbral ordinal o estructural $1/(M+1)$, igual al 16,7% de los votos es, a un tiempo, el precio del primer escaño y de cada uno de los escaños sucesivos. En las funciones en las que la pendiente es menor a la cuota Droop, $x_{MNMX}<1/(M+1)$, el crecimiento está premiado con respecto al acceso. En el anterior ejemplo (cuadro 5.2), con la fórmula Sainte-Laguë, el umbral de representación es del 10% pero el incremento necesario para cada escaño añadido es del 20%. En las funciones en las que la pendiente es mayor que la cuota Droop, $x_{MNMX}>1/(M+1)$, el acceso está premiado con respecto al crecimiento. En el anterior ejemplo, con la fórmula Imperiali de divisores, el umbral de acceso a la representación es del 25%, mientras que el incremento por cada escaño añadido es sólo del 17,5%. Así, en cualquier fórmula de divisores constantes basada en un criterio $c(E)$ donde $c>1$, la acumulación de representantes cuesta menos votos que el acceso a la representación.

5.6. Fórmulas proporcionales y fórmulas mayoritarias

La relación entre la pendiente y el umbral de representación en las funciones de umbrales permite clasificar, mediante un criterio estrictamente procedimental, el conjunto de fórmulas electorales habituales, las de término de ajuste no negativo, en dos categorías o regiones. Las fórmulas proporcionales son aquellas en las que la pendiente de la función (el divisor mínimo y máximo) es igual o menor que el umbral de representación. Las fórmulas de tipo mayoritario son aquellas en las que el umbral de representación es mayor que la pendiente de la función. Estas proposiciones tienen una sencilla interpretación gráfica a partir de las funciones de umbrales representadas como funciones de votos mínimos y máximos: la recta de proporcionalidad está comprendida entre las funciones de votos mínimos y máximos de las fórmulas proporcionales, mientras que las funciones de votos mínimos y máximos de las fórmulas de tipo mayoritario cortan la recta de proporcionalidad.

La cuota simple, $x_{\mathrm{MNMX}}=1/M$, o pendiente de la función con criterio de ajuste de Sainte-Laguë, $c=½$, ocupa un lugar intuitivamente destacado, al correr paralela a la recta de proporcionalidad perfecta. La recta de proporcionalidad es la recta $v=E/M$. Con la fórmula de cuota simple de Hare/ divisor de Sainte-Laguë, el primer escaño cuesta la mitad que cualquiera de los siguientes (en el ejemplo del cuadro 5.2, el 10% de los votos y el 20% de los votos, respectivamente). Los votos necesarios y suficientes indican que, cualquiera que sea el tamaño del partido, su máxima sobrerrepresentación (la distancia entre la función y la recta de representación proporcional) es de diez puntos porcentuales. Tomando la distancia desde la función de votos máximos, cualquiera que sea el tamaño del partido, su máxima infrarrepresentación (sus votos "no representados") es del 10%. El gráfico 5.2 proyecta la función de votos mínimos (o necesarios y suficientes) y la de votos máximos de la fórmula de pendiente $x_{\mathrm{MNMX}}=1/M$. Cualquier asignación que es un resultado de la fórmula se encuentra en el área comprendida entre los votos mínimos y máximos. En este gráfico, el primer partido tiene $v_1=0,7$ y el segundo partido tiene $v_2=0,3$; la función produce dos posibles asignaciones de escaños para esta distribución del voto: [4,1] y [3,2]. Ambas se encuentran a igual distancia de la cuota proporcional.

Gráfico 5.2.Votos mínimos y máximos con Ste-Laguë/Hare. Asignación para v:[0,7 0,3]



Sin embargo, la fórmula de Sainte-Laguë (o cuota Hare equivalente) no es la única fórmula proporcional. Son fórmulas proporcionales aquéllas que asignan los escaños de modo perfectamente proporcional siempre que esto es posible. Si una fórmula es proporcional, entonces, para cualquier número E de escaños, los votos mínimos para lograr E escaños nunca son más que la cuota proporcional, $v_{\mathrm{MIN}}(E) \leq E/M$; al mismo tiempo, para cualquier número E de escaños, los votos máximos nunca son menos que la cuota proporcional $v_{\mathrm{MAX}}(E) \geq (E)/M$. Si, para algún número E de escaños, los votos mínimos son mayores que la cuota proporcional, entonces en ningún caso, ni cuando la proporcionalidad perfecta es posible, puede un partido con $v=E/M$ alcanzar su cuota. Si, para algún número E de escaños, los votos máximos son menos que la cuota proporcional, entonces en todo caso, aun cuando la proporcionalidad perfecta es posible, el partido con $v=E/M$ recibe más escaños de su cuota proporcional, pues $v=E/M$ es *suficiente* para obtener al menos $E+1$ escaños. Por la función generatiz de votos máximos (5.2) es fácil comprobar que $v_{\mathrm{MAX}}(E) \geq E/M$, para cualquier escaño $0 \leq E \leq M$, sólo si $0 \leq c \leq 1$. De otro lado, si $0 \leq c \leq 1$, por la función generatriz de votos mínimos (5.1), entonces $v_{\mathrm{MIN}}(E) \leq E/M$.

Por la definición de fórmula electoral, es una fórmula electoral cualquier función de pendiente no negativa $x_{\mathrm{MNMX}} \geq 0$[4]. Cualquier función en la que, si un partido tiene más votos que otro, entonces tiene siempre al menos igual número de escaños. Son *fórmulas electorales proporcionales* aquellas en las que la pendiente de sus funciones de umbral, pendiente única en el bipartidismo, se encuentra en el intervalo

$$1/(M-1) \geq x_{\mathrm{MNMX}} \geq 1/(M+1);$$

es decir, las fórmulas electorales proporcionales cumplen la

[4] La definición excluye a las fórmulas decrecientes o minoritarias, de máximo sesgo contra-mayoritario, en las que se ganan escaños perdiendo votos.

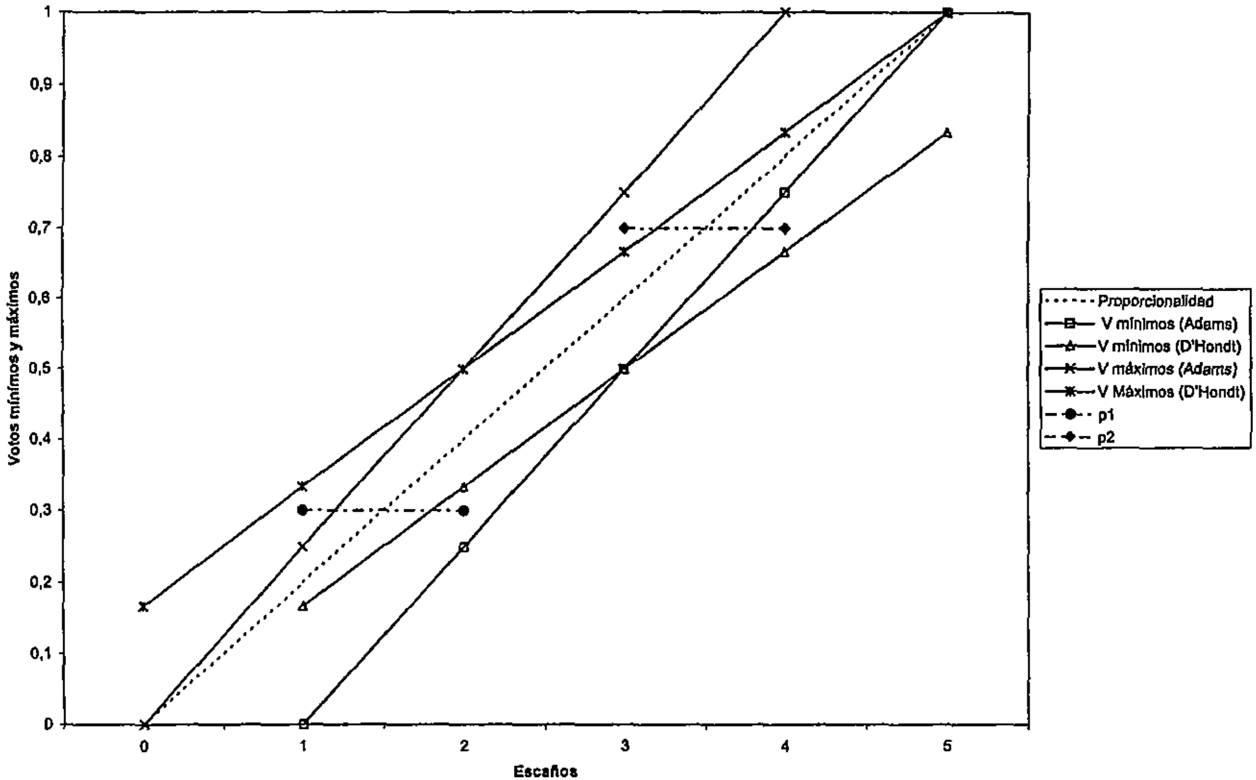
restricción, impuesta por Balinski y Young (1982) sobre los criterios de divisores, de acuerdo con la cual $E \leq c(E) \leq E+1$. Son fórmulas proporcionales todas aquellas en las que el criterio de ajuste $c(E)$ es tal que $0 \leq c \leq 1$. Todas las fórmulas proporcionales se encuentran comprendidas entre la fórmula Adams (también cuota larga en el bipartidismo) y la fórmula D'Hondt (también cuota Droop en el bipartidismo). El umbral de representación (inclusión y exclusión) de las fórmulas proporcionales es siempre igual o menor que la pendiente o divisor ($0 \leq U \leq x_{MNMX}$). Con la fórmula proporcional más favorable a la minoría (Adams) la obtención de un escaño no tiene coste, con la fórmula proporcional menos favorable a la minoría (D'Hondt), la obtención del primer escaño tiene igual coste que cualquier otro.

En el gráfico 5.3 se proyectan las funciones de votos mínimos y máximos de las fórmulas de Adams y de D'Hondt para la misma circunscripción de cinco escaños. La interpretación gráfica del resultado anterior es muy simple: son fórmulas proporcionales aquellas en las que ni la función de votos mínimos ni la de votos máximos se cruza con la recta de proporcionalidad.

En este mismo gráfico (5.3) se representan las asignaciones de escaños para el sistema de partidos v_1=0,7 y v_2=0,3. Para esta distribución del voto, la fórmula de Sainte-Laguë (cuota de Hare) produce dos posibles asignaciones (gráfico 5.2). Las fórmulas de Adams y D'Hondt optan, por así decirlo, entre las mismas. La fórmula Adams produce una única asignación [3,2] y la fórmula D'Hondt produce una única asignación [4,1]. Ambas asignaciones son resultados de fórmulas proporcionales y, en ese sentido, son asignaciones proporcionales.

Son *fórmulas electorales mayoritarias* aquéllas en las que se puede producir un reparto de escaños sesgado en favor del partido mayor incluso cuando el sesgo puede evitarse mediante una distribución perfectamente proporcional. Son fórmulas mayoritarias aquéllas en las que el criterio del divisor es tal que $c > 1$, o la pendiente de la función de umbrales es

Gráfico 5.3.Votos mínimos y máximos para Adams y D'Hondt. Asignación para v:[0,7 0,3].



$$x_{\mathrm{MNMX}} > 1/(M+1).$$

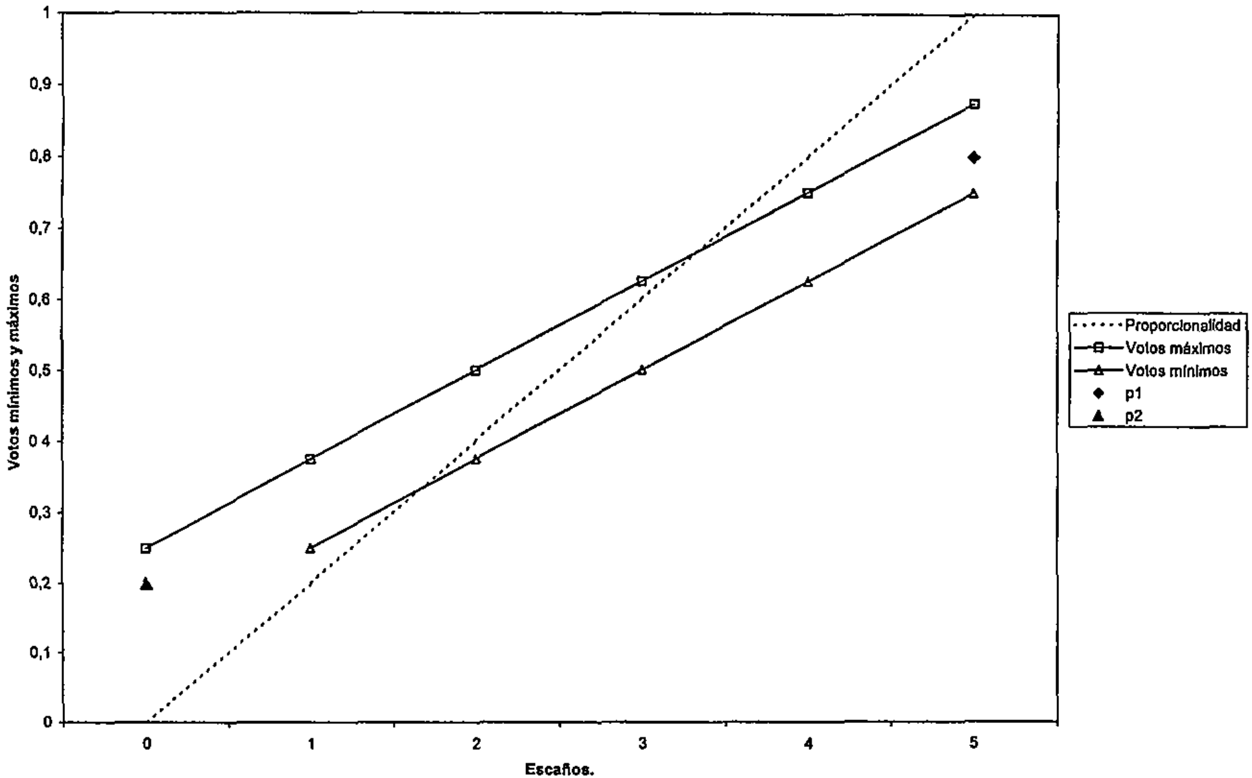
Con una fórmula mayoritaria, el umbral de representación siempre es mayor que la pendiente de la función de umbrales, $U > x_{\mathrm{MNMX}}$, por lo que el crecimiento en escaños se encuentra facilitado con respecto al acceso a la representación.

La función de umbrales de las fórmulas mayoritarias corta la recta de proporcionalidad: para algún $E<(M+1)/2$, los votos mínimos son mayores que la cuota proporcional, $v_{\mathrm{MIN}}(E)>E/M$; al mismo tiempo, para algún número E de escaños por encima de la mayoría, $E>(M+1)/2$, los votos máximos son menores que la cuota proporcional, $v_{\mathrm{MAX}}(E)<E/M$. Si los votos máximos para un número E de escaños son menos que la cuota proporcional, entonces es seguro que un partido resulta sobrerrepresentado incluso cuando la proporcionalidad perfecta es posible.

En el gráfico 5.4 se proyectan las funciones de umbrales de la fórmula Imperiali de divisores, con criterio de ajuste c=2 y pendiente $x_{\mathrm{MNMX}}=1/(M+3)$. Se trata de una fórmula electoral mayoritaria: las funciones de umbrales cortan la recta de proporcionalidad. Existen problemas de distribución en los que la proporcionalidad perfecta es posible, como en v_1=0,8 y v_2=0,2 para M=5, en los que la asignación de escaños no es $v=E/M$. Con esta fórmula, el 20% de los votos es siempre menos de lo necesario para lograr un escaño, pese a tratarse de la cuota proporcional de votos para un escaño de cinco; al mismo tiempo, el 80% de los votos es siempre suficiente para lograr toda la representación.

5.7. Sesgo mayoritario y clasificación de las fórmulas

Además de permitir la clasificación dicotómica de las fórmulas con término de ajuste no negativo en proporcionales y mayoritarias, la pendiente de las funciones de umbrales permite representar el orden de las fórmulas conforme al criterio de si presentan un mayor o menor sesgo favorable a la mayoría, o, alternativamente, GRáfico 5.4. Votos mínimos y máximos con Imperiali de divisores. Asignación para v:[0,8 0,2].



favorable a la minoría (la relación "ser al menos tan mayoritario"). Este enfoque se distancia de la aproximación tradicional más común, que busca ordenar las fórmulas por su mayor o menor proporcionalidad (Lijphart 1994, Pennisi 1998, entre otros). Este enfoque es afín al de Gallagher (1994) y, sobre todo, al de Balinski y Young (1982). A diferencia del primero, el criterio empleado aquí es analíticamente riguroso y puramente procedimental. A diferencia de los segundos, el enfoque de las funciones de umbrales permite situar a las fórmulas proporcionales y a las no proporcionales como parte de un mismo continuo.

Es evidente que la relación "ser al menos tan mayoritario" forma un orden completo para las fórmulas constantes y la competición bipartidista. Todas las fórmulas constantes son comparables y lo son por su pendiente. Una fórmula electoral F_1 es más mayoritaria que una fórmula F_2 si para cualquier $E<(M+1)/2$, $v_{\mathrm{NECSUF}}(E,F_1)>v_{\mathrm{NECSUF}}(E,F_2)$ y para cualquier $E>(M+1)/2$, $v_{\mathrm{NECSUF}}(E,F_1)<v_{\mathrm{NECSUF}}(E,F_2)$. Si ambas fórmulas son fórmulas electorales (en particular, si, siendo simétricas y decisivas, cumplen con la monotonía positiva) para $E=(M+1)/2$, $v_{\mathrm{NECSUF}}(E,F_1)=v_{\mathrm{NECSUF}}(E,F_2)$. Dicho de otro modo, una fórmula F_1 es más mayoritaria que una fórmula F_2 si, para un partido i con votos $v_i<½$, en toda asignación **E** que pertenece a $F_1(V,M)$ obtiene igual o menor número de escaños que en toda asignación **E** que pertenece a $F_2(V,M)$ y un partido j con votos $v_j>½$, en toda asignación **E** que pertenece a $\mathrm{F}_1(V,M)$ obtiene igual o mayor número de escaños que en toda asignación **E** que pertenece a $F_2(V,M)$. Cualquiera de estos enunciados es equivalente a decir que una fórmula F_1 es más mayoritaria que una fórmula F_2 si la pendiente de su función de umbrales es menor: $x_{\mathrm{MNMX1}}<x_{\mathrm{MNMX2}}$.

La pregunta sobre cuál es la fórmula electoral de mayor sesgo mayoritario es una pregunta perfectamente especificada y de respuesta trivialmente sencilla: la fórmula mayoritaria simple. A diferencia de la recta de proporcionalidad, la recta de mayoría forma parte, como caso límite, del haz de las funciones de umbrales de las fórmulas electorales. La pregunta sobre cuál es la fórmula "menos mayoritaria" o, lo que es lo mismo, la de mayor sesgo en favor de la minoría o "más igualitaria", tiene una respuesta menos clara, pero la fórmula Adams es la fórmula proporcional más favorable al partido menor. Una fórmula más "contra-mayoritaria" que la fórmula Adams no es una fórmula proporcional, sino una fórmula igualitaria, equivalente a distribuir un mínimo igual de escaños como requisito previo. En un contexto multipartidista, la fórmula más igualitaria que no garantiza un mínimo igual de escaños es el método VUNT, pues concede un escaño como máximo a cada candidatura. Esta fórmula puede entenderse como el complemento natural de la fórmula Adams cuando hay más partidos que escaños a distribuir. Esta fórmula no está definida para el bipartidismo. Mejor dicho, sólo está definida para el caso en el que la magnitud es uno, caso en el que coincide, como todas las demás fórmulas electorales, con la fórmula mayoritaria.

Con dos partidos, siempre hay un partido mayor de v=½ y otro menor, o ambos son iguales. El paso de una fórmula menos mayoritaria a otra más mayoritaria sólo puede beneficiar al mayor y perjudicar al menor, y a la inversa. La fórmula Adams maximiza las posibilidades de la minoría, respetando el criterio general de la proporcionalidad; respetando el mismo criterio, la fórmula D'Hondt maximiza la representación de la mayoría. La fórmula mayoritaria maximiza la representación de la mayoría sin respetar otro criterio que el de ser una fórmula electoral. Entre estos límites se encuentran infinitas fórmulas que pueden mejorar o empeorar las perspectivas de representación de cada partido de acuerdo con su tamaño.

El poder de esta clasificación se revela en que, al emplear un criterio procedimental, puede ordenar cualquiera de las infinitas fórmulas que se pueden concebir (o "inventar") con criterio de ajuste constante $c \geq 0$. En el cuadro 5.3 se muestra una aproximación a la *tabla periódica* de las fórmulas electorales constantes, proporcionales y mayoritarias, para la resolución de

Cuadro 5.3. Clasificación de algunas fórmulas electorales proporcionales y mayoritarias para el caso especial $p=2$.

$v_{\text{NECSUF}}(E)=x_{\text{MNMX}}\,E-x_{\text{MNMX}}+U$ $x_{\text{MNMX}}=1/(M-1+2c)$ $U=c/(M-1+2c)$			Pendiente x_{MNMX} (Divisor/ Cuota)	Umbral de representación (U)	Regla $c(E)=E+c$
Proporcionales	Máximo sesgo hacia la minoría	Adams / Cuota larga	$1/(M-1)$	0	$c=0$
		Danesa	$1/(M-1/3)$	$1/(3M-1)$	$c=1/3$
	Sesgo cero	Ste Laguë / Hare	$1/M$	$1/(2M)$	$c=1/2$
		D'Hondt / Droop	$1/(M+1)$	$1/(M+1)$	$c=1$
Mayoritarias		Imperiali (divisores)	$1/(M+3)$	$2/(M+3)$	$c=2$
	Máximo sesgo mayoritario	Mayoritaria	0	1/2	$c\to\infty$

cualquier problema de distribución de dos o más escaños entre dos partidos. Cualquiera que sea la magnitud $M>1$, el orden de las fórmulas es siempre el mismo en los sistemas de competición bipartidista. El cuadro sólo recoge algunas fórmulas conocidas, pero pueden idearse infinitas fórmulas intermedias cuya posición en la tabla y efectos previsibles, a partir de la función de umbrales, son inmediatamente determinables. Así, por ejemplo, $c=3/4$ es una fórmula intermedia entre Sainte-Laguë y D'Hondt, adecuada para moderar, pero conservándolo, el sesgo mayoritario de la segunda.[5]

[5] Históricamente, lo más parecido a una fórmula intermedia que se ha empleado en la práctica es la fórmula de Sainte-Laguë modificada, que resulta considerablemente más compleja (ver capítulo 7).

La función generatriz de los umbrales nos permite prever la posición dentro de la tabla de elementos empíricamente desconocidos, como esta fórmula híbrida; por eso podemos, salvando las distancias, hablar de una tabla periódica.

Puede observarse que los umbrales de inclusión y de exclusión de todas las fórmulas, tal y como aparecen en el cuadro 5.1 se reducen ambos a los umbrales de representación que aquí aparecen, cuando el número de partidos es dos. Todos los umbrales se reducen, a su vez, a ½ cuando la magnitud es uno. En ese caso, todas las fórmulas electorales son equivalentes, es decir, producen un mismo sistema electoral: el sistema mayoritario. La tabla no ordena sistemas electorales, sino fórmulas.

5.8. Dos fórmulas proporcionales no constantes (Hill-Huntington y Dean)

En el caso de la competición bipartidista, también para las fórmulas no constantes, como Hill y Dean, es posible encontrar una expresión analítica que señale los umbrales para cada magnitud electoral. Esto no es posible en el caso general de la competición multipartidista, donde los umbrales sólo pueden obtenerse por tabulación. Pero aun en el caso especial bipartidista, en el que contamos con expresiones equivalentes a 5.1 y 5.2, lo que hay que subrayar es que las fórmulas que emplean un criterio de ajuste variable sólo son parcialmente conmensurables con las fórmulas constantes. Los criterios de ajuste basados en la media geométrica y en la media armónica forman un orden con el criterio de la media aritmética (Sainte-Laguë) y el de la mínima fracción (Adams), pero ninguno es comparable, por ejemplo, con el criterio de ajuste en un tercio (fórmula danesa), pues tanto la media geométrica como la aritmética pueden ser mayores o menores de un tercio.

Para la fórmula de Hill-Huntington, el divisor x mínimo y máximo que puede resolver cualquier problema de asignación de escaños entre dos partidos empleando el criterio de ajuste de la media geométrica, fijada la magnitud M como una parámetro, es una función $x_{MNMX}=f(E)$ con la forma

$$x_{MNMX}= 1/(\sqrt{[E(E-1)]} + \sqrt{[E^2-E(2M+1)+M^2+M]}).$$

El divisor no es una constante con respecto al número de escaños, sino que, una vez que la magnitud se fija como parámetro, el divisor es mayor cuanto mayor es el número de escaños obtenidos por el partido de referencia. La desigualdad que caracteriza a la fórmula de Hill-Huntington es $\sqrt{[E_i(E_i-1)]} \leq v_i/x \leq \sqrt{[E_i(E_i+1)]}$. Sustituyendo el valor del divisor, obtenemos los votos necesarios y suficientes para obtener E escaños por parte de cualquier partido i en una competición bipartidista regulada con esta fórmula:

$$v_{NEC\text{-}SUF}(E)=\sqrt{[E(E-1)]}/(\sqrt{[E(E-1)]}+\sqrt{[E^2-E(2M+1)+M^2+M]});$$
$$p=2,\ 1\leq E\leq M.$$

Para la fórmula de Dean, cuyo criterio de divisores se basa en la media aritmética, el divisor x_{MNMX} también es, dada la magnitud del distrito, una función del número de escaños que obtiene cada partido, $x_{MNMX}=f(E)$. El divisor mínimo y máximo viene dado por la expresión

$$x_{MNMX}=[(2E-1)(2E-2M-1)]/[2M(2E^2-2E(M+1)+M+1)].$$

Los votos necesarios y suficientes para que cualquier partido alcance E escaños con la fórmula Dean en una competición entre dos partidos son

$$v_{NEC\text{-}SUF}(E)=[E(E-1)(2E-2M-1)]/[M(2E^2-2E(M+1)+M+1)];$$
$$p=2,\ 1\leq E\leq M.$$

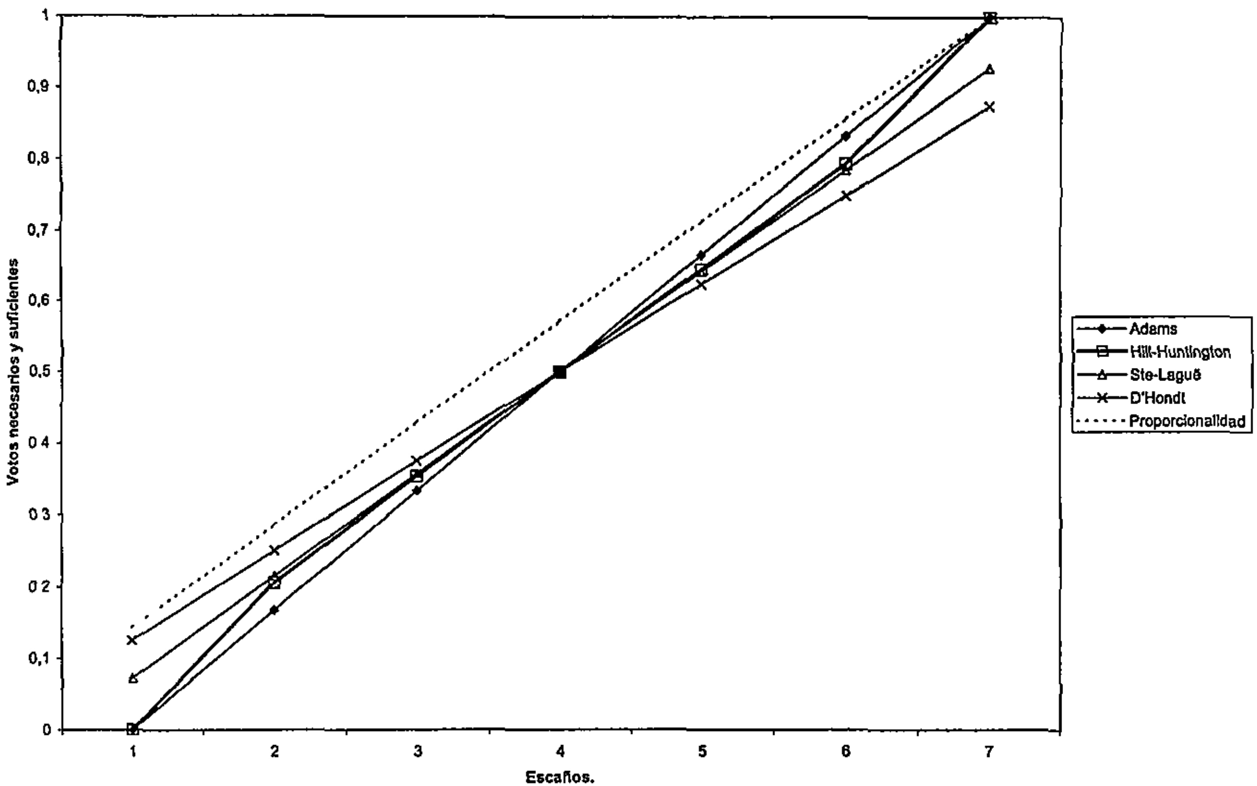
Con ambas fórmulas, los votos necesarios y suficientes son funciones no lineales del número de escaños. Como en la fórmula

Adams, los votos necesarios y suficientes para el primer escaño (el umbral de representación) son igual a cero en los dos casos, mientras que los votos necesarios y suficientes para lograr toda la representación son el 100%. Como en cualquier fórmula electoral, en un dominio bipartidista, el umbral de los votos necesarios y suficientes para la mayoría absoluta ($[M+1]/2$) es el 50%. Para cualquier número de escaños mayor que cero y menor que la mayoría absoluta, el umbral de la fórmula Dean es menor que el de la fórmula Hill-Huntington. Para cualquier número de escaños menor que M pero mayor que la mayoría, el umbral de la fórmula Dean es mayor que el de la fórmula Hill-Huntington. La fórmula Hill-Huntington es (ligeramente) más mayoritaria que la fórmula Dean; o, a la inversa, la fórmula Dean tiene un sesgo más pronunciado hacia la minoría.

Cuadro5.4. Funciones lineales y no lineales: votos necesarios y suficientes en una circunscripción de siete escaños (p=2)

	Los cinco métodos de divisores tradicionales (comparables)					
E	Adams	Dean	Hill-Hunting ton	Sainte-Laguë	D'Hondt	Danesa
1	0,00%	0,00%	0,00%	7,14%	12,50%	5,00%
2	16,67%	19,64%	20,52%	21,43%	25,00%	20,00%
3	33,33%	35,06%	35,39%	35,71%	37,50%	35,00%
4	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
5	66,67%	64,94%	64,61%	64,2857%	62,50%	65,00%
6	83,33%	80,36%	79,48%	78,57%	75,00%	80,00%
7	100%	100%	100%	92,86%	87,50%	95,00%

Gráfico 5.5. Pendiente no constante de Hill-Huntington y orden parcial de la fórmula.



Los métodos Hill y Dean son comparables, por el criterio del sesgo mayoritario, con la fórmula Adams y con la de Sainte-Laguë y, de hecho con cualquier otra fórmula constante de pendiente menor que la de Sainte-Laguë, como la fórmula D`Hondt. El cuadro 5.4 presenta los umbrales de estas cinco fórmulas tradicionales de divisores en una circunscripción de siete escaños con dos partidos. La fórmula Hill-Huntington siempre es menos favorable a los partidos menores (su pendiente es mayor) que la de Sainte-Laguë, pero más que la de Dean, pues la media geométrica se encuentra siempre entre la media aritmética y la armónica. Sin embargo, el criterio de ajuste de la fórmula danesa (c=1/3) es unas veces más exigente que la media geométrica (o la armónica) y otras veces lo es menos, por lo que las fórmulas no pueden ordenarse. En el ejemplo del cuadro 5.4 la fórmula danesa requiere más votos que cualquiera de las dos fórmulas no lineales para ceder el primer escaño, se sitúa entre Hill y Dean para el segundo escaño y es menos exigentes que cualquiera de ellas para el tercero; el cuarto escaño suma la mayoría absoluta de los representantes; para los escaños quinto, sexto y séptimo la pauta se reproduce, lógicamente, en sentido inverso. Dependiendo de la distribución del voto entre los dos partidos, la fórmula danesa podría favorecer a la minoría más que cualquiera de las fórmulas no lineales, menos que cualquiera de ellas, o situarse entre ambas.

La curvatura de las funciones de umbrales de las fórmulas Hill-Huntington y Dean, como se muestra en el gráfico 5.5, hace imposible la comparación procedimental, atendiendo al sesgo esperado, con fórmulas constantes de pendiente comprendida entre Adams y Sainte-Laguë. Sin embargo, estas dos fórmulas no lineales sí forman un orden con las tres fórmulas de divisores constantes "clásicas", de manera que, por orden de mayor a menor beneficio para los partidos menores, siempre es cierto que: D'Hondt (Jefferson) ≥Sainte-Laguë (Webster) ≥ Hill-Huntington ≥Dean ≥ Adams. Ésta es, naturalmente, la misma conclusión que la establecida por Balinski y Young (1982).

5.9. Funciones de pagos y sesgo cero

Si existen fórmulas más bien sesgadas hacia la minoría y fórmulas más bien sesgadas hacia la mayoría, es natural preguntarse si existe una fórmula central que no sea sesgada. La fórmula de Sainte-Laguë es una fórmula no sesgada en la competición bipartidista, si por fórmula no sesgada se entiende una fórmula que muestra igual tendencia a favorecer al partido mayor como a favorecer al menor cuando el sesgo es inevitable. Una manera muy razonable de aproximarse a esta idea, propuesta por Balinski y Young (1982; 119), es contar todas las asignaciones de escaños para una magnitud menor que la (menor) magnitud perfecta M^* y para cualquier par de partidos $[v_1,v_2]$, tales que $v_1 > v_2$, en las que el primer partido resulta favorecido. Si éstas son tantas como aquellas asignaciones en las que el segundo partido termina sobrerrepresentado, entonces la fórmula es no sesgada. Existen diversos modos de hacer ver que la fórmula de Sainte-Laguë cumple esta condición, pero el más sencillo me parece el examen de las funciones de pagos, nuevo concepto que se introduce a continuación.

Las funciones de pagos indican el número de escaños que a un partido le corresponden como mínimo y como máximo por los votos que obtiene. Las funciones de pagos pueden construirse de manera sencilla a partir de las funciones de umbral. En la competición bipartidista, los escaños mínimos y máximos que un partido alcanza con sus votos son los mismos. Así, por ejemplo, si la fórmula de asignación de escaños es la fórmula Adams y la magnitud electoral M=5, un partido con votos entre cero y el 25% obtiene un escaño como mínimo y como máximo; si un partido obtiene más del 25% de los votos, pero menos de la mitad, obtiene dos escaños como mínimo y como máximo, y así sucesivamente.

A partir de las funciones de umbral es inmediato construir, invirtiéndolas, las funciones de pagos en una expresión analítica general. Dada la magnitud M del distrito y una fórmula constante

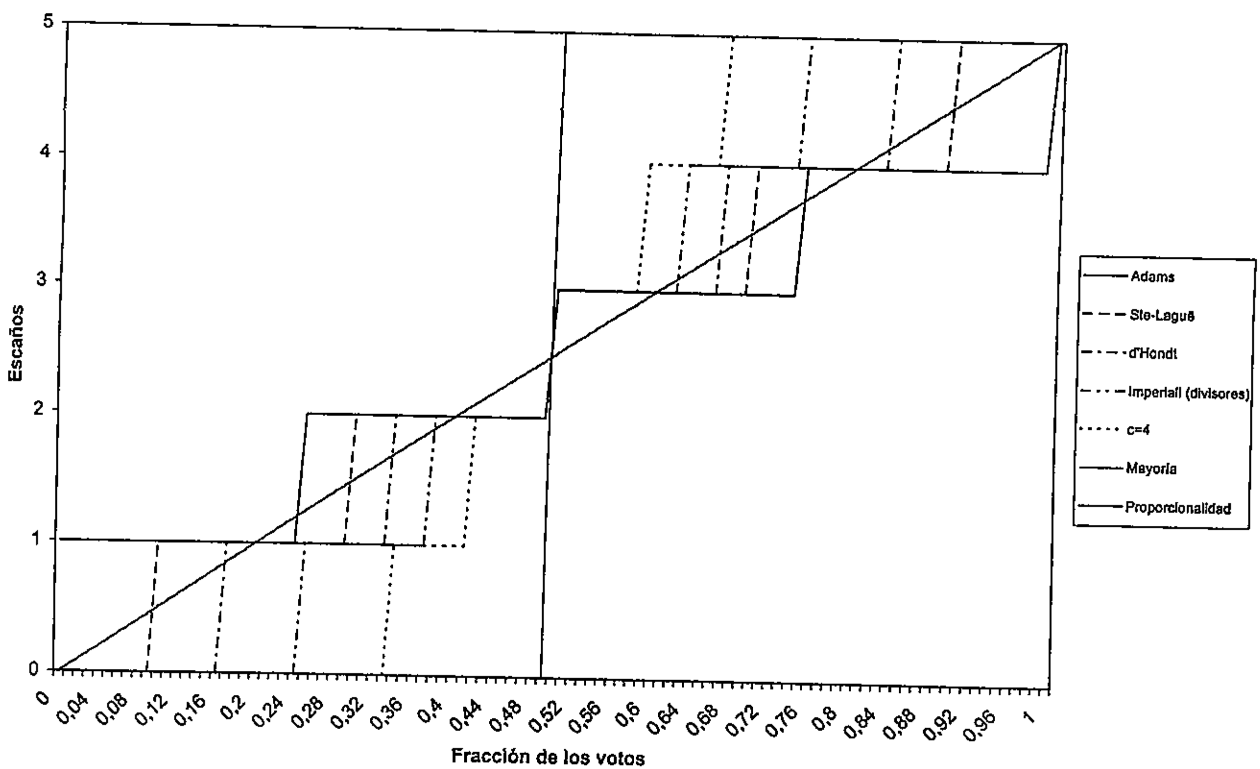
F_c, el número de escaños que obtiene un partido en la competición bipartidista es una función de la fracción de los votos:

$$E(v) = med\,\{0,\, M,\, \lfloor Mv + 2vc - v - c + 1 \rfloor\} \qquad (5.5)$$

donde $med\,\{x, y, z\}$ es el valor intermedio del trío x, y, z y $\lfloor z \rfloor$ es igual al mayor entero que es menor o igual que z. Las funciones de pagos son funciones no derivables. Un ejemplo de la forma de estas funciones, para una circunscripción de cinco escaños, aparece en el gráfico 5.6.

Veamos tres ejemplos. Por la expresión 5.5, la función de pagos de la fórmula Sainte-Laguë es igual a $E(v) = \lfloor Mv + 0{,}5 \rfloor$; la función de pagos de la fórmula D'Hondt es igual a $E(v) = \lfloor Mv + v \rfloor$; por último, la función de pagos de la fórmula Adams es $E(v) = \lfloor Mv + (1 - v) \rfloor$. Puede observarse que el primer sumando Mv es la fracción del conjunto de los representantes que le correspondería al partido, en un reparto proporcional, si estos fueran divisibles en enteros, mientras que el segundo sumando determina, en cada caso, si el número de escaños recibido por el partido es mayor o menor que Mv. Si $E > Mv$, el partido resulta sobrerrepresentado; si $E < Mv$, el partido resulta infrarrepresentado. Si $Mv = \lfloor Mv \rfloor + r$, donde r es un resto entre cero y uno, y si todos los resultados son igualmente posibles, entonces el resto será la mitad de las veces mayor que un medio y la mitad de las veces menor. Así, con la fórmula Sainte-Laguë, cualquier partido, con independencia de su tamaño, resulta sobrerrepresentado tantas veces como infrarrepresentado, pues siempre que $r > 0{,}5$, $\lfloor Mv + 0{,}5 \rfloor > Mv$ y la asignación es mayor que la cuota proporcional; lo contrario sucede siempre que $r < 0{,}5$. Sin embargo, con la fórmula D'Hondt, cuanto mayor es el partido, más probable es que $\lfloor Mv + v \rfloor$ sea mayor que Mv y el número de escaños obtenidos sea mayor que la fracción proporcional; por el contrario, con la fórmula Adams, cuanto mayor es el partido menos probable es que el número de escaños que recibe sea mayor que Mv.

Gráfico 5.6. Funciones de pagos de algunas fórmulas electorales (M=5, p=2)



Como puede verse en el gráfico 5.6, el recorrido de las funciones de pagos de las fórmulas electorales se encuentra la mitad del tiempo por debajo de la recta de proporcionalidad y la mitad del tiempo por encima de la recta de proporcionalidad. Cualquiera que sea la fórmula electoral, un partido tomado al azar tiene igual probabilidad de resultar sobrerrepresentado que de resultar infrarrepresentado. Con la fórmula mayoritaria, cualquier partido mayor del cincuenta por ciento de los votos resulta sobrerrepresentado con certeza y cualquier partido menor resulta infrarrepresentado. Sin embargo, con la función de Sainte-Laguë un partido mayor del cincuenta por ciento de los votos tiene igual probabilidad de resultar sobrerrepresentado que infrarrepresentado. Lo mismo vale para un partido menor.

Así, es posible honrar a la fórmula Sainte-Laguë (o, en el bipartidismo, cuota Hare) con el título de fórmula de sesgo cero. Fórmulas en las que la regla de ajuste es tal que $c>0{,}5$ inducen el sesgo en favor de la mayoría y fórmulas en las que la regla de ajuste es tal que $c<0{,}5$ inducen el sesgo en favor de la minoría. Todas las fórmulas pueden ordenarse de modo procedimental por su regla de ajuste, pero dentro del continuo pueden señalarse ya varios hitos: el que distingue a las fórmulas proporcionales de las mayoritarias y el que distingue el sesgo negativo para la mayoría del sesgo positivo para la mayoría. La parte izquierda del cuadro 5.3 señala estos hitos.

5.10. Fórmulas igualitarias

Las fórmulas igualitarias son una especie rara. Son *fórmulas electorales igualitarias* aquéllas en las que se puede producir un reparto de escaños sesgado en contra del partido mayor incluso cuando el sesgo puede evitarse mediante una distribución perfectamente proporcional. Son fórmulas igualitarias aquéllas en las que el criterio del divisor es tal que $-(M-1)/2< c<0$. Las funciones de umbrales de las fórmulas igualitarias no son funciones lineales de E, sino que tienen pendiente cero (son constantes) en parte de su recorrido y pendiente x_{MNMX} en otra parte de su recorrido. La función generatriz de las funciones de umbrales es

$$v_{\mathrm{NECSUF}}(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \leq \lfloor |c| \rfloor + 1, \\ 1 & \text{si } E \geq M - 2(\lfloor |c| \rfloor + 1), \\ (E-1+c)/(M-1+2\,c) & \text{si } \lfloor |c| \rfloor + 1 \leq E \leq M - 2(\lfloor |c| \rfloor + 1); \end{cases}$$

$$p=2,\ 1 \leq E \leq M,\ c<0. \tag{5.6}$$

Recuérdese que $\lfloor |c| \rfloor$ se lee como el entero menor o igual que el valor absoluto de c. Resulta más cómodo escribir la función como

$$v_{\mathrm{NECSUF}}(E) = med\ \{0,\ 1,\ (E-1+c)/(M-1+2\,c)\}, \tag{5.7}$$

donde $med\ \{x, y, z\}$ se lee como el valor intermedio del trío $\{x, y, z\}$. Obsérvese que el tercer término en el conjunto es la función generatriz de los umbrales (5.2)

Con una fórmula igualitaria, el umbral de representación siempre es cero. Es más, el umbral siempre es cero hasta $E = \lfloor |c| \rfloor + 1$, o bien, cada partido recibe un mínimo m de escaños $m = \lfloor |c| \rfloor + 1$. Esto implica, naturalmente, que, en la situación bipartidista, cada partido sólo puede alcanzar un máximo igual a $M-2m$. La pendiente de la función de umbrales para lograr E escaños cuando $m \leq E \leq M-2m$ es

$$x_{\mathrm{MNMX}} < 1/(M-1).$$

La función de umbrales de una fórmula igualitaria corta la recta de proporcionalidad: para algún número E de escaños por encima de la mayoría, $E > (M+1)/2$, los votos necesarios y suficientes son mayores que la cuota proporcional, $v_{\mathrm{NECSUF}}(E) > E/M$. Es seguro que el primer partido resulta infrarrepresentado y el segundo sobrerrepresentado, incluso cuando la proporcionalidad perfecta es posible. El gráfico 5.7 presenta un haz de funciones igualitarias en una circunscripción de nueve escaños y dos partidos. Debe notarse que el haz de fórmulas está centrado en el mismo punto que las fórmulas proporcionales y mayoritarias.

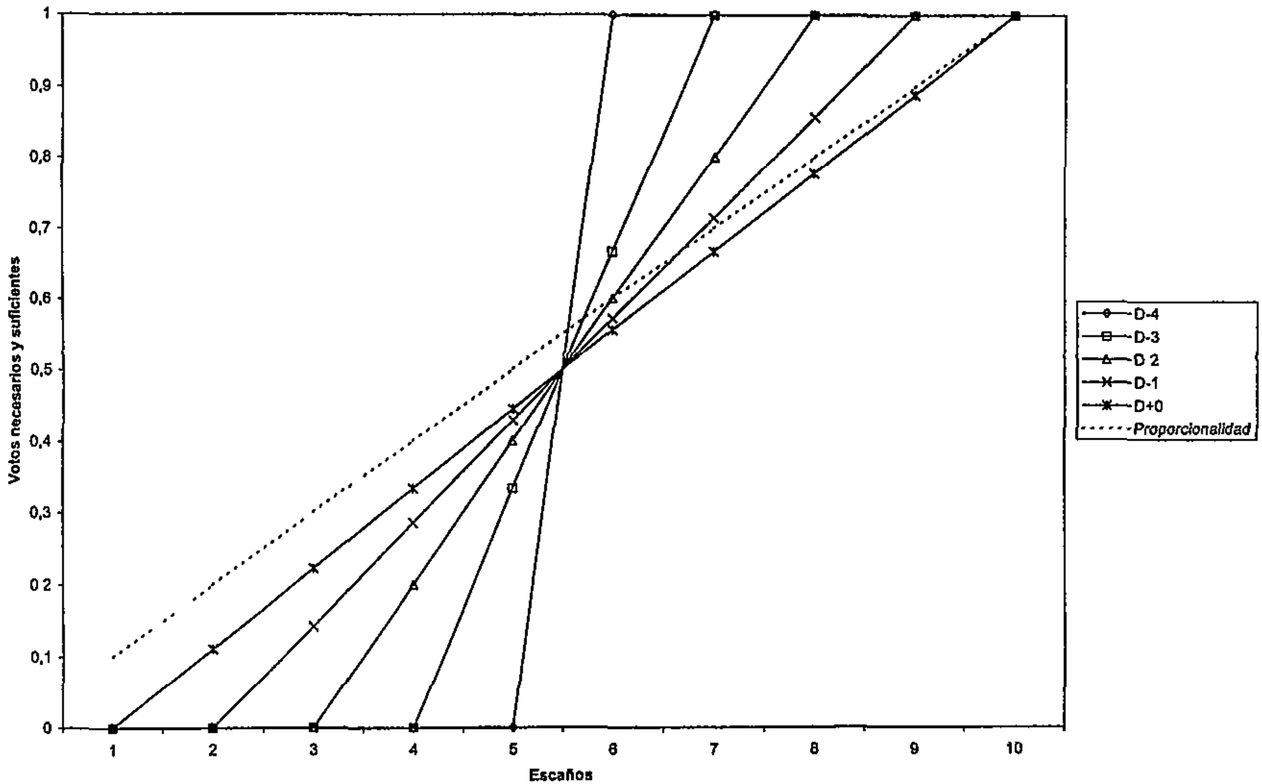
La fórmula D-3 es una fórmula máximamente igualitaria en una circunscripción de diez escaños y una competición de dos partidos. El criterio negativo de divisores en el que se basa la fórmula tiene su límite inferior en $-(M-1)/p$, o -4 en este ejemplo. Pero cualquier valor de c mayor que -4 y menor o igual que -3 produce un mismo resultado, cediendo una asignación mínima por partido de m=4, pues $m=1+\lfloor |c| \rfloor$. El único escaño que queda en liza lo obtiene el partido mayor. Las fórmulas D-2 y D-1 asignan tres y dos escaños a cada partido, distribuyendo los restantes por un método igual a D'Hondt.

Si los escaños son divisibles entre los partidos, como, por ejemplo, en una circunscripción M=10, entonces la fórmula máximamente igualitaria es D-4, que divide los escaños por igual entre los dos partidos, con independencia de cómo se distribuya el voto. La igualdad perfecta es un límite para las fórmulas electorales, como lo es la mayoría simple.

Cuando el término de ajuste tiende al límite, $c \to -(M-1)/2$, el divisor tiende a infinito, o la función de umbrales a la verticalidad. En ese caso, todos los partidos reciben el mismo número de escaños (ver también 4.6 en el capítulo 6). Cuando la función de umbrales es vertical, la función de pagos es plana. Sustituyendo el valor mínimo de c en la función generatriz de las funciones de pagos (5.5) obtenemos que un partido obtiene, para cualquier fracción del voto $E=\lfloor 1+(M-1)/2 \rfloor$.

Ahora se puede completar la tabla periódica de las fórmulas electorales, para la competición bipartidista, como en el cuadro 5.5. Existen tres tipos de fórmulas electorales: igualitarias, proporcionales y mayoritarias. Las fórmulas Adams y D'Hondt son límites para las fórmulas proporcionales, con mínimo y máximo sesgo hacia la mayoría, respectivamente. El sesgo mayoritario siempre es mayor en las fórmulas mayoritarias, y es máximo en la

Gráfico 5.7. Fórmulas igualitarias y fórmula Adams.



mayoría simple. El sesgo hacia la minoría, o sesgo contra-mayoritario, es mayor en las fórmulas igualitarias. Cuando el término de ajuste tiende a $-(M-1/2)$, la distribución tiende a la igualdad.

Cuadro 5.5. Aspecto de la tabla periódica infinita de las fórmulas electorales de divisores; $p=2$.

Tipo de fórmula y sesgo.	Clave (nombre) de la fórmula.	Pendiente x_{MNMX} (Divisor)	Umbral (U)	Regla $c(E)=E+c$
Igualitarias: Máximo sesgo igualitario	D-$(M-1/2)$	$\to\infty$	0	$c\to-(M-1/2)$
Igualitarias	D-2	$1/(M-5)$	0	$c=-2$
Igualitarias	D-1	$1/(M-3)$	0	$c=-1$
Proporcionales	D+0 (Adams)	$1/(M-1)$	0	$c=0$
Proporcionales: Sesgo cero	D+0,5 (Ste-Laguë)	$1/M$	$1/(2M)$	$c=1/2$
Proporcionales	D+1 (D'Hondt)	$1/(M+1)$	$1/(M+1)$	$c=1$
Mayoritarias	D+2 (Imperiali, div.)	$1/(M+3)$	$2/(M+3)$	$c=2$
Mayoritarias	D+3	$1/(M+5)$	$3/(M+5)$	$c=3$
Mayoritarias: Máximo sesgo mayoritario	D+∞ (Mayoritaria)	0	$1/2$	$c\to\infty$

¿Qué tipo de límite es la igualdad perfecta? La igualdad es un límite para las fórmulas electorales, pero no es el reparto máximamente sesgado contra la mayoría, o en favor de la minoría. En la igualdad perfecta, es indiferente ser mayoría o minoría, ganar o perder votos. Preguntarse qué hay más allá de ese límite nos conduce fuera de las fórmulas electorales, hacia fórmulas decrecientes en las que empieza a ser conveniente perder votos más bien que ganarlos.

5.11. A través del espejo: anti-fórmulas electorales

Cuando el término de ajuste es $c < -(M-1/2)$, la pendiente de las funciones de umbral se vuelve negativa. Las anti-fórmulas electorales son funciones decrecientes de los votos, fórmulas en las que la expectativa de escaños de un partido decrece con el número de apoyos. Explorarlas aquí, aunque sea de manera superficial, puede parecer un simple divertimento, pero creo que tiene su interés.

Con las anti-fórmulas todo funciona al revés: los partidos deben contener el número de sus votos y los umbrales se leen como la fracción del voto que un partido no debe superar si no quiere perder un escaño. Todas las fórmulas electorales tienen su imagen en una anti-fórmula. Existe la fórmula anti-D'Hondt, en la que un partido obtiene todos los escaños si logra no superar el umbral ordinal $1/(M+1)$, y la fórmula anti-Adams, en la que incluso el mayor partido obtiene un escaño como mínimo. Ambas fórmulas son anti-proporcionales. La anti-proporcionalidad perfecta se consigue cuando el mayor partido obtiene la cuota proporcional que, de este lado del espejo, corresponde al partido menor, y viceversa. La anti-proporcionalidad siempre es posible para una magnitud perfecta, igual que la proporcionalidad. La fórmula anti-Sainte-Laguë es una anti-fórmula no sesgada, pues cuando la anti-proporcionalidad no es posible, favorece (o "castiga") con igual probabilidad al partido mayor y al menor. Existen fórmulas anti-igualitarias, anti-proporcionales y anti-mayoritarias, o, simplemente minoritarias, pues siempre sesgan el resultado hacia la minoría incluso cuando la anti-proporcionalidad es posible. La fórmula más anti-mayoritaria es la que siempre cede todos los escaños al menor partido, o fórmula minoritaria simple. Ésta es la fórmula en la que el término de ajuste tiende a menos infinito, $c \rightarrow -\infty$.

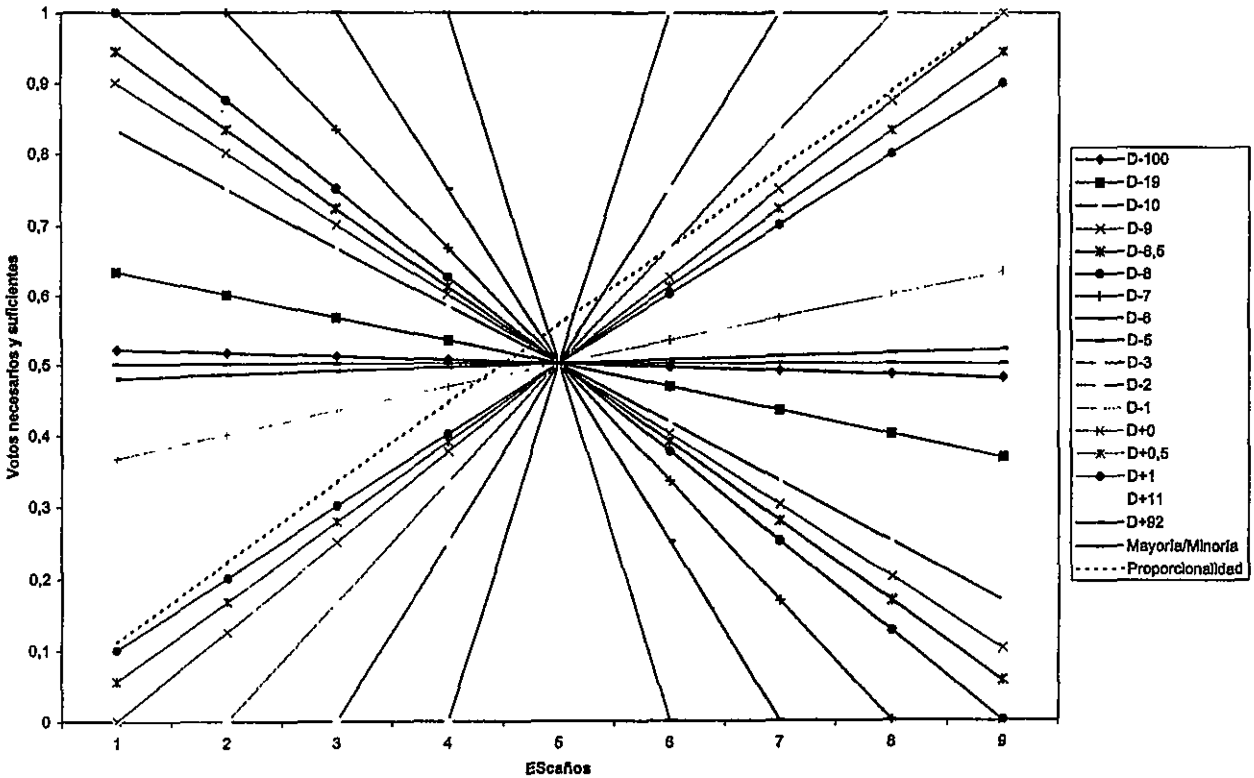
Las funciones de umbrales de las fórmulas anti-electorales se obtienen a partir de la función generatriz (5.2) para los casos de las fórmulas anti-proporcionales y anti-mayoritarias y la función (5.4) o (5.5) para las fórmulas anti-igualitarias. Todas las anti-fórmulas pasan por un mismo punto. Con cualquiera de ellas es condición necesaria y suficiente tener menos de la mitad de los votos para lograr la mayoría absoluta de los escaños. Todas las funciones pasan por las coordenadas (v=0,5; $E=[M+1]/2$). La pendiente de las función de umbrales depende del término de ajuste de cada anti-fórmula: la pendiente negativa es menor cuando menor el valor de c. En el límite, cuando $c \rightarrow -\infty$, en la fórmula minoritaria simple, la función es plana: la constante $v=½$. La función es idéntica a la de la fórmula mayoritaria simple, pero el umbral indica los votos que es necesario no alcanzar para lograr toda la representación, mientras que su imagen electoral indica los votos que es necesario superar. De otro lado, cuando $c \rightarrow -(M-1/2)$, pero por la izquierda, la función tiende a ser vertical y los escaños se distribuyen a partes iguales (solo que por razones que podemos llamar contrarias a las que conducen a ese resultado en las fórmulas igualitarias). Si los escaños no son divisibles entre los partidos, entonces el partido menor obtiene un escaño más que el mayor.

El cuadro 5.6 contrasta los umbrales de una muestra de fórmulas electorales de todo tipo, y de sus anti-fórmulas, en una circunscripción de nueve escaños con dos partidos. Puede comprobarse a partir de la función generatriz de los umbrales que la pendiente de las anti-fórmulas es igual a la de las fórmulas pero con signo negativo. Así, la fórmula anti-D'Hondt (D-*M*) tiene pendiente $x_{MNMX}=-1/(M+1)$, la fórmula anti-Adams (D-[*M*-1]) tiene pendiente $x_{MNMX}=-1/(M-1)$, y así sucesivamente. Las fórmulas y las anti-fórmulas se disponen en una especie de tabla periódica circular en la que los extremos, la mayoría simple y la "minoría simple", se tocan.

Cuadro 5.6. Funciones de umbrales de fórmulas y anti-fórmulas. Tabla circular.

Sesgo	Tipo	Nombre	Clave	$\nu_{NECSUF}(1)$	$\nu_{NECSUF}(2)$	$\nu_{NECSUF}(3)$	$\nu_{NECSUF}(4)$	$\nu_{NECSUF}(5)$	$\nu_{NECSUF}(6)$	$\nu_{NECSUF}(7)$	$\nu_{NECSUF}(8)$	$\nu_{NECSUF}(9)$
Máxima ventaja para la minoría.	Anti-mayoritarias	Minoría simple	D-∞	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%
			D-100	52,08%	51,56%	51,04%	50,52%	50,00%	49,48%	48,96%	48,44%	47,92%
			D-19	63,33%	60,00%	56,67%	53,33%	50,00%	46,67%	43,33%	40,00%	36,67%
	Anti-proporcionales	Anti-D'Hondt	D-*M*	90,00%	80,00%	70,00%	60,00%	50,00%	40,00%	30,00%	20,00%	10,00%
		Anti-Ste-Laguë	*D-[M+0,5]*	*94,44%*	*83,33%*	*72,22%*	*61,11%*	*50,00%*	*38,89%*	*27,78%*	*16,67%*	*5,56%*
		Anti-Adams	D-[*M*-1]	100,00%	87,50%	75,00%	62,50%	50,00%	37,50%	25,00%	12,50%	0,00%
	Anti-igualitiarias		D-7	100,00%	100,00%	83,33%	66,67%	50,00%	33,33%	16,67%	0,00%	0,00%
			D-6	100,00%	100,00%	*100,00%*	*75,00%*	*50,00%*	*25,00%*	*0,00%*	*0,00%*	*0,00%*
Máxima igualdad		Anti-Igualdad	D-5	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	50,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	Igualitarias	Igualdad	D-3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	50,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
			D-2	*0,00%*	*0,00%*	*0,00%*	*25,00%*	*50,00%*	*75,00%*	*100,00%*	*100,00%*	*100,00%*
			D-1	*0,00%*	*0,00%*	*16,67%*	33,33%	*50,00%*	*66,67%*	83,33%	100,00%	100,00%
	Proporcionales	Adams	D+0	0,00%	12,50%	25,00%	37,50%	50,00%	62,50%	75,00%	87,50%	100,00%
Sesgo cero		*Ste-Laguë*	*D+0,5*	*5,56%*	*16,67%*	27,78%	38,89%	50,00%	61,11%	72,22%	83,33%	94,44%
		D'Hondt	D+1	10,00%	20,00%	30,00%	40,00%	50,00%	60,00%	70,00%	80,00%	90,00%
	Mayoritarias		D+11	36,67%	40,00%	43,33%	46,67%	50,00%	53,33%	56,67%	60,00%	63,33%
Máxima ventaja para la mayoría			*D+92*	*47,92%*	*48,44%*	*48,96%*	49,48%	50,00%	50,52%	51,04%	51,56%	52,08%
		Mayoría simple	D+∞	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%	50,00%

Gráfico 5.8. Estrella de fórmulas y antifórmulas electorales



El gráfico 5.8. muestra un ejemplo del haz completo formado por todas las fórmulas y anti-fórmulas en una misma circunscripción de nueve escaños.

5.12. Proporcionalidad, sesgo y magnitud electoral

Entendida como propiedad de las fórmulas, la proporcionalidad se dice de cualquier procedimiento que dé lugar a un resultado proporcional cuando es posible. El sesgo cero no es lo mismo que la proporcionalidad, pues es evidente que hay fórmulas proporcionales sesgadas. Entendida como proximidad a la proporcionalidad perfecta, la proporcionalidad se dice de los resultados, no de las reglas. La recta de proporcionalidad no es una fórmula electoral.

Dada una magnitud electoral, los resultados de la fórmula menos sesgada son los más próximos a la proporcionalidad perfecta, pues es una función paralela a dicha recta; pero las fórmulas no se ordenan de modo natural en un continuo de mayor a menor proporcionalidad, sino por su pendiente. Podríamos idear un criterio puramente procedimental para ordenar a las fórmulas por su proporcionalidad. El criterio natural sería su mayor o menor proximidad a la función paralela a la recta de proporcionalidad. Puesto que todas las funciones se cruzan, lo natural, a su vez, sería tomar la distancia máxima. Este proceder nos conduciría a la conclusión de que, por ejemplo, la fórmula Adams y la fórmula D'Hondt son "equi-proporcionales". No sé si este es el tipo de respuesta que se busca cuando se pregunta por la proporcionalidad de una fórmula electoral, pero, evidentemente, es una gran pérdida de información ordenar a las dos fórmulas indicadas en un mismo lugar.

Un problema muy semejante se presenta si adoptamos la estrategia no procedimental que es más común, es decir, la de comparar resultados. Para ordenar los resultados de las fórmulas por su proporcionalidad necesitamos asignar un número real a cada uno, es decir, un índice que mida la desviación. Estos índices son objeto de la discusión del capítulo 7. Como veremos, los índices apoyan la conclusión de que a medida que la pendiente de la función de umbrales se aproxima a la pendiente de la recta de proporcionalidad, los resultados son más proporcionales. Sin embargo, la desviación de la proporcionalidad tampoco nos dice nada sobre si la pendiente se aleja en uno u otro de los sentidos posibles, hacia la mayoría o hacia la igualdad.

La pregunta por la proporcionalidad de las fórmulas confunde lo esencial, a saber, que la proporcionalidad es, antes que nada, una propiedad de los sistemas electorales. Por las funciones de umbrales, es fácil comprobar que a medida que la magnitud electoral crece, la pendiente de las funciones tiende a $1/M$, es decir, tienden a una función paralela a la bisectriz o recta de proporcionalidad. Las funciones tienden a la proporcionalidad más deprisa cuanto menos distante es el valor absoluto del término de ajuste c con respecto al ajuste simple de Sainte-Laguë. En el límite, sólo la igualdad y la mayoría son indiferentes, como principios de distribución, a la magnitud electoral. De otro lado, las fórmulas electorales, en las que el término de ajuste es tal que $0 \leq c \leq 1$, la pendiente tiende muy deprisa a coincidir con la paralela de la proporcionalidad cuando la magnitud crece. Al mismo tiempo que cambia la inclinación, la magnitud determina la posición de las funciones: cuando la magnitud crece, el centro por el que pasan todas las funciones de umbrales se aproxima a la recta de proporcionalidad.

El gráfico 5.9 representa las funciones de umbrales de las fórmulas electorales que forman los ejes básicos del "espacio de la representación", determinando diversas regiones o tipos de reparto electoral en una circunscripción de tres escaños. El área en torno a la función de Sainte-Laguë, paralela a la bisectriz, está delimitada por las funciones de Adams y D'Hondt. Ésta es la región proporcional. El área entre la fórmula D'Hondt y la recta de mayoría es la región mayoritaria. El área entre la fórmula Adams y la vertical es la región igualitaria. En el ejemplo que se representa en el gráfico las funciones de umbrales están bastante alejadas de la bisectriz (la posición de todas las funciones viene determinada por un punto relativamente alejado) y la región de la proporcionalidad es muy amplia (hay notable disparidad entre las pendientes de las dos funciones limítrofes, las correspondientes a los métodos Adams y D'Hondt). La razón es que la magnitud electoral es muy pequeña (M=3), por lo que la desviación con respecto a la proporcionalidad perfecta, incluso con una fórmula electoral proporcional, es considerable.

Compárese con el gráfico 5.10, que representa las funciones de umbrales de las mismas fórmulas en una circunscripción de 25 escaños. Las fórmulas proporcionales comprenden ahora un área muy pequeña y están todas muy próximas a la recta de proporcionalidad. Los resultados de la distribución con cualquiera de estas fórmulas están condenados a encontrarse muy próximos al reparto proporcional perfecto. Esto no quiere decir que las fórmulas electorales no puedan introducir sesgos cuando la magnitud es más grande, pero sí que hay que modificar la fórmula, acudiendo a términos de ajuste de orden mayor, para mantener la capacidad de sesgo del sistema electoral si la magnitud crece.

Sin embargo, si la magnitud electoral se reduce a un escaño, todas las fórmulas son iguales y el haz se reduce a un punto: el centro de todas las funciones. Con cualquier fórmula electoral, el umbral para el único consiste en la mitad de los votos. Todos los sistemas electorales se vuelven mayoritarios cuando la magnitud es mínima.

Así, manteniendo la magnitud constante, pero no si es extrema, la fórmula electoral modifica la dirección del sesgo, permitiendo ordenar los sistemas electorales en más mayoritarios o más igualitarios. De otro lado, manteniendo la fórmula constante, pero no si es extrema, la magnitud electoral aproxima las fórmulas hacia la proporcionalidad. Con todo, el modo en el que se aproximan a la proporcionalidad no es monótono. Como se comprueba en el capítulo 8, el orden de los sistemas electorales de mayor a menor proporcionalidad no puede representarse por la magnitud electoral.

Gráfico 5. 9. Ejes básicos del espacio de la representación electoral (M=3).

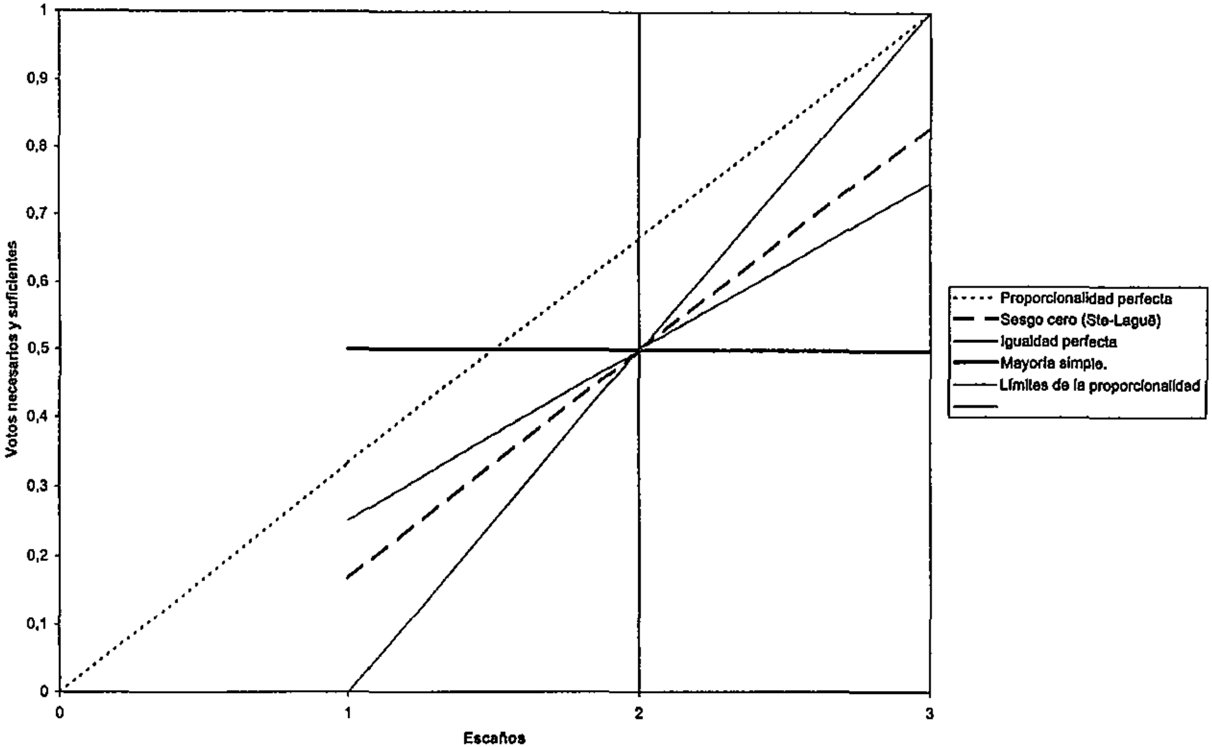
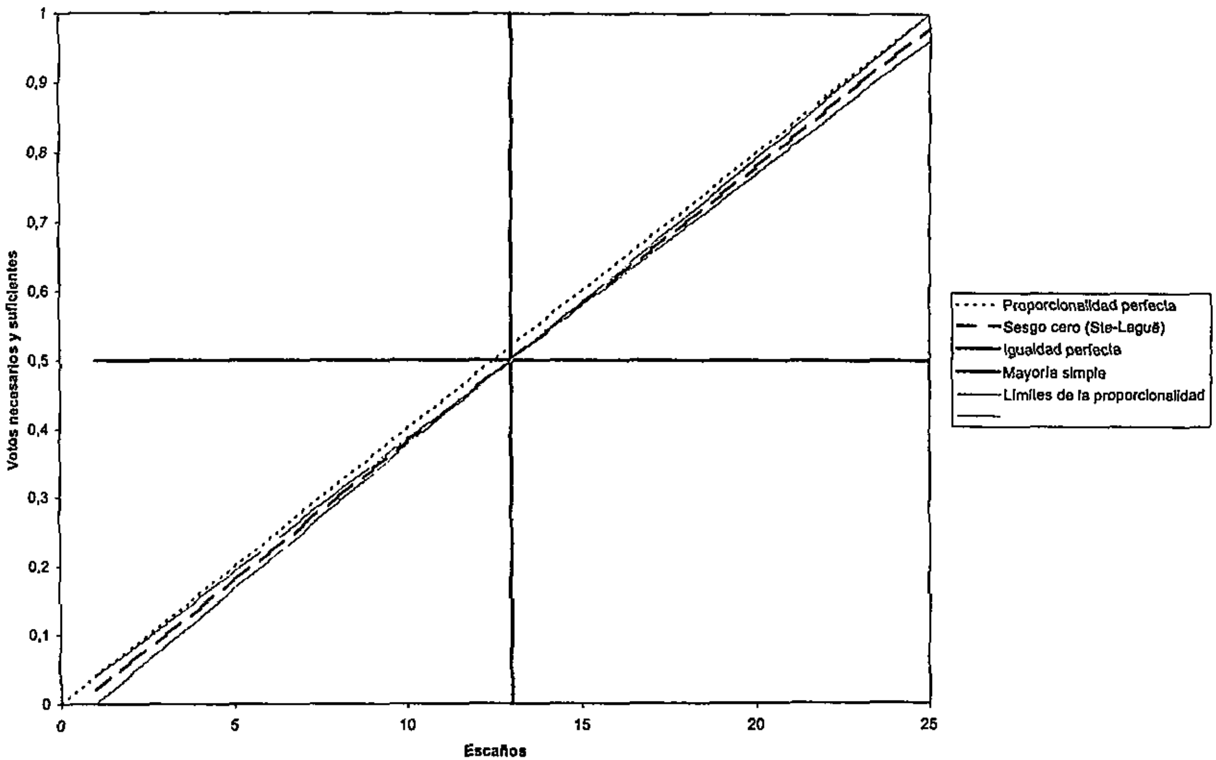


Gráfico 5.10. Ejes básicos del espacio de la representación electoral (M=25)



5.13. Recapitulación.

En este capítulo se ha comprobado cómo todas las fórmulas electorales son conmensurables en el caso en el que hay dos únicos partidos en la competición. En el bipartidismo, existe una fórmula de divisores exactamente equivalente para cada método de cuota. La relación "ser al menos tan mayoritario" induce un orden para todas las fórmulas constantes cuando $p=2$. Aunque la demostración estricta de esta proposición se encuentra en el capítulo 6, esta relación puede representarse fácilmente mediante las funciones de umbral: cuanto menor es la pendiente, más mayoritaria es la fórmula. En este capítulo se deduce la función generatriz de las funciones de umbrales de las fórmulas constantes para la competición bipartidista. Las funciones de umbral aclaran perfectamente la relación inversa entre el tamaño de la cuota, o, en general, la pendiente de la función, y los umbrales de representación. Cuanto menor es la pendiente, mayor es el umbral: una fórmula más mayoritaria dificulta el acceso a la representación y facilita la acumulación de escaños.

La competición bipartidista también facilita la determinación de las funciones de umbrales de algunas fórmulas no constantes, como Hill-Huntington o Dean. Estas fórmulas no están conectadas con todas las fórmulas de divisores constantes, resultando inconmensurables con algunas de ellas.

El análisis de las funciones de umbrales permite distinguir con toda nitidez las regiones del espacio de la representación electoral. Los métodos de reparto proporcionales conforman un área relativamente pequeña dentro del haz de los infinitos métodos de reparto. De hecho, hemos observado la continuidad entre los métodos electorales y las anti-fórmulas, los métodos en los que el número de escaños decrece con los votos. Son fórmula electorales proporcionales aquéllas cuya función de umbrales no interseca la recta de proporcionalidad: todos los métodos comprendidos entre las fórmulas Adams y D'Hondt. Las fórmulas electorales de pendiente menor que D'Hondt son de tipo mayoritario. En el límite, la fórmula mayoritaria es la fórmula de pendiente cero. Las fórmulas de pendiente mayor que Adams son igualitarias. En el límite, la fórmula igualitaria tiene pendiente infinita. Las fórmulas con pendiente negativa son anti-fórmulas electorales: son métodos de reparto constantes en los que el número de votos está negativamente relacionado con el número de escaños.

Dentro del ámbito de los métodos proporcionales, la fórmula de Sainte-Laguë y la fórmula Hare, coincidentes en el bipartidismo, ocupan una posición central. Esta posición central se aprecia con gran claridad al invertir las funciones de umbrales y transformarlas en funciones de pagos. Puede argumentarse que la fórmula central es la fórmula menos sesgada, pues se aproxima más que ningún otra a la recta de proporcionalidad perfecta. Con todo, el número de escaños que la fórmula distribuye determina en medida mucho mayor la proximidad de los umbrales a la prescripción proporcional.

CAPÍTULO SEIS

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y FUNCIONES DE UMBRAL: GENERALIZACIÓN

En la primera parte de este capítulo se obtiene la generalización de las funciones generatrices de los umbrales para todas las fórmulas electorales, para cualquier número de partidos y para cualquier magnitud electoral. En la segunda parte se demuestra la existencia de un orden lineal para las fórmulas de divisores constantes y de un orden lineal para las fórmulas de cuota y restos mayores. Se trata del orden inducido por la relación "ser al menos tan mayoritario". Éste es el capítulo más abstracto y difícil, pero si lo que aquí se expone es, como creo, correcto, debe ser el más valioso.

La generalización nos obliga a contemplar dos tipos de métodos, que ya se han introducido en sendos capítulos: las cuotas y los divisores. Dentro de los métodos de divisores, debemos distinguir, a su vez, los tres tipos introducidos en el capítulo anterior: mayoritarios, proporcionales e igualitarios (d-igualitarios). Dentro de los métodos de cuota se distinguen los tipos proporcional y q-igualitario; los métodos proporcionales de cuota pueden ser simples o compuestos.

La generalización destruye la equivalencia que existe en el bipartidismo entre métodos de cuota y métodos de divisores y la reduce a lo que definimos como v'-equivalencia: dado un problema de asignación de escaños resuelto por un método de cuota y restos mayores, existe un método de divisores que resuelve el mismo problema con una misma asignación.

Hasta ahora se ha sugerido, por medio de ejemplos ilustrativos y empleando las funciones de umbrales en el caso bipartidista, que las fórmulas pueden ser ordenadas por la relación "ser al menos tan mayoritario". A continuación haremos uso de un teorema de Balinski y Young (1982) para demostrar que dicha relación forma un orden lineal (asimétrico, transitivo y completo) sobre el conjunto de las fórmulas de divisores constantes. Asímismo, demostraremos mediante un segundo teorema que la relación induce un orden lineal para los métodos de cuota y restos mayores. También se demuestra que la relación no induce sino un orden parcial estricto (no completo) sobre el conjunto de las fórmulas electorales. La relación que conecta todas las fórmulas electorales constantes es "ser al menos tan mayoritario cuando v=v'".

La penúltima sección se apoya en gran medida en lo ya expuesto a propósito del caso simplificado de dos partidos. Existen tres "regiones" en el espacio de la representación electoral (mayoría, proporcionalidad e igualdad) que pueden diferenciarse por las funciones de umbrales. Estas regiones marcan cambios cualitativos en el orden de las fórmulas dentro de la tabla periódica de las mismas que, por lo indicado en el párrafo anterior, ha de desdoblarse en dos tablas separadas para cuotas y divisores.

I. DEDUCCIÓN DE LAS FUNCIONES DE UMBRALES DE LAS FÓRMULAS ELECTORALES

6.1. Métodos de divisores y empates competitivos

Recordemos que un método de divisores basado en un criterio constante $c(E)$ puede describirse como la correspondencia o función de múltiples valores

$F_c(\mathbf{v},M)=\{\mathbf{E}$: $E_i=[v_i/x]_c$, $c(E)=E+c$ y $\sum E_i=M$ para algún $x\}$.

La función $F_c(\mathbf{v},M)$ es un conjunto de vectores, pues siempre que $v_i/x=c(E)$, $[v_i/x]_c$ puede tomar los valores E o $E+1$. Sea x un divisor que resuelve un problema de asignación de M escaños en un vector $\mathbf{v}$ y sea $k\leq p$ el número de partidos para los cuales es cierto que $v_i/x=c(E)$. Entonces, por la definición anterior:

$$\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{v_i}{x}\right]_c=\sum_{i=1}^{p-k}\left[\frac{v_i}{x}\right]_c+\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{v_j}{x}\right]_c ;$$

$$\min\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{v_j}{x}\right]_c=\sum_{j=1}^{k}E_j ;\quad \max\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{v_j}{x}\right]_c=\sum_{j=1}^{k}E_j+k .$$

Si x es un valor del divisor para la fórmula, entonces no es posible que el valor mínimo de la suma de los cocientes ajustados exceda el número de escaños:

$$\min\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{v_i}{x}\right]_c=\sum_{i=1}^{p-k}E_i+\sum_{j=1}^{k}E_j=\sum_{i=1}^{p}E_i\leq M .$$

Sin embargo, sí es posible que el valor máximo de la suma de los cocientes ajustados exceda el número de escaños hasta $M+k$:

$$\max\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{v_i}{x}\right]_c=\sum_{i=1}^{p-k}E_i+\sum_{j=1}^{k}E_j+k=\sum_{i=1}^{p}E_i+k\geq M .$$

A partir de aquí es inmediato que $F_c(\mathbf{v},M)$ tienen un único elemento si y sólo si se cumple una de las dos siguientes condiciones: que el mínimo valor de los cocientes ajustados sume su máximo, o que el máximo valor sume su mínimo. Es decir, cuando es cierto que

$$(\sum_{i=1}^{p} E_i = M) \vee (\sum_{i=1}^{p} E_i + k = M),$$

donde la conjunción se lee como disyuntiva ('o bien').

Por consiguiente, se produce un *empate competitivo* entre dos o más partidos, de manera que $F_c(\mathbf{v},M)$ tiene dos o más elementos, siempre que ninguna de las dos condiciones se cumple. Esto es, se produce un empate competitivo si el mínimo de los cocientes ajustados no suma su máximo *y* el máximo de la suma de cocientes no suma su mínimo. Es decir, cuando es cierto que

$$(\sum_{i=1}^{p} E_i \leq M-1) \wedge (\sum_{i=1}^{p} E_i + k \geq M+1) \qquad (6.1)$$

donde la conjunción se lee como copulativa ('y').

Llamemos *divisor umbral* a un divisor x^* que es el divisor único que resuelve un problema de asignación de M en $\mathbf{v}$, con un método basado en el criterio $c(E)$, tal que se produce un empate competitivo entre dos o más partidos. El conjunto de vectores que son solución de la fórmula contiene entonces múltiples elementos. Veamos, a continuación, algunos ejemplos de empates competitivos en los que el divisor que asigna los escaños es un divisor umbral.

6.1.2. Un ejemplo

En el cuadro 6.1 se muestran los diez empates competitivos entre cinco partidos que son posibles un una circunscripción de cuatro escaños que se distribuyen mediante el método de Sainte-Laguë (C+0,5). El caso 1 es un empate máximamente competitivo por la inclusión: los cinco partidos están empatados para la asignación del último escaño. En ese caso, el valor del divisor umbral es mínimo. El caso 10 es un empate máximamente competitivo por la exclusión, en el que los cinco partidos están empatados por los cuatro escaños. En ese caso, el valor del divisor umbral es máximo. El caso 10 indica los votos máximos con los que un partido puede tener cero escaños, o la fracción de los votos que es condición suficiente superar para obtener un escaño.

Los casos 9, 8 y 7 son empates máximamente competitivos por la exclusión asociados a la situación en que un partido tiene uno, dos y tres escaños, respectivamente. El divisor umbral es menor en 7 que en 8, en 8 que en 9 y en 9 que en 10. Los tres casos muestran los votos máximos con los que un partido puede tener uno, dos y tres escaños; o el umbral de votos suficientes para dos, tres y cuatro escaños. El divisor umbral de, por ejemplo, el caso 7, no es el máximo absoluto (que es el del caso 10) pero sí el máximo de su fila; es decir, es el máximo entre los posibles divisores que producen empates cuando un partido tiene tres escaños. Lo mismo vale decir, *mutatis mutandis*, para los divisores umbrales de los casos 8 y 9. En estas tres situaciones, para que el empate sea máximamente competitivo, algunos partidos tienen cero votos, pues, de lo contrario, los votos asociados al número de escaños del partido de referencia no podrían ser máximos.

Los casos 2 a 7 no son empates máximamente competitivos por la inclusión ni por la exclusión, pero deben observarse algunas equivalencias. Por ejemplo, el divisor umbral del caso 5 es igual al del caso 7. El caso 5 no refleja la situación máximamente competitiva entre cinco partidos cuando un partido tiene dos escaños, pues esto es algo que sólo encontramos en el caso 8. Sin

Cuadro 6.1. Empates competitivos entre cinco partidos en una circunscripción de M=4 escaños. Método de cuota simple o de Hare y restos mayores (q=1/M).

Caso 1.	(R=1, r^*=0,2)	Caso 2	(R=1, r^*=0,25)	Caso4.	(R=1, r^*=0,33)	Caso 7.	(R=1, r^*=0,5)
v	v/q	v	v/q	v	v/q	v	v/q
0,8	3,2	0,8125	3,25	0,83	3,33	0,875	3,5
0,05	0,2	0,0625	0,25	0,08	0,33	0,125	0,5
0,05	0,2	0,0625	0,25	0,08	0,33	0	0
0,05	0,2	0,0625	0,25	0	0	0	0
0,05	0,2	0	0	0	0	0	0
Caso 3.	(R=2, r^*=0,4)	Caso 5.	(R=2, r^*=0,5)	Caso 8.	(R=2, r^*=0,67)	Caso 11.	(R=2, r^*=052)
v	v/q	v	v/q	v	v/q	v	v/q
0,6	2,4	0,625	2,5	0,667	2,667	0,625	2,5
0,1	0,4	0,125	0,5	0,167	0,667	0,375	1,5
0,1	0,4	0,125	0,5	0,167	0,667	0	0
0,1	0,4	0,125	0,5	0	0	0	0
0,1	0,4	0	0	0	0	0	0
Caso6.	(R=3, r^*=0,6)	Caso 9.	(R=3, r^*=0,75)	Caso 12.	(R=2, r^*=0,67)		
v	v/q	v	v/q	v	v/q		
0,4	1,6	0,4375	1,75	0,417	1,667		
0,15	0,6	0,1875	0,75	0,417	1,667		
0,15	0,6	0,1875	0,75	0,167	0,667		
0,15	0,6	0,1875	0,75	0	0		
0,15	0,6	0	0	0	0		
Caso 10.	(R=5, r^*=0,8)						
v	v/q						
0,2	0,8						
0,2	0,8						
0,2	0,8						
0,2	0,8						
0,2	0,8						

embargo, el caso 7 reflejaría la situación máximamente competitiva por la exclusión si hubiese un partido menos. Su equivalencia con el caso 7 refleja el hecho de que, con cuatro partidos, el máximo divisor asociado a dos y a tres escaños es el mismo; o que el incremento de votos máximos es constante, lo que no sucede con cinco partidos. Lo mismo vale decir, *mutatis mutandis*, respecto a los casos 6 y 8.

6.2. Máximo y mínimo del divisor umbral

Podemos determinar el mínimo y el máximo divisor umbral x^* asociado a un número E de escaños para un partido de referencia como función del término de ajuste c en el criterio $c(E)$, la magnitud M y el número de partidos p.

Sea entonces

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p-1} E_i + E . \tag{6.2}$$

A partir de la definición de k y de (6.1) obtenemos la restricción

$$p \geq k \geq M - \sum_{i=1}^{p-1} E_i - E + 1 \geq 2 , \tag{6.3}$$

donde k y el término expresado como sumatorio son variables y todo lo demás constantes. Podemos expresar los valores máximos de las variables en función de las constantes, mientras que los valores mínimos de las variables quedan interdefinidos. Así,

$$\max k = p$$

$$\min k = \max\left\{2, M - \sum_{i=1}^{p-1} E_i - E + 1\right\}$$

$$\max\sum_{i=1}^{p-1} E_i = M - E - 1$$

$$\min\sum_{i=1}^{p-1} E_i = \max\{0, M - k + 1 - E\}$$

Cuando el sumatorio toma su valor mínimo, el tercer término de la desigualdad en (6.3) es máximo. El valor mínimo del sumatorio de los escaños distintos de E sólo es cero cuando $E \geq M - k + 1$. Esto nos permite, a su vez, rescribir los mínimos de k para valores mínimos del sumatorio, así como los valores mínimos del sumatorio para valores mínimos de k:

$$\min k \min\sum_{i=1}^{p-1} E_i = \min\{M - E + 1, p\}$$

$$\min\sum_{i=1}^{p-1} E_i \min k = \max\{0, M - p + 1 - E\}.$$

Por último, pueden interdefinirse los valores mínimos de k con un sumatorio de valor máximo y el valor máximo de k con un sumatorio de valor mínimo.

$$\min k \max\sum_{i=1}^{p-1} E_i = 2$$

$$\max\sum_{i=1}^{p-1} E_i \min k = M - E - 1$$

Suponemos que el partido de referencia es, naturalmente, uno de los k partidos que participan del empate, pues, de lo contrario, de nada vale averiguar qué tipos de empates pueden darse cuando un partido logra E escaños. El modo en el que estén distribuídos los restantes escaños entre los partidos es indiferente.

Por definición de los partidos empatados, para cualquiera de los k partidos podemos escribir que $v_i/x^*=c(E)=E_i+c$. Para los restantes $p-k$ partidos podemos escribir $v_j/x^*=E_j+r_j$, donde $r_j<c$. La fracción o parte no entera del cociente ha de ser menor que el término de ajuste pues, de lo contrario, el partido j sería uno de los k partidos empatados, o bien su asignación de escaños sería siempre $[v_j/x]_c=E_j+1$. Entonces, puede escribirse

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{v_i}{x^*}\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(E_i+c\right)+\sum_{j=1}^{p-k}E_j+\sum_{j=1}^{p-k}r_j\ ,$$

o bien,

$$\frac{1}{x^*}=\sum_{i=1}^{p-1}E_i+E+kc+\sum_{j=1}^{p-k}r_j\ ,$$

de donde

$$x^*=\frac{1}{\sum_{i=1}^{p-1}E_i+E+kc+\sum_{j=1}^{p-k}r_j} \tag{6.4}$$

Esta expresión es minimizada cuando la suma de los escaños distintos de E es máxima y el número de los partidos implicados en el empate también lo es $(k=p)$. Nótese que puesto que cualquier fracción r es siempre menor que c, $pc>(p-1)c+r$. Así, el mínimo resto umbral viene dado por la expresión:

$$\min x^*=\frac{1}{M-1+pc}. \tag{6.5}$$

De otro lado, y siempre que nos encontremos con fórmulas no mayoritarias ($c \leq 1$), la expresión es maximizada cuando la suma de los escaños distintos a E es mínima, igual que el número de los partidos k implicados en el empate, mientras que para cualquiera de los $p-k$ partidos, $r_j=0$. El máximo divisor umbral se realiza bien cuando todos los partidos participan en el empate, bien cuando los partidos que no participan en el empate son partidos con cero votos. Así, el máximo resto umbral asociado a E escaños se corresponde con la expresión

$$\max x^* = \min\left\{\frac{1}{E+(M-e+1)c}, \frac{1}{M-p+1+pc}\right\} \quad , (6.6)$$
$$c \leq 1$$

que, por comodidad, podemos desglosar en dos igualdades:

$$\begin{array}{l} \max x^* = \dfrac{1}{E+(M-E+1)c} \\ E \geq M-p+1 \\ c \leq 1 \end{array} \quad ;$$

$$\begin{array}{l} \max x^* = \dfrac{1}{M-p+1+pc} \\ E \leq M-p+1 \\ c \leq 1 \end{array} \qquad (6.7)$$

Cualquiera de las dos expresiones alcanza un valor máximo constante con respecto a E y p igual al umbral de exclusión ordinal o estructural $1/(M+1)$ cuando $c=1$, es decir, con el método D'Hondt. Sin embargo, ninguna de estas expresiones maximiza el valor del umbral cuando el término c de ajuste es mayor que la unidad. En este caso, la expresión (6.6) alcanza su máximo cuando el número k de partidos es el mínimo absoluto (k=2), los "restos" de eventuales terceros partidos son iguales a cero, y el número de escaños asignados sin empate es el máximo correspondiente:

$$\max_{c \geq 1} x^* = \frac{1}{M - 1 + 2c} . \qquad (6.8)$$

En las fórmulas de tipo mayoritario, el máximo divisor umbral se realiza en la competición bipartidista.

6.3. Funciones de umbral de los métodos de divisores

Debe notarse que en los casos de funcionamiento "normal" de la fórmula electoral, es decir, cuando no hay empates, el valor de x que resuelve en problema de asignación no es único, sino un recorrido entre dos valores que designamos x^+ y x^-. El mayor de estos valores es igual al del menor cociente que obtiene un escaño empleando el algoritmo de asignación de tipo B, el menor de estos valores es una fracción muy próxima al mayor cociente que no obtiene un escaño, pero mayor que el mismo. Ahora bien, en un problema de asignación entre p partidos en el que uno de ellos obtiene al menos E escaños, el máximo divisor umbral siempre es mayor que cualquier x^- y el mínimo divisor umbral siempre es menor que cualquier x^+. Aunque algunos casos de distribución de M escaños entre p partidos puedan resolverse con un divisor mayor que el máximo divisor umbral, el máximo divisor umbral también los resuelve, pues forma parte del recorrido de posibles valores de x que resuelve el problema. Lo mismo vale decir, *mutatis mutandis*, para el mínimo divisor umbral.

De este modo, puede establecerse la identidad entre el divisor mínimo x_{MIN} y el mínimo divisor umbral, así como entre el divisor máximo x_{MAX} y el máximo divisor umbral, para cualquier vector v con p componentes que se disputan M escaños, con una fórmula de divisores constantes basada en un criterio $c(E)$.

De la definición del método de divisores se sigue que para cualquier partido i debe ser cierto que

$$c(E_i-1)\leq v_i/x\leq c(E_i)$$

A partir de esta desigualdad pueden establecerse los votos mínimos y máximos con los que un partido de referencia puede tener E escaños:

$$v_{\text{MIN}}(E)=(E-1+c)x_{\text{MIN}};$$
$$v_{\text{MAX}}(E)=(E+c)x_{\text{MAX}}.$$

6.3.1. Métodos proporcionales

Los votos mínimos y máximos son una función del número de escaños, de la magnitud del distrito, del número de partidos y del término de ajuste c que caracteriza al método de divisores. La función generatriz de las funciones de votos mínimos para los métodos proporcionales, así como para los mayoritarios, es

$$v_{MIN}(E,M,p,c)=\frac{E-1+c}{M-1+pc} \qquad (6.9)$$
$$c\geq 0$$

donde $1\leq E\leq M$. La función no está definida, como tal, para E=0, aunque sea obvio que los votos mínimos para obtener cero escaños, si la gramática de esta proposición tiene sentido, son igual a cero con todos los métodos. La función de votos mínimos es una función lineal de E, dados M, p y c. Si se incluyese el valor E=0 dentro del recorrido de la fórmula, la función sólo sería lineal con respecto a

E para $E \geq 1$, excepto en el método D'Hondt (c=1), cuando siempre sería lineal.

La función generatriz de las funciones de votos máximos para los métodos proporcionales es

$$\begin{aligned} & v_{MAX}(E,M,p,c) = \frac{E+c}{M+1+p(c-1)} \\ & E \leq M-p+1 \\ & 0 \leq c \leq 1 \\ & \\ & v_{MAX}(E,M,p,c) = \frac{E+c}{(M+1)c+E(1-c)} \\ & E \geq M-p+1 \qquad , \\ & 0 \leq c \leq 1 \end{aligned} \tag{6.10}$$

donde $0 \leq E \leq M-1$. La función de votos máximos está definida para E=0, pero, por convención, no lo está para E=M. Los votos máximos para lograr todos los escaños son, por definición, el 100%. Este es, de hecho, el valor que arroja la ecuación (6.10), por lo que puede decirse que la exclusión del último valor del recorrido de la función es una convención innecesaria. Sin embargo, en los métodos mayoritarios esta convención se vuelve importante.

La función de votos máximos es una función lineal hasta E=M-p+1 y curva, de pendiente decreciente, a partir de este punto de inflexión. Sólo la función del método D'Hondt es lineal en todo su recorrido, aunque todas lo son, como sabemos, si el número de partidos se reduce a dos.

La función de votos necesarios es idéntica a la función de votos mínimos: $v_{NEC}(E)$=$v_{MIN}(E)$; mientras que la función de votos suficientes se obtiene a partir de la función de votos máximos: $v_{SUF}(E)$=$v_{MAX}(E-1)$. De esto modo, los umbrales de votos suficientes se generan a partir de la función

$$v_{SUF}(E,M,p,c)=\frac{E-1+c}{M+1+p(c-1)}$$
$$E\leq M-p+2 \quad ,$$
$$0\leq c\leq 1$$

$$v_{SUF}(E,M,p,c)=\frac{E-1+c}{(M+1)c+E(1-c)-1+c}$$
$$E\geq M-p+2 \qquad (6.10b)$$
$$0\leq c\leq 1$$

donde $1\leq E\leq M$. La función de votos suficientes está definida para un mismo recorrido que la función de votos mínimos o necesarios. Las funciones de votos suficientes son, lógicamente, paralelas a las de votos máximos.

Por último, puede resultar conveniente destacar en una expresión separada la función generatriz de los umbrales de inclusión y de exclusión de los métodos como función de la magnitud y el número de partidos. El umbral de inclusión son los votos mínimos o necesarios para un escaño; el umbral de exclusión son los votos máximos para cero escaños, o los votos suficientes para un escaño:

$$U_{IN}=\frac{c}{M-1+pc},$$
$$c\geq 0$$

$$U_{EX}=\frac{c}{M+1+p(c-1)} \quad , \quad U_{EX}=\frac{1}{M+1} \quad . \qquad (6.11)$$
$$p\leq M+1 \qquad\qquad p\geq M+1$$
$$0\leq c\leq 1 \qquad\qquad 0\leq c\leq 1$$

6.3.2. Métodos mayoritarios

La función generatriz de las funciones de votos mínimos o suficientes de los métodos mayoritarios es la misma que la de los métodos proporcionales (6.9), por lo que no requiere de mayor aclaración. La función generatriz de los votos máximos tiene una distinta pendiente (el divisor máximo es mayor que en los métodos proporcionales:

$$v_{MAX}(E,M,p,c) = \frac{E+c}{M-1+2c}, \qquad c \geq 1 \tag{6.12}$$

donde $0 \leq E \leq M-1$. O bien,

$$v_{SUF}(E,M,p,c) = \frac{E-1+c}{M-1+2c} \qquad c \geq 1 \tag{6.12b}$$

donde $1 \leq E \leq M$.

Es importante observar que , de incluirse el valor M en el recorrido de la función, la fórmula (6.12) no señalaría al 100% como los votos máximos para M escaños, sino a una cantidad inferior, lo que no tendría sentido. De aquí que sea necesario excluir el valor $E=M$ del recorrido de las funciones de votos máximos y establecer de modo independiente que, por definición, los votos máximos para $E=M$ son la totalidad de los votos.

Las funciones de votos máximos y las funciones de votos suficientes son funciones lineales con respecto a E. Puede notarse que las expresiones (6.12) y (6.12b) coinciden con (6.10) y (6.10b) cuando $c=1$, es decir, con el método D'Hondt que, no obstante, es un método indiscutiblemente proporcional.

Los umbrales de inclusión de los métodos mayoritarios se generan, lógicamente, a partir de la misma ecuación que los de los métodos proporcionales. Los umbrales de exclusión de los métodos mayoritarios son siempre mayores que el umbral ordinal $1/(M+1)$, aunque la expresión que los genera tenga ese valor como caso límite, cuando $c=1$:

$$U_{EX} = \frac{c}{M-1+2c} \,. \qquad (6.13)$$
$$c \geq 1$$

6.3.3. Métodos igualitarios

Las funciones generatrices de las funciones de umbral de los métodos igualitarios son, esencialmente, las mismas que en los métodos proporcionales. Recuérdese que un método igualitario es equivalente a la distribución igualitaria de una parte de los escaños, característica de las fórmulas de prorrateo, seguida de la asignación de los restantes mediante un método proporcional.

Las funciones de votos mínimos se generan a partir de la expresión:

$$v_{MIN}(E,M,p,c) = med\left\{0{,}1,\frac{E-1+c}{M-1+pc}\right\}, \qquad (6.14)$$
$$c \leq -1$$

donde *med* se lee como término intermedio. Análogamente, las funciones de votos máximos se generan a partir de la expresión:

$$v_{MAX}(E,M,p,c) = med\left\{0,1,\frac{E+c}{M+1+p(c-1)}\right\}$$
$$E \leq M-p+1$$

$$v_{MAX}(E,M,p,c) = med\left\{0,1,\frac{E+c}{(M+1)c+E(1-c)}\right\}.$$
$$E \geq M-p+1$$

(6.15)

6.4. Fórmulas simples de cuota: empates competitivos y resto umbral

Recordemos que una fórmula de cuota y restos mayores basada en la cuota q_n puede caracterizarse como sigue:

$$
\begin{aligned}
&F_n(\mathbf{v},M)=\{\mathbf{E}\text{: } E_i=f(\mathbf{v},M)+h(g(\mathbf{v},M))\}\\
&f(\mathbf{v},M)=\mathbf{S}\text{: } S_i=\lfloor v_i/q_n\rfloor\,;\ q_n=1/(M+n);\ -1\leq n\leq 1;\ \textstyle\sum S_i\leq M\,.\\
&g(\mathbf{v},M)=\mathbf{r}\text{: } r_i=(v_i/q_n)-\lfloor v_i/q_n\rfloor\\
&h(g(\mathbf{v},M)=\{\mathbf{b}\text{: } b_i=\ 1 \text{ si } r_i\geq r\\
&\qquad\qquad\qquad\quad 0 \text{ si } r_i\leq r \text{ y } \textstyle\sum b_i=M-\sum S_i \text{ para algún } r\,\}.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Sea r un resto que resuelve un problema de asignación de M escaños para un vector $\mathbf{v}$ de p partidos empleando una cuota $q_n=1/(M+n)$ y sea $l\leq p$ el número de partidos con un resto mayor o igual a r. Sea R el número de escaños que el método debe atribuir por restos: $R=M-\sum S_i$. Fácilmente se comprueba que una fórmula $F_n(\mathbf{v},M)$ produce una única asignación $\mathbf{E}$ si y sólo si $R=0$ o $l=R$. Si $R=0$, entonces $\sum S_i=M$ y $\mathbf{E}=\mathbf{S}$. Todos los partidos obtienen escaños iguales a su cuota inferior y ningún resto obtiene escaños. Si $l=R$, entonces los l partidos con un mayor resto obtienen su cuota superior $E_i = S_i + 1$, mientras que $p-l$ partidos obtienen su cuota entera inferior. Este es el funcionamiento "normal" de la fórmula.

Definamos un *resto-umbral* como un resto r^* que resuelve la asignación en $F_n(\mathbf{v},M)$ de manera que $l>R$. Esto sólo puede suceder en un subconjunto de las distribuciones $\mathbf{v}$ de votos que son posibles, cuando se produce un empate entre restos de modo que al menos dos partidos tienen restos iguales a r^* . Llamemos k al número de partidos $2 \leq k \leq l$ con un resto igual a r^*. Si el resto es un resto umbral, el valor mínimo de k es $k=2$, cuando el resto R-ésimo es igual al resto $R+1$-ésimo. Cuando se produce un empate de este tipo, que llamaremos *empate competitivo*, no existe un r tal que pueda discriminar R partidos con restos mayores o iguales que el mismo, sino que, para cualquier valor de $r>r^*$, es el caso que $l<R$. Ningún valor mayor que el resto umbral produce una solución en el método de reparto, pues siempre deja escaños sin asignar. El resto umbral es una solución para la fórmula, pero no produce una única asignación, sino un conjunto de múltiples elementos en los que algunos de los k partidos reciben distinta asignación por idénticos restos.

Así, cuando un método $F_n(\mathbf{v}, M)$ produce un empate competitivo, el único resto que resuelve el problema de asignación es un resto umbral r^*, que distingue tres tipos de partidos en $\mathbf{r}$: de un lado, $l-k$ partidos, tales que $l-k \leq R-1$, con restos mayores que el resto r^* ; de otro lado, k partidos tales que $2 \leq k \leq l$, con restos igual a r^*; y, por último, $p-l$ partidos con restos menores que el resto umbral.

El valor mínimo y máximo de un resto umbral puede determinarse como una función de M y p, esto es, para cualquier vector de votos con p componentes que compiten por M escaños. Sin embargo, es más interesante averiguar cuáles son los valores del resto umbral que se asocian a una tercera constante, a saber, un número E de escaños. Para determinar los valores máximo y mínimo del resto umbral, comenzamos por introducir el supuesto de que no hay ningún partido con restos mayores que el resto umbral ($k=l$), de manera que el empate es *máximamente competitivo*, pues todos los partidos que pueden obtener un escaño en el reparto de restos (que lo obtienen en al menos una de las asignaciones del conjunto que son resultado de la fórmula) lo hacen con idéntico resto. De este modo, suponemos que nos encontramos ante un problema de asignación $F_n(\mathbf{v}, M)$ tal que

$$2 \leq R+1 \leq k \leq p. \tag{6.19}$$

Queremos averiguar cuál es el mayor y menor resto umbral que se asocia a un número E de escaños para un partido de referencia. Por definición, el número de escaños que se asignan por restos es $R=M-\sum S_i$. Supongamos que uno de los partidos obtiene su cuota inferior igual a E escaños. Entonces,

$$R = M - (\sum_{i=1}^{p-1} S_i + E)\,. \tag{6.20}$$

En (6.19), el valor máximo de R se determina simultáneamente al valor mínimo de k, por lo que ambos están indeterminados, tomando valores entre $R=1$, con $k=2$, y $R=p-1$ con $k=p$. Ahora bien, en (6.20) encontramos un valor máximo de R en función de M y de E ($M-E \leq R$). Puesto que M, E, y p son constantes, por (6.19) y (6.20) podemos escribir los valores mínimos y máximos de R y de k como

$$\begin{aligned} &\min R = 1 \\ &\max R = \min \{M-E,\, p-1\} \\ &\min k = \max \{M-E+1,\, p\} \\ &\max k = p \end{aligned} \tag{6.21}$$

El valor máximo de R es igual a $M-E$ cuando $E \geq M-p+1$ e igual a $p-1$ cuando $E \leq M-p+1$. Los valores mínimos de k se determinan como función de R.

Por definición del método de cuota y restos mayores (6.16), para cada partido i podemos escribir $v_i/q_n = S_i + r_i$. Igualmente, podemos sumar los componentes de cada uno de los vectores. $\sum v_i/q_n = \sum S_i + \sum r_i$. Si k partidos tienen un resto igual a r^* y un partido suma E cuotas, entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{v_i}{q_n} = \sum_{i=1}^{p-1} S_1 + E + kr^* + \sum_{i=1}^{p-k} r_i \,.$$

Teniendo en cuenta que la constante q_n es igual a $1/(M+n)$, podemos transformar las expresión como

$$r^* = \frac{M + n - (\sum_{i=1}^{p-1} S_1 + E) - \sum_{i=1}^{p-k} r_i}{k},$$

o bien,

$$r^* = \frac{R + n - \sum_{i=1}^{p-k} r_i}{k}.$$

El mínimo de r^* se realiza cuando el número de escaños que deben asignarse por restos es mínimo, el número de partidos que compiten por el escaño es máximo (k=p) y la suma de los restos de los p-k partidos es, lógicamente, nula:

$$\min r^* = \frac{1+n}{p}. \qquad (6.22)$$

Debe notarse que el mínimo resto umbral es independiente del número de escaños a los que se encuentra asociado, e incluso de la magnitud del distrito. Si un partido obtiene E escaños, el resto umbral mínimo se realiza cuando entre todos los demás partidos suman $M-E-1$ cuotas, de manera que el escaño en disputa por los restos es uno y todos los partidos tienen igual "derecho" al mismo, obteniéndolo en cada una de las p asignaciones que son un posible resultado de la fórmula.

El valor máximo de r^* se realiza cuando el número de escaños que deben asignarse por restos es máximo, el número de partidos que compiten por los mismos es mínimo y la suma de los restos de los $p-k$ partidos es nula:

$$\max r^* = \min\left\{\frac{M-E+n}{M-E+1}, \frac{p-1+n}{p}\right\}. \qquad (6.23)$$

Este valor sí es una función de E. Cuando $E \geq M-p+1$, el valor máximo de r^* es una función de M, E y n; cuando $E \leq M-p+1$, el máximo resto umbral es una función del modificador y del número de partidos.

El valor mínimo del resto umbral r^* no depende del supuesto inicial que hemos introducido al efecto de igualar el número k de partidos, con restos iguales al resto umbral, al número l de partidos, con restos mayores o iguales al resto umbral, ya que ambos números son iguales a p. Sin embargo, el valor máximo del resto umbral sí depende de este supuesto. Supongamos, a modo de contradicción, que el número de partidos k es menor que el número l de partidos que, por hipótesis, pueden reclamar más de R escaños con sus restos cuando el problema sólo es resoluble mediante un resto umbral. Supongamos, en definitiva, que el empate no es máximamente competitivo sino que implica a un número igual o mayor que dos partidos, pero no necesariamente a todo el subconjunto l partidos.

Es sencillo asegurarse de que el valor máximo del resto umbral en un empate máximamente competitivo es mayor que el valor máximo de un resto umbral en un empate que no fuera máximamente competitivo. En este último caso, el resto umbral máximo dependería también del tamaño de los restos de los partidos con restos mayores al resto igual. Si $k < l$:

$$\max r^{*} = \min\left\{ \frac{M - E + n - \sum_{i=1}^{l-k} r_i}{M - E + 1 - (l - k)}, \frac{p - 1 + n - \sum_{i=1}^{l-k} r_i}{p - (l - k)} \right\}.$$

Esta expresión siempre es menor que (6.23), pues el numerador se reduce en una cuantía menor o igual que el denominador, luego el mínimo resto umbral se produce cuando todos los partidos tienen idénticos restos. Así, podemos definir el *empate máximamente competitivo por la inclusión* como el empate en el que todos los partidos compiten con el mínimo resto umbral por un único escaño. El *empate máximamente competitivo por la exclusión* se produce cuando $R+1$ partidos compiten por R escaños con restos iguales. En un sistema bipartidista ambos empates son equivalentes. Cuando, en un problema de asignación de escaños, se produce un empate máximamente competitivo por la inclusión, el resto umbral tiene un valor mínimo; cuando se produce un empate máximamente competitivo por la exclusión, el resto umbral cobra su máximo valor.

La probabilidad de que, para un vector v, se produzca un empate competitivo en $F_n(\mathrm{v}, M)$ es, en general, muy baja. La probabilidad de que se produzca un empate máximamente competitivo es despreciable. El valor analítico de estas construcciones reside en que nos permite determinar el resto mínimo y máximo asociado a un número E de escaños en una competición entre p partidos, cualquiera que sea la distribución del voto. Esto nos permite, a su vez, construir las funciones de pagos.

Debe notarse que en los casos de funcionamiento "normal" de la fórmula electoral, es decir, cuando no hay empates (k=0), el valor de r que resuelve en problema de asignación no es único, sino un recorrido entre dos valores que designamos r^+ y r^-. El mayor de estos valores es igual al del menor resto que obtiene un escaño añadido a la cuota inferior (el resto R-ésimo), el menor de estos valores es una fracción muy próxima al mayor resto que no obtiene un escaño añadido (el resto $R+1$-ésimo), pero mayor que el mismo. Ahora bien, en un problema de asignación entre p partidos en el que uno de ellos obtiene al menos E escaños, el máximo resto umbral siempre es mayor que cualquier r^- y el mínimo resto umbral siempre es menor que cualquier r^+. Aunque algunos casos de distribución de M escaños entre p partidos puedan resolverse con un resto mayor que el máximo resto umbral, el máximo resto umbral también los resuelve, pues forma parte del recorrido r^+ a r^- que resuelve el problema. Lo mismo vale decir, *mutatis mutandis*, para el mínimo resto umbral.

De este modo, puede establecerse la identidad entre el resto mínimo r_{MIN} y el mínimo resto umbral, así como entre el resto máximo r_{MAX} y el máximo resto umbral, para cualquier vector v con p componentes que se disputan M escaños, con una fórmula de cuta modificada en $-1 \leq n \leq 1$.

6.4.1. Un ejemplo

El cuadro 6.2. muestra los empates competitivos entre cinco partidos en una circunscripción de cuatro escaños que se distribuyen mediante cuota simple q_0=0,25. La primera columna dentro de cada caso indica las frecuencias de los votos, mientras que la segunda indica el cociente entre los votos y la cuota. El número entero de dicho cociente es la cuota inferior de cada partido, la parte no entera es el resto que compite por los R escaños no asignados por cuota entera.

Los diez empates genuinamente distintos son los casos 1 a 10. El caso 1 es el empate máximamente competitivo por la inclusión. Los casos 7 a 10 son empates máximamente competitivos por la exclusión dado un E igual a cero, uno, dos y tres, respectivamente. Los casos 2 a 6 son empates máximamente competitivos en los que el resto umbral tiene un valor intermedio entre el valor máximo y el mínimo.

Los casos 3, 6 y 10 serían empates máximamente competitivos por la inclusión si la magnitud M se redujese, respectivamente, a tres, dos y uno. Los casos 2, 4 y 7 serían empates máximamente competitivos por la inclusión si el número de candidaturas p se redujese a cuatro, tres y dos respectivamente.

El caso 10 es el empate máximamente competitivo por la exclusión en el que el resto umbral tiene un valor absoluto máximo, cuando ningún escaño ha sido asignado por cuota y $M+1$ partidos compiten por M escaños. El caso representa la situación en la que se verifica el umbral de exclusión del primer escaño. En los casos 9, 8 y 7 algunos escaños son asignados por cuota, por los que el número de partidos que reciben votos disminuye si el resto umbral ha de ser máximo. Los casos 11 y 12 sirven para ilustrar que si el número de partidos p fuese p=3 o p=2, el resto máximo para cero, uno o dos escaños no sería el mismo que el que reflejan los casos 10, 9 y 8, sino que sería constante hasta E=M-p+1.

Cuadro 6.2. Empates competitivos entre cinco partidos en una circunscripción de M=4 escaños. Método de divisores de Sainte-Laguë (c=0,5).

Caso 1	x^* =0,182
v	v/x^*
0,63636364	3,5
0,09090909	0,5
0,09090909	0,5
0,09090909	0,5
0,09090909	0,5

Caso 2	x^* =0,2
v	v/x^*
0,7	3,5
0,1	0,5
0,1	0,5
0,1	0,5
0	0

Caso 3	x^* =0,22
v	v/x^*
0,55555556	2,5
0,11111111	0,5
0,11111111	0,5
0,11111111	0,5
0,11111111	0,5

Caso 4	x^* =0,22
v	v/x^*
0,77777778	3,5
0,11111111	0,5
0,11111111	0,5
0	0
0	0

Caso 5	x^* =0,25
v	v/x^*
0,625	2,5
0,125	0,5
0,125	0,5
0,125	0,5
0	0

Caso 6	x^* =0,286
v	v/x^*
0,42857143	1,5
0,14285714	0,5
0,14285714	0,5
0,14285714	0,5
0,14285714	0,5

Caso 7	x^* =0,25
v	v/x^*
0,875	3,5
0,125	0,5
0	0
0	0
0	0

Caso 8	x^* =0,286
v	v/x^*
0,71428571	2,5
0,14285714	0,5
0,14285714	0,5
0	0
0	0

Caso 9	x^* =0,33
v	v/x^*
0,5	1,5
0,16666667	0,5
0,16666667	0,5
0,16666667	0,5
0	0

Caso 10	x^* =0,4
v	v/x^*
0,2	0,5
0,2	0,5
0,2	0,5
0,2	0,5
0,2	0,5

6.5. Funciones umbral de las fórmulas de cuota y restos mayores

De la definición del método de cuota y restos mayores se sigue que para cualquier partido i debe ser cierto que

$$E_i - 1 + r_{\mathrm{MIN}} \leq v_i/q_n \leq E_i + r_{\mathrm{MAX}}.$$

A partir de esta desigualdad pueden establecerse los votos mínimos y máximos con los que un partido de referencia puede tener E escaños:

$$v_{\mathrm{MIN}}(E) = (E-1+r_{\mathrm{MIN}})q_n;$$
$$v_{\mathrm{MAX}}(E) = (E+r_{\mathrm{MAX}})q_n.$$

Los votos mínimos y máximos son una función del número E de escaños, el número de partidos y el tamaño de la cuota (la magnitud del distrito y el modificador).

6.5.1. *Fórmulas simples*

Consideremos en primer lugar a las fórmulas de cuota con cuota modificada dentro del intervalo decisivo, que sin duda constituyen el tipo de casos más general dentro de esta familia de fórmulas. La función generatriz de los votos mínimos es la función

$$v_{MIN}(E, M, p, n) = \frac{E-1}{M+n} + \frac{1+n}{p(M+n)}, \qquad (6.24)$$

donde $-1 \leq n \leq 1$ y $1 \leq E \leq M$. La función generatriz de los votos máximos es una función que puede tener dos tramos, dependiendo de la relación entre el número de partidos, la magnitud electoral y el número de escaños que el partido de referencia obtiene:

$$v_{MAX}(E,M,p,n)=\frac{E}{M+n}+\frac{p-1+n}{p(M+n)},$$
$$E\leq M-p+1;$$
$$v_{MAX}(E,M,p,n)=\frac{E}{M+n}+\frac{M-E+n}{(M-E+1)(M+n)},$$
$$E\geq M-p+1.$$

(6.25)

donde $-1\leq n\leq 1$ y $0\leq E\leq M-1$.

Los votos necesarios para lograr E escaños son los votos mínimos: $v_{\mathrm{NEC}}(E)=v_{\mathrm{MIN}}(E)$. El umbral de votos suficientes para lograr E escaños son los votos máximos con los que un partido puede tener $E-1$ escaños. Esta función presupone que el partido de referencia supera el umbral.

$$v_{SUF}(E,M,p,n)=\frac{E-1}{M+n}+\frac{p-1+n}{p(M+n)},$$
$$E\leq M-p+2;$$
$$v_{SUF}(E,M,p,n)=\frac{E-1}{M+n}+\frac{M-E-1+n}{(M-E)(M+n)},$$
$$E\geq M-p+2.$$

(6.25b)

donde $-1\leq n\leq 1$ y $1\leq E\leq M$.

Tal vez convenga subrayar, por último, que los umbrales de inclusión y de exclusión se corresponden con los restos mínimos y máximos respectivamente. De manera que

$$U_{IN} = \frac{n+1}{p(M+n)},$$

$$U_{EX} = \frac{p-1+n}{p(M+n)}, \qquad U_{EX} = \frac{1}{M+1}. \qquad (6.26)$$

$$p \leq M+1 \qquad\qquad p \geq M+1$$

6.5.2. *Fórmulas compuestas*

Las funciones de umbral de las fórmulas compuestas son un híbrido entre la función de umbral de la cuota tentativa o falsa cuota y la función de umbral de la cuota de reserva. Para las cuotas disminuidas tales que $n>1$, como las fórmulas de cuota Imperiali (Q+1+2) o Imperiali reforzada (Q+1+3), los votos máximos (o los votos suficientes) son los de la fórmula de cuota de reserva que, por una convención que sigue a la práctica habitual, suponemos que es la cuota Droop (Q+1). Los votos mínimos se obtienen a partir de la misma función generatriz que en el caso general (6.24), de donde podemos eliminar la restricción $n \leq 1$ e introducir valores como n=2 o n=3.

Para las cuotas aumentadas tales que $n<-1$, en tanto que funcionan como falsas cuotas de fórmulas compuestas, esto es, cuando $|n|<p<M$, los términos se invierten. De un lado, los votos máximos (o los votos suficientes) se determinan a partir de la misma función generatriz que en el caso general (6.25) (6.25b), de la que podemos eliminar la restricción que se refiere al límite inferior del intervalo decisivo de n. De otro lado, los votos mínimos son idénticos a los votos mínimos de la función correspondiente a la cuota de reserva, que, por convención, suponemos que es la cuota larga Q-1.

6.5.3. *Fórmulas q-igualitarias*

Las cuotas alargadas tales que $n<-1$ no son falsas cuotas cuando el número de partidos es igual o mayor que la magnitud electoral, $p \geq M$, sino cuotas limitadas. Las cuotas limitadas de este tipo, de los que el sistema VUNT es el caso límite, son la base de las fórmulas Q-igualitarias. Los votos máximos (o los votos suficientes) de las fórmulas Q-igualitarias se determinan a partir de la misma función generatriz que en el caso general (6.25) (6.25b), de la que ya sabemos que se puede eliminar la restricción $-1 \leq n$. Los votos mínimos se determinan teniendo en cuenta que el resto mínimo en este tipo de fórmulas siempre es $r_{\mathrm{MIN}}=0$. De este modo, para este tipo de fórmulas, los votos mínimos son

$$v_{MIN}(E,M,p,n) = \min\left\{1, \frac{E-1}{M+n}\right\}, \tag{6.27}$$

donde $n \leq -1$ y $p \geq M$. Los votos máximos pueden, a su vez, determinarse a partir de la expresión

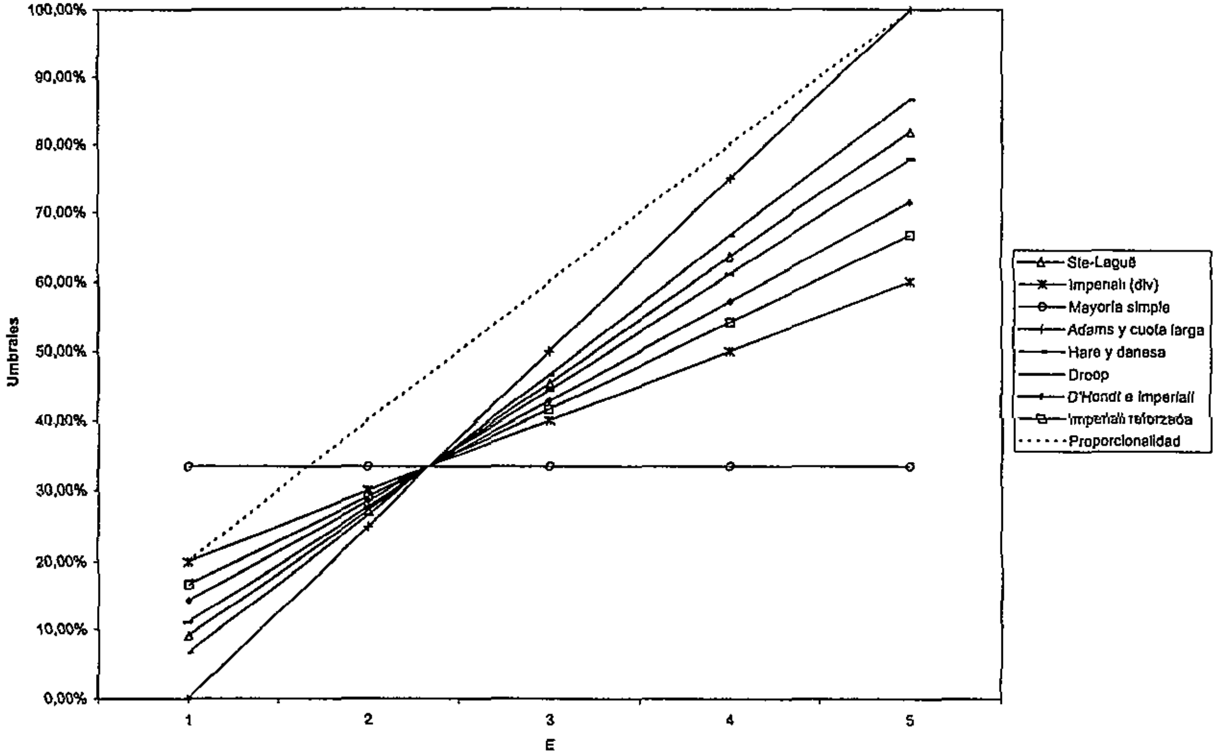
$$v_{MAX}(E,M,p,n) = \min\left\{1, \frac{E}{M+n} + \frac{p-1+n}{p(m+n)}, \frac{E}{M+n} + \frac{M-E+n}{(M-E+1)(M+n)}\right\} \tag{6.28}$$

donde $n \leq -1$ y $p \geq M$.

6.6. Posición e inclinación de las funciones de umbrales

Todas las funciones de votos mínimos o necesarios de los métodos de divisores así como todas las funciones de votos mínimos de los métodos de cuota tales que el modificador es $n \geq -1$ se cruzan en un mismo punto. Con todas ellas, el umbral $v=1/p$

Gráfico 6.1. Funciones de votos mínimos de algunas fórmulas proporcionales y mayoritarias. M=5, p=3.



representa los votos mínimos para obtener $E=1+(M-1)/p$. La igualdad en los votos, o el tamaño medio de los partidos, o la mínima mayoría relativa, es condición necesaria para obtener un escaño más la parte alícuota de los restantes, si los hubiera, con probabilidad mayor que cero. Sin embargo, las funciones de votos mínimos o necesarios de los métodos de cuota tales que el modificador es $n \leq -1$, coinciden todas en el punto $v=0$ y $E=1$. El gráfico 6.1 muestra ambos haces de fórmulas superpuestos.

Todas las funciones de votos máximos (y las de votos suficientes) de los métodos de divisores tales que $c \leq 1$, así como todas las funciones de votos máximos de los métodos de cuota modificada tal que $n \leq 1$ se cruzan en un mismo punto[1], pero este es distinto si el número de partidos es $p \leq M$ o $p \geq M+1$. En el primer caso, los votos máximos para obtener $E=(M+1)/p-1$, o los votos suficientes para obtener $E=(M+1)/p$, son $v=1/p$ con cualquiera de las fórmulas referidas. La mínima mayoría relativa en el reparto de los votos es condición suficiente para una asignación que consiste en la mínima mayoría relativa en la distribución de los escaños. En el segundo caso, los votos máximos para obtener $E=0$, o los votos suficientes para $E=1$, son, con cualquiera de las fórmulas, iguales al umbral de exclusión ordinal o estructural $v=1/(M+1)$. Con cualquier fórmula, si el partido de referencia alcanza una fracción de votos tales que no puede ser ordenado como el partido $M+1$-ésimo, con ninguna distribución de los votos entre cualquier número de competidores, entonces el partido de referencia obtiene al menos un escaño (gráficos 6.2 y 6.3).

Las funciones de votos suficientes de los métodos de divisores tales que $c \geq 1$ se cruzan en el punto $v=½$, $E=(M+1)/2$. Con estos métodos, siempre es condición suficiente rebasar la mayoría absoluta de los votos para obtener la mayoría absoluta de los escaños (gráfico 6.4).

---

[1] Las funciones de votos máximos, o suficientes, de las cuotas modificadas tales que $n > 1$ son las de la cuota de reserva $n=1$.

Gráfico 6.2. Funciones de votos máximos de algunas fórmulas proporcionales *M*=5, p=3.

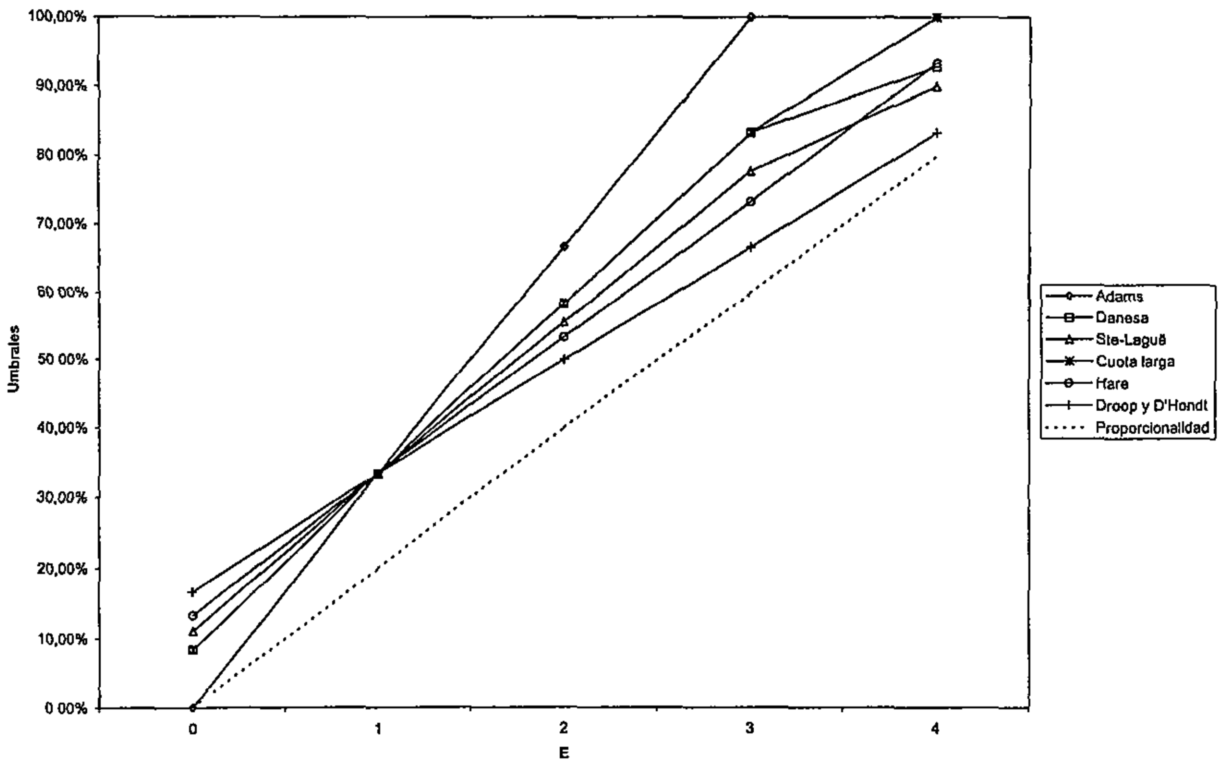


Gráfico 6.3. Funciones de votos máximos de algunas fórmulas proporcionales. M=5, p=6.

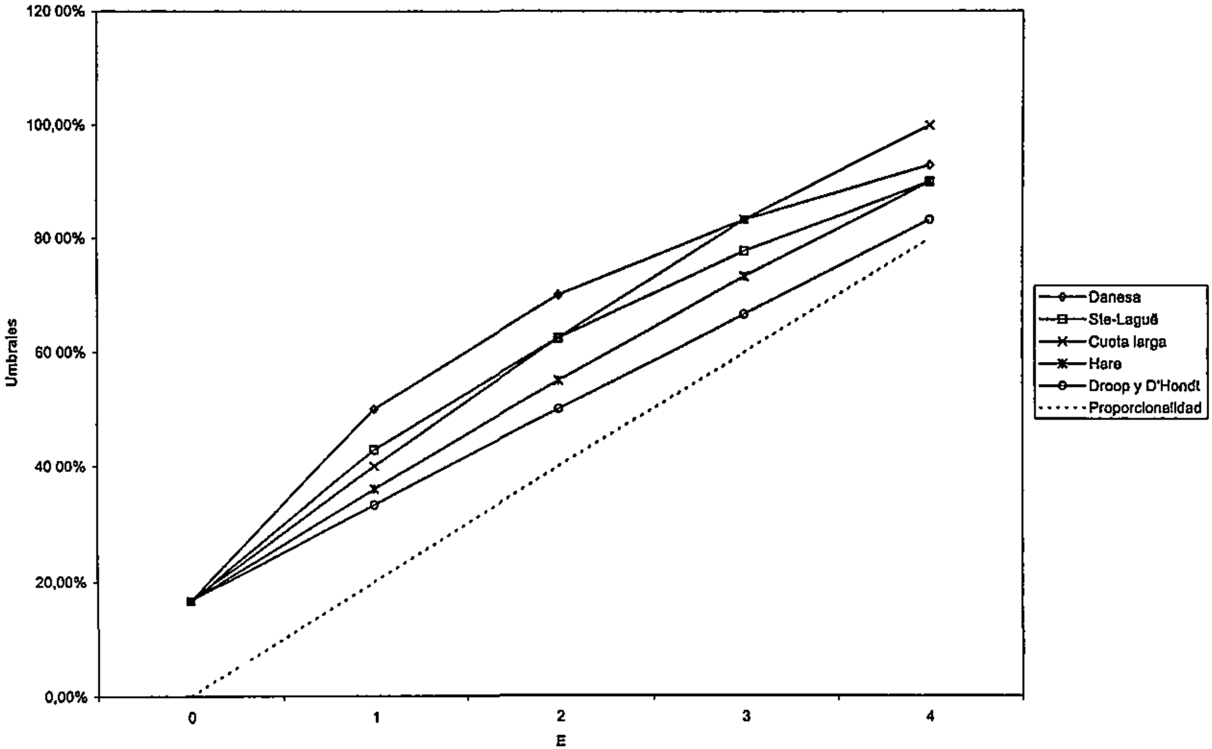
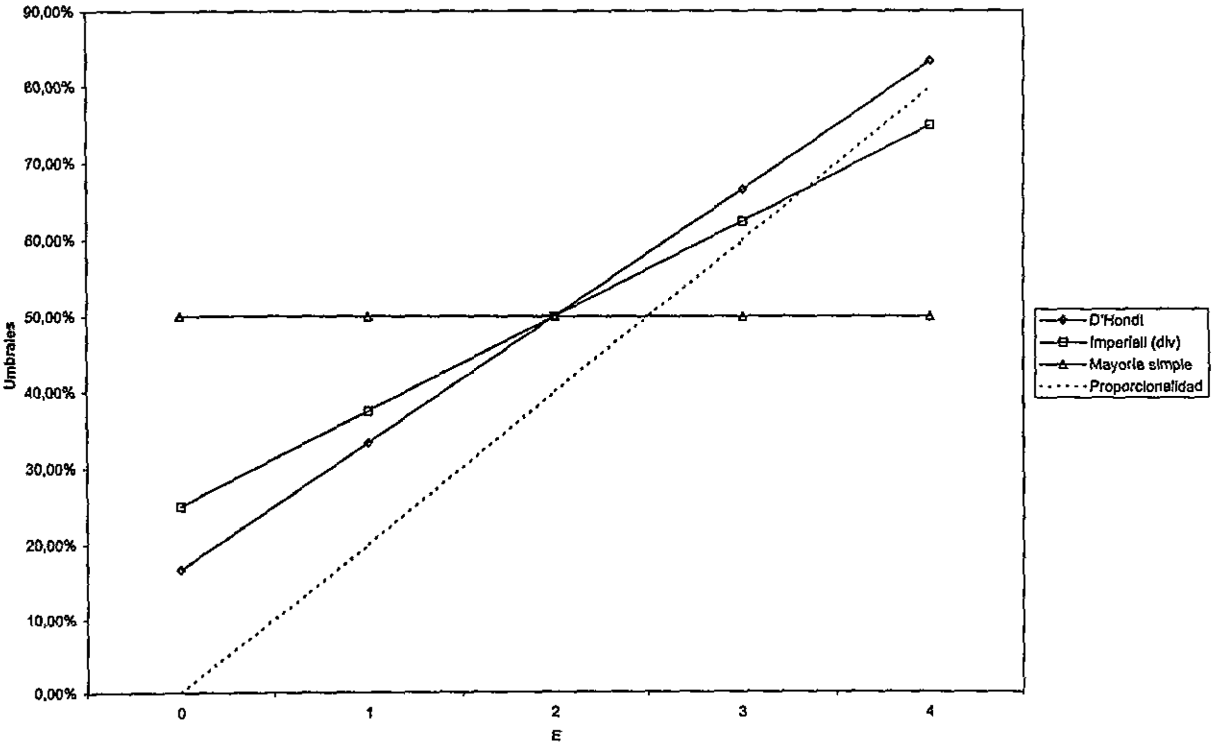


Gráfico 6.4. Funciones de votos máximos de dos métodos mayoritarios y del método D'Hondt



La forma de las funciones de votos mínimos de las dos familias de métodos de representación es la siguiente:

métodos de cuota: $v_{\mathrm{MIN}}(E)=(E-1)q_n+U_{\mathrm{IN}}$;
métodos de divisores: $v_{\mathrm{MIN}}(E)=(E-1)x_{\mathrm{MIN}}+U_{\mathrm{IN}}$;

donde $1\leq E\leq M$. Tanto las pendientes como las constantes son constantes con respecto a E, aunque sean funciones de M, p y del tipo de fórmula. Nótese que, aunque no se introduzca una notación específica, el umbral de inclusión es diferente en cada caso. Las pendientes de estas funciones, tanto la cuota como el divisor mínimo, son constantes con respecto a E (6.5). La pendiente marca, naturalmente, el incremento mínimo necesario por cada escaño añadido al primero. La constante de la función, cuando $E=1$, es el umbral de inclusión, o coste mínimo de cada escaño. De igual modo que en el caso bipartidista, cuanto mayor es la pendiente, menor es la constante, y a la inversa [(6.9) (6.11) (6.26) y (6.29)]: en una fórmula electoral, cuanto menos exigente es la condición necesaria para obtener la mínima representación, más exigente es la condición necesaria para incrementar la representación.

Si el número de partidos es $p\leq M+1$, las funciones de votos máximos de los métodos de cuota y de los métodos de divisores tales que $c\leq 1$ tienen un tramo inicial que puede escribirse como sigue:

métodos de cuota: $v_{\mathrm{MAX}}(E)=Eq_n+U_{\mathrm{EX}}$;
métodos de divisores: $v_{\mathrm{MAX}}(E)=Ex_{\mathrm{MAX}}+U_{\mathrm{EX}}$;

donde $0\leq E\leq M-p+1$. La función de votos suficientes se obtiene sustituyendo E por $E-1$.Las pendientes de ambas funciones, así como sus constantes, son constantes con respecto a E. Cuando los escaños son abundantes con respecto a los partidos en competición, la función de votos máximos reproduce la relación entre el coste de acceso y el coste de crecimiento que encontramos en la función de votos mínimos, como se observa comparando las expresiones de sus funciones generatrices [(6.10) (6.11) (6.25) y (6.26)].

Sin embargo, si el número de partidos es $p \geq M+1$, tanto las funciones de votos máximos de los métodos de cuota como las de los métodos de divisores tales que $c \leq 1$ son funciones complejas y no lineales con la forma:

métodos de cuota: $v_{MAX}(E) = Eq_n + q_n r_{MAX}(E)$;
métodos de divisores: $v_{MAX}(E) = Ex_{MAX}(E) + cx_{MAX}(E)$;

donde $\max(0, M-p+1) \leq E \leq M-1$. Ambas funciones complejas tienen el valor constante $1/M+1$ cuando $E=0$. Desde el punto de vista de los votos máximos, o condiciones suficientes, el coste del acceso a la representación es constante cuando los escaños son escasos con respecto al número de partidos. La pendiente de las funciones para el resto de los escaños es positiva y decreciente.

Por último, las funciones de los votos máximos de los métodos de divisores en los que el término de ajuste es $c \geq 1$, puede describirse siempre como $v_{MAX}(E) = Ex_{MAX} + U_{EX}$, teniendo en cuenta que el divisor y el umbral se generan a partir de funciones distintas que en los casos del párrafo anterior. Las funciones de votos máximos son lineales en todo su recorrido y el coste de acceso a la representación aumenta cuando disminuye el coste de la acumulación de escaños. El límite, ya lo sabemos, es la función plana de la fórmula mayoritaria simple.

6.7. Ejemplos de fórmulas conocidas

Las funciones generatrices que se han presentado implican las fórmulas correctas para las funciones de umbrales que Lijphart y Gibberd (1977) determinaron, bajo el nombre de funciones de pagos, para los métodos de Hare, D'Hondt y Sainte-Laguë. Naturalmente, ahora podemos determinar las funciones de cualquier fórmula. Las tablas de lo cuadros 6.3 y 6.4 recogen, en

Cuadro 6.3. Funciones de umbrales de algunos métodos de divisores.

Fórmula	Clave D+c	Votos mínimos $1 \leq E \leq M$	Votos máximos $0 \leq E \leq M-1$	
			$E \leq M-p+1$	$E \geq M-p+1$
Adams	D+0	$\frac{E-1}{M-1}$	$\frac{E}{M-p+1}$	1
Danesa	D+1/3	$\frac{3E-2}{3M+p-3}$	$\frac{3E+1}{3M-2p+3}$	$\frac{3E+1}{M+2E+1}$
Sainte Lague	D+1/2	$\frac{2E-1}{2M+p-2}$	$\frac{2E+1}{2M-p+2}$	$\frac{2E+1}{M+E+1}$
D'Hondt	D+1	$\frac{E}{M+p-1}$	$\frac{E+1}{M+1}$	$\frac{E+1}{M+1}$
Imperiali (divisores)	D+2	$\frac{E+1}{M+2p-1}$	$\frac{E+2}{M+3}$	$\frac{E+2}{M+3}$
Mayoría	$D+\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Cuadro 6.4. Funciones de umbrales de algunos métodos de cuota y restos mayores.

Fórmula	Clave Q+n	Votos mínimos $1 \leq E \leq M$	Votos máximos $0 \leq E \leq M-1$	
			$E \leq M-p+1$	$E \geq M-p+1$
"Cuota larga"	Q-1	$\frac{E-1}{M-1}$	$\frac{p(E+1)-2}{p(M-1)}$	$\frac{E}{M-1}+\frac{M-E-1}{(M-E+1)(M-1)}$
Hare	Q+0	$\frac{p(E-1)+1}{pM}$	$\frac{p(E+1)-1}{pM}$	$\frac{E}{M}+\frac{M-E}{(M-E+1)M}$
Droop	Q+1	$\frac{p(E-1)+2}{p(M+1)}$	$\frac{E+1}{M+1}$	$\frac{E+1}{M+1}$
Imperiali	Q+1+2	$\frac{p(E-1)+3}{p(M+2)}$	$\frac{E+1}{M+1}$	$\frac{E+1}{M+1}$
Imperiali reforzada	Q+1+3	$\frac{p(E-1)+4}{p(M+3)}$	$\frac{E+1}{M+1}$	$\frac{E+1}{M+1}$

expresiones compactas cuando esto es posible, las funciones de umbrales de algunas de las fórmulas más importantes. Las funciones de umbrales aparecen en la forma de votos mínimos y máximos, pero ya sabemos que la transformación de los segundos en umbrales de votos suficientes es inmediata.

Puede comprobarse que los umbrales de inclusión y exclusión a los que se reduce el primer valor de estas funciones son los mismos que los que se exponen en el cuadro 5.1 del capítulo 5. También puede comprobarse que todas las fórmulas electorales, o mejor sería decir, los sistemas electorales, son iguales cuando la magnitud es igual a uno. En ese caso, los votos suficientes para el único escaño (o los votos máximos para cero escaños) son siempre igual a ½, mientras que los votos necesarios son igual a $1/p$, o tamaño medio de los partidos.

Puede verse un ejemplo con los valores de los umbrales de votos necesarios y suficientes en una circunscripción de cinco escaños en el cuadro 6.5. Se trata, en realidad, de dos ejemplos: en el primero el número de partidos es menor que el de escaños, mientras que en el segundo es mayor. De este modo, puede apreciarse la diferencia entre los dos tramos de la función de votos suficientes (o máximos) a partir del punto de inflexión $E{=}M{-}p{+}2$ (o $E{=}M{-}p{+}1$ si empleamos el lenguaje de los votos máximos). Concretamente, los votos suficientes sólo coinciden en los dos últimos escaños al cambiar el número de partidos del supuesto: tres en el primero y seis en el segundo.

A diferencia de lo que sucede en un mundo con sólo dos partidos, no todas las funciones de umbral pasan por un mismo punto. Como veremos con más detalle en el próximo apartado, las funciones de votos suficientes (o máximos) de los métodos mayoritarios, así como las funciones de votos necesarios (o mínimos) de algunos de los métodos igualitarios, forman parte de haces separados. Esto provoca algunas interesantes discontinuidades en el orden de las fórmulas.

En el cuadro aparecen sombreadas las casillas en las que el umbral no decrece al movernos de izquierda a derecha entre las

Cuadro 6.5. Funciones de umbral de once conocidas fórmulas electorales en un distrito de cinco escaños para sistemas de partidos de tres y de seis componentes.

	Métodos de divisores						Métodos de cuota y restos mayores				
E	Adams	Danesa	Ste-Laguë	D'Hondt	Imperiali (div)	Mayoría simple	Cuota larga	Hare	Droop	Imperiali	Imperiali reforzada
					Votos necesarios (p=3)						
1	0,00%	6,67%	9,09%	14,29%	20,00%	33,33%	0,00%	6,67%	11,11%	14,29%	n.d.
2	25,00%	26,67%	27,27%	28,57%	30,00%	33,33%	25,00%	26,67%	27,78%	28,57%	
3	50,00%	46,67%	45,45%	42,86%	40,00%	33,33%	50,00%	46,67%	44,44%	42,86%	
4	75,00%	66,67%	63,64%	57,14%	50,00%	33,33%	75,00%	66,67%	61,11%	57,14%	
5	100,00%	86,67%	81,82%	71,43%	60,00%	33,33%	100,00%	86,67%	77,78%	71,43%	
					Votos suficientes (p=3)						
1	0,00%	8,33%	11,11%	16,67%	25,00%	50,00%	8,33%	13,33%	16,67%	16,67%	n.d.
2	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	37,50%	50,00%	33,33%	33,33%	33,33%	33,33%	
3	66,67%	58,33%	55,56%	50,00%	50,00%	50,00%	58,33%	53,33%	50,00%	50,00%	
4	100,00%	83,33%	77,78%	66,67%	62,50%	50,00%	83,33%	73,33%	66,67%	66,67%	
5	100,00%	92,86%	90,00%	83,33%	75,00%	50,00%	100,00%	93,33%	83,33%	83,33%	
					Votos necesarios (p=6)						
1	n.d.	5,56%	7,14%	10,00%	12,50%	16,67%	0,00%	3,33%	5,56%	7,14%	8,33%
2		22,22%	21,43%	20,00%	18,75%	16,67%	25,00%	23,33%	22,22%	21,43%	20,83%
3		38,89%	35,71%	30,00%	25,00%	16,67%	50,00%	43,33%	38,89%	35,71%	33,33%
4		55,56%	50,00%	40,00%	31,25%	16,67%	75,00%	63,33%	55,56%	50,00%	45,83%
5		72,22%	64,29%	50,00%	37,50%	16,67%	100,00%	83,33%	72,22%	64,29%	58,33%
					Votos suficientes (p>5)						
1	n.d.	16,67%	16,67%	16,67%	25,00%	50,00%	16,67%	16,67%	16,67%	16,67%	16,67%
2		50,00%	42,86%	33,33%	37,50%	50,00%	40,00%	36,00%	33,33%	33,33%	33,33%
3		70,00%	62,50%	50,00%	50,00%	50,00%	62,50%	55,00%	50,00%	50,00%	50,00%
4		83,33%	77,78%	66,67%	62,50%	50,00%	83,33%	73,33%	66,67%	66,67%	66,67%
5		92,86%	90,00%	83,33%	75,00%	50,00%	100,00%	90,00%	83,33%	83,33%	83,33%

fórmulas; mientras que aparecen en fondo blanco las casillas en las que sí lo hace. Por lo que se refiere a los votos necesarios, encontramos un orden constante entre las fórmulas de derecha a izquierda, tomando las dos familias, cuotas y divisores, por separado. Los partidos con una expectativa de votos por encima de la media ($1/p$, o el 33,3% y el 16,7% en cada caso) parece que no pueden ganar y sí pueden perder cuanto más a la izquierda se sitúa el método; lo contrario sucede con los partidos con expectativa de votos por debajo de la media. Es evidente que las fórmulas están ordenadas de menos mayoritaria a más mayoritaria. La anomalía interesante aparece a propósito de los umbrales de votos suficientes en las fórmulas que sabemos que son de *tipo* mayoritario (Imperiali de divisores y mayoritaria simple): los partidos con expectativa de votos por encima de la media pero por debajo de la mayoría absoluta pueden ganar si el método pasa a la derecha (se cambia por uno más mayoritario) entre Adams y D'Hondt, pero no si va más allá, a la región mayoritaria propiamente dicha, donde, por el contrario, sus resultados seguros se hacen más pobres.

Hay una importante pregunta que puede plantearse de modo ingenuo, como un acertijo de agudeza visual: si usted representara a un partido con una expectativa de votos en torno a un tercio, en condiciones de incertidumbre sobre la distribución del resto de los votos entre sus competidores ¿qué fórmula preferiría?[2]

---

[2] El método D'Hondt minimiza los riesgos, o maximinimiza la representación de un partido mayor que la media pero menor que la mayoría absoluta de los votos, margen dentro del que se encuentran, por lo general, los grandes partidos. El principio de minimax es una norma adecuada de decisión racional en contextos de incertidumbre o por parte de actores con aversión al riesgo. El método D'Hondt es el método empleado en 21 de los 36 sistemas electorales que no emplean múltiples fórmulas examinados por Lijphart (1994). De los restantes, 13 son mayoritarios, 2 son asimilables a métodos mayoritarios (VUNT y voto limitado) y 11 son varios métodos proporcionales distintos de D'Hondt.

II. DEDUCCIÓN DEL ORDEN DE LAS FÓRMULAS ELECTORALES

6.8. Equivalencia (o no equivalencia) entre métodos de reparto de cuota y de divisores

Recordemos que un método de divisores basado en un criterio constante $c(E)$ puede describirse como la función de múltiples valores

$$F_c(\mathbf{v},M)=\{\mathbf{E}:\ E_i=[v_i/x]_c,\ c(E)=E+c\ \text{ y } \sum E_i=M \text{ para algún } x\}.$$

La función (6.16) del método de cuota $F_n(\mathbf{v},M)$ puede rescribirse de modo semejante a un método de divisores:

$$F_n(\mathbf{v},M)=\{\mathbf{E}:\ E_i=[v_i/q_n]_r,\ r(E)=E+r,\ q_n=1/(M+n)\ \text{ y } \sum E_i=M \text{ para algún } r \text{ tal que } 0\leq r\leq 1\}. \tag{6.29}$$

$F_c(\mathbf{v},M)$ es un conjunto de asignaciones, pues siempre que $v_i/x=c(E)$, $[v_i/x]_c$ puede tomar los valores E o $E+1$. $F_n(\mathbf{v},M)$ es un conjunto de asignaciones, pues siempre que $v_i/q_n=r(E)$, $[v_i/q_n]_r$ puede tomar los valores E o $E+1$.

En los métodos de divisores, el criterio de ajuste c es una constante y el divisor x una variable que depende de c, $\mathbf{v}$ y M. En los métodos de cuota y restos mayores, el modificador n de la cuota es una constante (la cuota es constante dada la magnitud M), y el criterio de ajuste r una variable que depende del modificador de la cuota n, la distribución $\mathbf{v}$ y la magnitud M.

El principio de equivalencia entre los métodos dice lo siguiente: para cualquier vector de votos $\mathbf{v}$, existen al menos un método de divisores constantes, tal que $0\leq c\leq 1$, y un método de cuota y restos mayores que producen exactamente el mismo conjunto de vectores de escaños como resultado. Dicho de otro modo, dado un vector $\mathbf{v}$'

de proporciones y una asignación producida por un método de cuota $F_n(\mathrm{v}',M)=\mathrm{E}'$, existe al menos un método de divisores tal que $F_c(\mathrm{v},M)=\mathrm{E}'$, es decir, existe al menos un método de divisores que produce el mismo resultado. Si decimos que dos fórmulas son v'-equivalentes cuando su aplicación tiene idénticos resultados para una determinada distribución de los votos, entonces, para cualquier distribución de votos y cualquier método no limitado de cuota y restos mayores, existe al menos un método de divisores que es v'-equivalente.

Los términos de la equivalencia son sencillos. Sea un problema de asignación de M en v' resuelto por un método basado en la cuota q_n y un resto efectivo r, de manera que $F_n(\mathrm{v}',M)=\mathrm{E}'$. El resto efectivo puede ser cualquier valor crítico que distribuye los escaños hasta agotarlos, pero podemos adoptar la convención, análoga a la del divisor efectivo, que lo identifica con el mayor resto posible menor que el resto máximo. Entonces, puede construirse el método de divisores basado en un criterio constante $c(E)$ tal que $c=r$ y $F_c(\mathrm{v}',M)=F_n(\mathrm{v}',M)$. De modo inverso, sea un problema de asignación de M en v resuelto por un método de divisores basado en un criterio $c(E)$ donde $0 \leq c \leq 1$ y con un divisor efectivo x; entonces, puede construirse un método basado en la cuota q_n tal que $n=1/x-M$ que produce un idéntico resultado.

Es evidente que la equivalencia general se refiere sólo a las fórmulas proporcionales. Las fórmulas de divisores mayoritarias o d-igualitarias en ningún caso pueden construirse como métodos de cuota. De igual modo, las fórmulas q-igualitarias (limitadas) no pueden construirse como métodos de divisores.

La equivalencia general se limita, además, a fórmulas constantes. Para construir un método de cuota que produzca el mismo resultado que los métodos de criterio de ajuste variable, como la media geométrica o la media armónica (Hill-Huntington y Dean) es necesario abandonar la simple regla de restos mayores y establecer un mecanismo distinto de asignación de escaños por restos, que pondere de algún modo su tamaño por el número de escaños obtenidos por cuota. La posibilidad existe, aunque, sabiamente, se desconozca en la práctica, ya que, puestos a diseñarlo, es mucho más sencillo adoptar un criterio de divisores con término de ajuste variable.

La equivalencia general es poco misteriosa, puesto que se produce *ex post*, es decir, conocida la distribución de los votos, cuando v=v'. *Ex ante*, como parte del procedimiento de competición, el legislador puede fijar o bien la cuota (divisor) o bien el término de ajuste (resto crítico), pero no ambos a la vez. El término libre se determina a partir de la distribución de los votos. *Ex post*, ambos se determinan a la vez.

Ex ante sólo podemos conocer los valores mínimo y máximo del resto que será crítico si fijamos la cuota, o los valores mínimo y máximo del divisor que será efectivo si fijamos el término de ajuste. Esto es lo que nos enseñan las funciones de umbrales. Las funciones nos enseñan que estos valores están sistemáticamente relacionados. Sustituyendo en las ecuaciones relevantes [(6.5)(6.6)(6.22)(6.23)] los valores del resto mínimo y máximo por el término de ajuste, o los del divisor máximo y mínimo por la cuota, se comprueban las equivalencias:

$$x_{\text{MIN}} = q_n \leftrightarrow c = r_{\text{MIN}}; \qquad x_{\text{MAX}} = q_n \leftrightarrow c = r_{\text{MAX}}. \qquad (6.30)$$

Dos fórmulas son *idénticas* sólo si sus funciones de umbrales lo son. Dos fórmulas pueden ser equivalentes para un resultado, incluso para muchos o para casi todos los resultados, pero no son iguales si no producen siempre, con cualquier distribución de los votos, un mismo conjunto de distribuciones de escaños. La identidad de las fórmulas es una identidad procedimental que se determina *ex ante*. Todas las fórmulas que hemos discutido son sólo idénticas a sí mismas.

Dos fórmulas son idénticas en el domino de la competición *p*-partidista si sus funciones de umbrales son idénticas para cualquier magnitud y un determinado número de partidos. Digamos entonces que las fórmulas son *p*-equivalentes, lo que quiere decir que son equivalentes en cualquier sistema electoral para cualquier vector de votos con p componentes. Todas las fórmulas de cuota tienen una fórmula p-equivalente en el bipartidismo. Algunas fórmulas son p-equivalentes para algunos valores de p distintos de dos. Por ejemplo, se observa en los cuadros 6.3 y 6.4 que los métodos D'Hondt e Imperiali de restos mayores son equivalentes en la competición entre tres partidos. Dos fórmulas son M-equivalentes si producen un mismo sistema electoral para un valor de M. Todas las fórmulas electorales son M-equivalentes para la mínima magnitud $M=1$.

La equivalencia general muestra, en realidad, la no equivalencia entre los métodos, en el siguiente sentido: dada una fórmula de cuota y restos mayores que resuelve un problema de asignación de M en v, existe una fórmula de divisores implícita que resuelve el problema de asignación del mismo modo; ahora bien, cuando cambian los términos del problema, es decri, el electorado o la magnitud, cambia la fórmula de divisores implícita que es equivalente. Esto explica de modo inmediato que las fórmulas de cuota no pueden heredar la propiedad de monotonía con respecto a la población (que implica monotonía con respecto a la magnitud) de las fórmulas de divisores. *Si las fórmulas de divisores son monótonas respecto a la población o respecto a la magnitud, las de cuota no pueden serlo*, pues una fórmula de cuota implica el empleo de una fórmula de divisores distinta cada vez, es decir, cada vez que cambia el electorado o el número de escaños.

6.9. Ordenamiento de las fórmulas electorales

6.9.1. Métodos de divisores

Recordemos que si F' es al menos tan mayoritaria como F ($F' \geq F$) entonces, $v_i > v_j$ implica que $E'_i \geq E_i$ o $E'_j \leq E_j$ (véase capítulo 2, apartado 2.9). Cambiando ligeramente los términos de su enunciado, Balinski y Young (1982; 118) demuestran el siguiente teorema[3]:

Teorema (Balinski y Young): Si F' y F son dos métodos de divisores basados en dos criterios monótonos crecientes $d'(E)$ y $d(E)$, que satisfacen $d'(A)/d'(B) > d(A)/d(B)$ para todos los enteros $A > B \geq 0$, entonces F' es al menos tan mayoritaria como F ($F' \succeq F$).

Un corolario inmediato de este teorema es que si F' y F son dos métodos de divisores basados en criterios de ajuste constantes con términos $c' > c$, entonces $F' \succeq F$.

Puesto que c es siempre un número real, la relación "ser al menos tan mayoritario" *induce un orden lineal* para todas las fórmulas de divisores constantes. El orden es asimétrico: si $F'_c \succeq F_c$ entonces $F_c \not\succeq F'_c$. El orden es transitivo: si $F''_c \succeq F'_c$ y $F'_c \succeq F_c$ entonces $F''_c \succeq F_c$. El orden es completo: para cualesquiera fórmulas de divisores constantes F'_c y F_c, o bien $F'_c \succeq F_c$ o bien $F_c \succeq F'_c$.

También de aquí se sigue el orden D'Hondt $\succeq$ Sainte-Laguë $\succeq$ Dean $\succeq$ Hill-Huntington $\succeq$ Adams. Sin embargo la condición $d'(A)/d'(B) > d(A)/d(B)$ para todos los enteros $A > B \geq 0$, propuesta en el teorema, no se cumple en una comparación entre cualquiera de los dos métodos no constantes de entre los anteriores (Dean o Hill-Huntintgton) y, por ejemplo, el método constante con término de ajuste $c = 1/3$ (la fórmula danesa).

La relación "ser al menos tan mayoritario" no induce un orden lineal para todos los métodos de divisores, pues la relación no es completa. La relación tiene las propiedades de asimetría y transitividad, por lo que puede decirse que induce un orden parcial estricto en el conjunto de los métodos de divisores, constantes o no constantes.

[3]Balinski y Young se refieren a una relación "favorecer a las minorías" que no es sino lo contrario que "ser al menos tan mayoritario".

6.9.2. Métodos de cuota.

A través de ejemplos y del estudio de las funciones de umbrales es fácil comprobar, y así lo hemos hecho, que el tamaño de la cuota en los métodos de cuota y restos mayores también determina si una fórmula es más o menos mayoritaria. Ahora podemos enunciarlo más formalmente como un teorema.

Teorema: Si F' y F son dos métodos de cuota y restos mayores basados en las cuotas $q_{n'}=1/(M+n')$ y $q_n=1/(M+n)$ tales que $n'>n$, entonces F' es al menos tan mayoritaria como F ($F' \succeq F$).

La prueba de este teorema es la siguiente. Supongamos, a modo de contradicción: (1) $v_i>v_j$,(2) $n'>n$, (3) $E'_i<E_i$ y (4) $E'_j>E_j$. Por la condición de monotonía de las fórmulas, de (1) se sigue que $E_i>E'_i \geq E'_j>E_j$, luego $E_i-1>E_j \geq 0$. Podemos así construir la ecuación que define al método F (véase capítulo 3 apartado 3.2): $v_i/q_n-(E_i-1) \geq v_j/q_n-E_j$ o bien, $v_i(M+n)-(E_i-1) \geq v_j(M+n)-E_j$, de donde se obtiene $(v_i-v_j)(M+n) \geq (E_i-1)-E_j$. Por (2) $(v_i-v_j)(M+n')>(v_i-v_j)(M+n)$, luego $(v_i-v_j)(M+n')>(E_i-1)-E_j$. Puesto que $E'_i \leq E_i-1$ y $E'_j-1 \geq E_j$ [(3) y (4)], entonces $(v_i-v_j)(M+n')>E'_i \; -(E'_j-1)$ o, lo que es lo mismo, $v_i(M+n')-(E'_i)>v_j(M+n')-(E'_j-1)$, contradiciendo la definición del método de cuota F'.

Así, puesto que n es siempre un número real, la relación "ser al menos tan mayoritario" *induce un orden lineal* (asimétrico, transitivo y completo) para todos los métodos de cuota y restos mayores.

6.9.3. Fórmulas electorales constantes.

Por el principio de equivalencia entre las fórmulas y por (6.30) sabemos que, dada una fórmula de cuota y restos mayores, la fórmula de divisores equivalente puede ser tanto un método con un término de ajuste tan grande como el resto máximo asociado a la cuota, como un método con un término de ajuste tan pequeño como el resto mínimo asociado a esa misma cuota. Los métodos de divisores y de cuota y restos mayores no son conmensurables. La relación "ser al menos tan mayoritario" no es completa para el conjunto de las fórmulas electorales.

La relación "ser al menos tan mayoritario" es *completa* en el conjunto de fórmulas constantes (es decir, conecta todos sus elementos) si, dadas dos fórmulas F y F', o bien $F' \geq F$, o bien $F \geq F'$. Haciendo uso de las funciones de umbrales, podemos decir que dos fórmulas F y F' pueden ser conectadas o conmensuradas si, para cualquier número E de escaños, o bien es cierto que $v_{MIN}(E,M,F) \leq v_{MIN}(E,M,F')$ y $v_{MAX}(E,M,F) \leq v_{MAX}(E,M,F')$, o bien lo es que $v_{MIN}(E,M,F) \geq v_{MIN}(E,M,F')$ y $v_{MAX}(E,M,F) \geq v_{MAX}(E,M,F')$. Cuando tanto los votos mínimos como los votos máximos son iguales para todos los escaños, las fórmulas son idénticas. A partir de las funciones de umbrales [(6.9) a (6.15); (6.24) a (6.28)] puede demostrarse que todas las fórmulas de divisores son conmensurables entre sí, así como todas las fórmulas de cuota son conmensurables entre sí (lo que, de otro lado, es una implicación de los teoremas anteriores).

Por negación de lo anterior, dos fórmulas F y F' no son conmensurables si, para algún E, o bien es cierto que $v_{MIN}(E,M,F) < v_{MIN}(E,M,F')$ y $v_{MAX}(E,M,F) > v_{MAX}(E,M,F')$, o bien es cierto que $v_{MIN}(E,M,F) > v_{MIN}(E,M,F')$ y $v_{MAX}(E,M,F) < v_{MAX}(E,M,F')$. En general, los métodos de divisores proporcionales no son conmensurables con los métodos de cuota y restos mayores, y a la inversa. Sin embargo, las funciones de pagos nos permiten afirmar que los métodos de divisores extremos entre los proporcionales (Adams y D'Hondt) sí son conmensurables con los métodos de cuota. Los votos máximos (o los suficientes) del método D'Hondt son iguales que los del método Droop o cualquier método compuesto con cuota menor, por lo que los métodos son comparables por los votos mínimos. Análogamente, los votos mínimos del método Adams son iguales a los de la "cuota larga", por lo que los métodos son comparables por los votos máximos. De este modo, si bien el orden no es completo, podemos afirmar que la relación conecta a cualquier método de cuota con cualquier método de divisores con término de ajuste tal que $c \leq 0$ o $c \geq 1$. Así, puede escribirse que

$c<0$ $\succeq$ Adams $\succeq$ Métodos de cuota y restos mayores $\succeq$ D'Hondt $\succeq$ $c>1$.

La relación "ser al menos tan mayoritario" no forma un orden lineal para todas las fórmulas constantes, sino un orden parcial estricto (asimétrico y transitivo, pero no completo). Para conectar todas las fórmulas constantes puede emplearse la relación"ser al menos tan mayoritario cuando v=v'" ($\succeq_{v'}$). Se sigue de la equivalencia entre fórmulas de cuota y divisores que la relación es completa, por lo que forma un orden lineal para los métodos. Dada una distribución de los votos y un número de escaños, todas las fórmulas pueden ordenarse, pero el orden es distinto cuando los términos del problema (la distribución de los votos o el número de escaños) son distintos.

6.10. Cuatro tipos básicos de fórmulas

Como ha quedado implícito en el desarrollo expositivo de la derivación de las funciones generatrices de las funciones de umbral, distinguimos, de un lado, tres tipos de fórmulas de divisores, que ya conocemos en el universo simplificado del bipartidismo: proporcionales, mayoritarias e igualitarias. Estas últimas ahora deben designarse más precisamente como d-igualitarias. De otro lado, hay dos tipos básicos de fórmulas de cuota: proporcionales y q-igualitarias.

Son fórmulas proporcionales, recordemos, aquellas en las que ni los votos mínimos para E escaños son mayores que la cuota proporcional para E escaños, ni los votos máximos para cualquier E son menores que la cuota proporcional para ese número de representantes (epígrafes 1.6 y 5.6). De lo contrario, incluso cuando la proporcionalidad perfecta es posible, la cuota proporcional ($v_i M=E_i$) sería, en el primer caso, insuficiente y en el segundo innecesaria, para obtener el partido i los escaños correspondientes. Un método electoral F es proporcional, más formalmente dicho, si para cualquier valor de E (y de M y de p), es cierto que

$$[v_{\text{MIN}}(E,F) \leq E/M] \wedge [v_{\text{MAX}}(E,F) \geq E/M].$$

Gráficamente, son fórmulas proporcionales aquellas en las que ni la función de votos mínimos ni la función de votos máximos se interseca con la bisectriz o recta de proporcionalidad perfecta.

Como ya sabemos por el caso bipartidista, y es sencillo corroborar en la situación multipartidista, todos los métodos de divisores tales que el término de ajuste se encuentra en el intervalo $0 \leq c \leq 1$ son proporcionales. Todos los métodos entre D'Hondt y Adams, ambos incluidos, lo son. La conclusión es fácilmente generalizable a los métodos de cuota: todos los métodos de cuota decisivos, sean simples o compuestos, son proporcionales. Pueden inventarse métodos de cuota compuestos con modificadores extravagantemente grandes para la cuota inicial, pero sólo están definidas, sólo funcionan, si su umbral de votos mínimos tiene pendiente igual o mayor que D'Hondt.. Los métodos de cuota compuestos con cuota disminuida son como artilugios torpes para aproximarse a un tipo de distribución que D'Hondt garantiza: el reparto de los escaños que no premie ningún resto. Por la ecuación (6.24) y las fórmulas del cuadro 6.3 puede comprobarse que los votos mínimos de un método (compuesto) de cuota y restos no pueden ser inferiores a los del método D'Hondt, dado que no están definidos si $p \leq |n|$.

Son métodos electorales de tipo mayoritario aquellos en los que, para algún número E_1 de escaños, los votos mínimos son mayores que la cuota proporcional y, a la vez, para un número E_2 de escaños, los votos máximos son menores que la cuota proporcional, siendo así que $E_1 < E_2$. Un método electoral F es de tipo mayoritario, si para algún par de valores E_1 y E_2 tales que $E_1 < E_2$ y cualquier valor de M y de p, es cierto que

$$[v_{\mathrm{MIN}}(E_1,F) > E/M] \wedge [v_{\mathrm{MAX}}(E_2,F) < E/M].$$

Sólo existe una tecnología para crear métodos de reparto de tipo mayoritario que cumplan los requisitos para ser fórmulas electorales: las reglas de divisores en las que el criterio de ajuste es tal que $c(E) > E+1$, o el término de ajuste es $c > 1$.

Son métodos electorales de tipo igualitario aquellos en los que, para algún número E_1 de escaños, los votos mínimos son menores que la cuota proporcional y, a la vez, para un número E_2 de escaños, los votos máximos son mayores que la cuota proporcional, dado $E_1 < E_2$. Un método electoral F es de tipo igualitario, si para algún par de valores E_1 y E_2 tales que $E_1 < E_2$ y cualquier valor de M y de p, dentro del recorrido de valores de p para los que la fórmula está definida, es cierto que

$$[v_{\mathrm{MIN}}(E_1,F) < E/M] \wedge [v_{\mathrm{MAX}}(E_2,F) > E/M].$$

Existen dos tecnologías para los métodos igualitarios, dependiendo de cuál sea la relación entre el número de partidos y el número de escaños, pues no puede existir un método igualitario que sea siempre decisivo, en el sentido de ser capaz de resolver cualquier problema de asignación.

Los métodos igualitarios de divisores, o d-igualitarios, equivalentes a la asignación de escaños con requisitos previos, están limitados al domino $pm \leq M$, donde m es el número de escaños que, como "requisito previo", obtiene cada partido. Puede demostrarse que, cuando el término de ajuste es $c \leq 0$, el mínimo que obtiene cada partido es $m = 1 + \lfloor |c| \rfloor$. Cuando $c = 0$, se obtiene la fórmula Adams, límite entre los métodos proporcionales y los igualitarias. Así, estás fórmulas sólo están definidas cuando $p \leq M/(1+\lfloor|c|\rfloor)$. El valor mínimo del término de ajuste es $c \to -(M-1)/p$, pues este valor convierte al divisor mínimo en infinito y a la función de votos mínimos en vertical [(6.5) (6.9)].

Los métodos igualitarios de cuota y restos mayores, o q-igualitarios, están limitados al dominio $p > |n|$, donde el modificador es un número negativo $n \leq -1$. Cuando $n = -1$, se obtiene la fórmula de "cuota larga" Q-1, límite de las cuota decisivas que comparte algunas características con las fórmulas q-igualitarias. Con las fórmula q-igualitarias (y la cuota larga) el resto mínimo siempre es cero, o, de otro modo, el umbral de votos necesarios para un escaño es cero. Al mismo tiempo, hay siempre un máximo de escaños que un partido puede acumular. Con Q-1, el umbral de votos suficientes para $M-1$ escaños es el 100% de los mismos: $M-1$ escaños es el máximo acumulable por un partido que no sea partido único. En general, el máximo acumulable por un partido es $M+n$ con n negativo. La fórmula máximamente q-igualitaria es el sistema VUNT, con $n = -M+1$, donde el máximo de escaños por partido es un escaño.

Los métodos d-igualitarios ofrecen una mínima representación a cada partido, los métodos q-igualitarios permiten una máxima representación que no puede excederse. Los primeros suponen abundancia de escaños, los segundos suponen escasez. La máxima d-igualdad se realiza cuando el máximo número de escaños se distribuye a partes iguales y los restantes, si los hubiera, entre los mayores partidos. La máxima q-igualdad se realiza cuando los mayores partidos tienen un escaño y sólo un escaño cada uno.

6.11. Recapitulación

En este capítulo se han generalizado algunos de los resultados esenciales del capítulo anterior para las situaciones de competición multipartidista. En el contexto generalizado, los métodos de cuota y los métodos de divisores tienen funciones de umbrales claramente distintas que aquí se han deducido paso por paso. Se han determinado los valores mínimos y máximos del divisor efectivo para cualquier fórmula de divisores constantes así como los valores mínimo y máximo del resto efectivo para cualquier fórmula de cuota y restos mayores. A partir de estos términos, es inmediato determinar las funciones generatrices de las funciones de umbrales de las fórmulas electorales constantes. En el capítulo se presentan las funciones de umbrales de algunas fórmulas conocidas.

Se ha demostrado que puede establecerse la equivalencia entre los métodos de cuota y los de divisores para una distribución **v'** de votos: cualquier asignación lograda por un método de cuota y restos mayores puede ser reproducida por un método de divisores equivalente. Es la **v'**- equivalencia entre cuotas y divisores. Esta forma de equivalencia resulta claramente limitada: si varía alguno de los términos del problema de distribución (la distribución del electorado o el número de escaños), varía la fórmula de divisores equivalente a un método de cuota. Esta limitada equivalencia vuelve transparente la explicación de por qué los métodos de cuota no pueden heredar algunas de las virtuosas propiedades demostradas para los métodos de divisores (Balinski y Young 1982): la monotonía con respecto a la población o con respecto a la magnitud. Un método de cuota no responde de manera monótona a cambios en el electorado o en la magnitud porque, en cierto sentido, un método de cuota se transforma en un método distinto (los métodos de divisores implícitos equivalentes son distintos) cuando se producen esos cambios.

La equivalencia muestra también los límites de cualquier intento de clasificar u ordenar todas las fórmulas electorales. En el caso bipartidista para cada método de cuota existe un único método de divisores equivalente, por lo que todos los métodos se encuentran ordenados por una relación "ser al menos tan mayoritario". En el caso multipartidista la equivalencia se limita a un vector **v'**, por lo que la relación que conecta todos los métodos es la más restringida "ser al menos tan mayoritario cuando **v**=**v'**".

Haciendo uso de un teorema de Balinski y Young (1982) hemos demostrado que todos los métodos de divisores forman un orden parcial estricto y todos los métodos de divisores constantes forman un orden lineal. El orden viene inducido por la relación "ser al menos tan mayoritario". Hemos demostrado que también los métodos de cuota están ordenados linealmente por la misma relación. Sin embargo, el orden no es completo para todas las fórmulas electorales constantes, precisamente porque la equivalencia entre cuotas y divisores es de v'- equivalencia, la relación que los conecta no es "ser al menos tan mayoritario" sino "ser al menos tan mayoritario cuando v=v'". La primera relación induce un orden parcial estricto en el conjunto de las fórmulas constantes, sólo la segunda induce un orden lineal (asimétrico, transitivo y completo).

Así, no es posible ordenar todos los métodos de representación en una única tabla periódica, aunque sí es posible hacerlo para cada familia de métodos y es posible determinar hasta qué punto los métodos de cada familia son equivalentes unos con otros. Con todo, es posible conectar algunos métodos de divisores, los proporcionales extremos Adams y D'Hondt, con cualquier método de cuota, por lo que pueden producirse clasificaciones parciales de interés.

Dentro de cualquier tabla periódica queremos distinguir algunas regiones que marcan cambios cualitativos en el orden continuo de las fórmulas. Por medio de las funciones de umbrales, pueden distinguirse, de manera sencilla, tres tipos de métodos de divisores y dos tipos de métodos de cuota, marcando hitos o saltos cualitativos en el orden de las fórmulas. Los métodos de divisores se clasifican, como ya sabemos, en mayoritarios, proporcionales e igualitarios (d-igualitarios). Todos los métodos de cuota decisivos, simples o compuestos, son proporcionales. Los métodos de cuota limitados pertenecen a la región igualitaria, aunque el modo en el que se desvían de la proporcionalidad es distinto que el de los métodos d-igualitarios y, de hecho, sólo están definidos para un tipo de problema, con escasez relativa de escaños, para los que los métodos d-igualitarios no lo están. Llamamos q-igualitarios a estos métodos.

En la práctica electoral común existe sólo un método q-igualitario, el sistema VUNT, que es el caso límite. Los métodos d-igualitarios se conocen entre los sistemas de prorrateo electoral, bajo la especie de repartos proporcionales con requisitos previos de asignación igual. Los únicos métodos mayoritarios conocidos son el método Imperiali de divisores, que sólo es moderadamente mayoritario y, de nuevo, el caso extremo: la mayoría simple. La mayor parte de las fórmulas electorales conocidas en la práctica son simplemente proporcionales.

CAPÍTULO SIETE

CLASIFICACIÓN DE LAS FÓRMULAS ELECTORALES. LOS INDICADORES DE FRAGMENTACIÓN Y PROPORCIONALIDAD COMO INSTRUMENTOS PARA LA COMPARACIÓN DE FÓRMULAS ELECTORALES

Este capítulo se ocupa de cómo se clasifican las fórmulas y de qué indicadores se emplean para comparar fórmulas o sistemas electorales. En primer lugar, trato de ir lo más lejos posible con criterios demostrativos para comparar a los métodos de reparto de escaños más comunes. En la medida en que la relación 'ser al menos tan mayoritario como' induce un orden en los subconjuntos de métodos formados por las familias de cuota y de divisores, su clasificación es elemental. Sin embargo, el orden no es completo para el conjunto de los sistemas electorales. Lo más común es comparar fórmulas, o sistemas, a través de indicadores que miden diversos aspectos de sus resultados. En este capítulo se discuten dos tipos de números índice que permiten ordenar resultados: los indicadores de fragmentación, o concentración, y los indicadores de desviación de la proporcionalidad. En gran medida, este capítulo es preparatorio para el desarrollo de dos experimentos con ordenador que se presentan en el capítulo siguiente (capítulo 8). El objetivo de estos experimento será comprobar cómo se comportan las fórmulas con respecto a estos índices y tratar, de este modo, de ponderar las afinidades entre métodos que no son estrictamente conmensurables.

7.1. Clasificación de las fórmulas electorales. Estado de la cuestión

Caben pocas dudas, o en eso confío, sobre el hecho de que contar con una clasificación de las fórmulas electorales es una herramienta analítica valiosa para la investigación política comparada. En la literatura especializada existen dos tipos de clasificación u ordenamiento de las fórmulas electorales. El primero y más antiguo consiste en intentar ordenar las fórmulas de acuerdo con su mayor o menor grado de proporcionalidad, entendido como proximidad a la proporcionalidad perfecta, medida de un modo u otro. El segundo consiste en ordenar las fórmulas simplemente atendiendo a si entrañan un sesgo mayor o menor en favor de los partidos mayores o menores. Este segundo criterio de ordenamiento es el que se defiende y emplea en estas páginas.

La mayor parte de los intentos clasificadores sigue una estrategia más bien ecléctica, combinando razones que, al menos parcialmente, son deductivas, con argumentos inductivos basados en la experiencia de aplicación de las fórmulas en sistemas electorales reales, o en ejemplos simulados con mayor o menor ingenio. Argumentos deductivos son aquellos que tratan de comparar reglas con reglas, proponiendo así criterios procedimentales de clasificación de las fórmulas. Argumentos inductivos son aquellos que tratan de comparar resultados con resultados, proponiendo criterios de clasificación basados en índices, como las medidas de desproporcionalidad, que permiten ordenar resultados que se juzgan típicos de una fórmula. A veces, el recurso a los índices se complementa con la simple inspección de resultados "típicos" y el uso del sentido común.

A continuación se reseñan diversas propuestas de ordenamiento de las fórmulas electorales. Algunas, especialmente las más primitivas clasificaciones por un criterio de proporcionalidad, tienen un interés más bien arqueológico. Las segundas abren el camino hacia la clasificación u ordenamiento definitivo de todas las fórmulas electorales, que, en la medida en que esto es posible, es decir, por familias, es la que se lleva a cabo en estas páginas.

7.1.1. Fórmulas más o menos proporcionales

El cuadro 7.1 recoge una colección, creo que representativa, de clasificaciones de fórmulas electorales de acuerdo con un criterio de mayor o menor proximidad de las fórmulas a la proporcionalidad perfecta. La primera propuesta que se presenta en el cuadro 7.1, la de Blondel (1969), es bastante disparatada, pues clasifica a la fórmula Hare como la menos proporcional de las fórmulas proporcionales y da como fórmula más proporcional la fórmula de voto único transferible, de difícil comparación con las fórmulas electorales simples, por su estructura de papeleta, pero que se basa en la cuota Droop como principio de distribución. Este tipo de "conclusiones" nos debería poner en guardia frente al enfoque inductivo. Loosemore y Hanby (1971), en el artículo donde introducen su popular índice de desviación de la proporcionalidad (*D*), apuestan por una estrategia más deductiva, intentando determinar, a partir de las funciones de umbral de las fórmulas, la desviación máxima de la que es capaz cada fórmula. De este modo rescatan a la fórmula Hare y la señalan como el método más proporcional, corrigiendo así el más llamativo error de Blondel.

Lijphart (1986) construye sobre la clasificación de estos autores, pero introduce las fórmulas Imperiali de restos mayores y de divisores y deja de lado la fórmula de Sainte-Laguë en favor de su versión modificada, que es la única realmente empleada en los sistemas electorales. Lijphart insiste en este lugar en la necesidad de apuntar el solapamiento de algunas fórmulas en su grado de proporcionalidad. No queda claro por qué señala a unas fórmulas y no a otras, ya que son muchas las que, en realidad, se "solapan"; es decir, hay muchos conjuntos de fórmulas en los que puede ser cierto que una de ellas dé lugar, unas veces, a resultados más proporcionales que otra y, otras veces, a resultados menos proporcionales. Sin embargo, en su investigación comparada y sistemática de los sistemas electorales del mundo (Lijphart 1994), cuando el autor tiene que tomar una decisión sobre cómo agrupar a las fórmulas en distintas categorías de una misma variable, las líneas sobre las que antes indicaba solapamiento parecen perder importancia. La fórmula Imperiali de restos mayores queda firmemente agrupada junto con la fórmula D'Hondt en la categoría de las menos proporcionales entre las proporcionales; la fórmula Hare queda distinguida como la más proporcional entre las proporcionales y, por último, el resto de los métodos que tienen empleo en los sistemas electorales investigados por Lijphart se subsumen en una categoría intermedia.

Las clasificaciones de Lijphart se apoyan en una combinación de sentido común, discusión razonada de ejemplos y experiencia investigadora. El criterio de Pennisi (1998) se apoya en el rendimiento de las fórmulas frente a una batería de índices de proporcionalidad. Esta autora propone un enfoque completamente inductivo, a partir de un experimento basado en resultados electorales generados al azar. Puesto que es conocido que diversos índices son minimizados por distintas fórmulas de proporcionalidad, Pennisi sugiere emplear una serie de siete índices distintos, tres de ellos de su cosecha, para tratar de determinar qué fórmula o fórmulas son más robustas en las pruebas, es decir, qué fórmulas producen, en mayor número de casos, un resultado más próximo a la proporcionalidad perfecta, empleando los diversos índices como medidas alternativas de la distancia. Sus conclusiones no son del todo precisas, pero, evaluando los resultados de su experimento, parece encontrar razones para situar más o menos en pie de igualdad a las fórmulas de Hare y de Sainte-Laguë (pura) como las fórmulas más robustamente proporcionales, tal vez dando prioridad a la segunda de ellas.

Parece haber un consenso considerable acerca del hecho de que la fórmula Hare y la fórmula de Sainte-Lagué son los métodos más proporcionales. En la medida en que se establezcan diferencias, la mejor calificada en el juicio de los distintos autores viene a ser, en general, la fórmula Hare. Salvo en la investigación de Pennisi, en el resto de las tablas comparativas nos encontramos, junto a estas dos fórmulas, con diversos métodos que se apartan de la proporcionalidad siempre un mismo sentido, esto es, dando lugar a resultados sesgados, en mayor o menor medida, en favor del partido o partidos más votados. De este modo, el orden por un criterio de mayor o menor proporcionalidad coincide con el orden en función de un criterio distinto: si los resultados son más o menos favorables para las minorías. Esto puede producir la ilusión de que ambas cosas son lo mismo.

Pennisi circunscribe su atención a las fórmulas proporcionales (no le interesa analizar fórmulas que no pueden serlo, como Imperiali de divisores, por no hablar de la mayoría simple), pero, al mismo tiempo, incluye en su menú algunos métodos proporcionales cuya desviación de la proporcionalidad presenta una polaridad distinta a la habitual, pues favorece a las minorías (las fórmulas Adams, Dean y Hill). Es digno de mención el hecho de que, tras el "par proporcional" formado por Hare y Sainte-Laguë, en sus resultados aparecen, en segundo término, fórmulas más bien sesgadas hacia la mayoría (Imperiali, Droop y D'Hondt), que tienden a concentrar los escaños, y sólo en tercer término, las fórmulas sesgadas hacia las minorías, que tienden a dispersarlos. Si el mecanismo de prueba de esta autora es correcto, se diría que, cuando el sesgo es inevitable, el que los resultados del reparto sean favorables a la mayoría constituye una violación de menor envergadura, con respecto al ideal de la proporcionalidad perfecta, que la desviación producida por fórmulas que favorecen a las minorías. Este efecto resulta también identificado en los experimentos que se exponen en el capítulo 8. Este tipo de resultados nos debe alertar contra la viciada confusión de identificar siempre a la desproporcionalidad con el sesgo mayoritario.

Cuadro 7.1. Algunas clasificaciones de las fórmulas electorales por su proporcionalidad.
1=Más proporcional.

Blondel (1969; 191)	Loosemore y Hanby (1971; 475)
1. Voto único transferible (VUT) 2. Sainte-Laguë. 3. D'Hondt. 4. Hare. 5. Fórmula mayoritaria simple.	1. Hare. 2. Sainte-Laguë (puro). 3. D'Hondt. 4. Fórmula mayoritaria simple.
Lijphart (1986;178).	Lijphart (1994; 95-7).
1. Hare. 2. Voto único transferible (VUT) 3. Sainte-Laguë (modificada). 4. Imperiali de restos mayores. 5. D'Hondt. 6. Imperiali de divisores.	1. Hare. 2. Sainte-Laguë modificada y algunas proporcionales no incluidas en 1 o 3. 3. D´Hondt e Imperiali de restos mayores. 4. Diversas fórmulas mayoritarias.
Pennisi (1998; 17).	
1. Sainte-Laguë / Hare (tal vez en ese orden) 2. Droop. 3. D´Hondt / Imperiali de restos mayores. 4. Hill-Huntington / Dean. 5. Adams	

7.1.2. Fórmulas más o menos sesgadas hacia la mayoría, o hacia las minorías

La clasificación de Balinski y Young (1982), recogida en el cuadro 7.2, se limita a cinco fórmulas de divisores tradicionalmente empleadas para el prorrateo de escaños en los Estados Unidos de América. Las cinco son fórmulas proporcionales. Estos autores producen, si no me equivoco, la primera clasificación que se basa en razones puramente deductivas y procedimentales. En la medida en que los métodos introducen un distinto sesgo (siempre puede ser que dos fórmulas produzcan el mismo resultado y, por definición, todas lo hacen cuando la proporcionalidad es posible) el sesgo en favor de los partidos (o estados) menores siempre es máximo con el método Adams y mínimo con el método D'Hondt (o Jefferson, en la nomenclatura norteamericana), quedando en situación intermedia las fórmulas de Dean, Hill y Sainte-Lagë (o Webster). La razón, sencillamente expuesta, es que el divisor Adams siempre es mayor que el divisor Dean, que siempre es mayor que el divisor Hill, etc. Esta desigualdad se deriva de una adecuada comprensión de los criterios de divisores o ajuste de cocientes que son la base de cada una de las reglas: la mínima fracción (Adams) , la media armónica (Dean), la media geométrica (Hill), la media aritmética (Sainte-Laguë) y la máxima fracción (D´Hondt). La media geométrica siempre está entre la media aritmética y la media armónica; la máxima y mínima fracción son, naturalmente, mayor y menor que cualquier media.

Por añadidura, Balinski y Young determinan que la fórmula de Sainte-Laguë puede favorecer con idéntica probabilidad a los partidos (Estados de la Unión) mayores y a los menores, por lo que su clasificación propone un punto de sesgo cero. Las fórmulas Adams, Hill y Dean tienen sesgo positivo y la fórmula D'Hondt sesgo negativo. Puede compararse su ordenamiento con el de Pennisi (cuadros 7.1 y 7.2). Dejando aparte las fórmulas de cuota, que esta autora también considera, lo que su clasificación nos sugiere es algo así como tomar a modo de extremo el "centro" del orden de Balinski y Young, situar a continuación la fórmula de sesgo negativo y, por último, las de sesgo positivo. Pero, ¿por qué no las de sesgo positivo primero, o, simplemente, unas y otras intercaladas? En la clasificación de Balinski y Young, el criterio "tener un mayor o menor sesgo" produce un orden completo para las cinco fórmulas, pero la escala tiene valores positivos y negativos: el orden no se produce por la mayor o menor proximidad de las fórmulas al sesgo cero. La clasificación de las fórmulas por "criterio de proporcionalidad" es como intentar clasificar a la población en función de su proximidad a cierta estatura canónica, olvidándonos de anotar si el individuo es más bien bajito o más bien alto.

Gallagher (1992) escribe un ensayo bastante ambicioso, por el número de métodos que se propone comparar, tratando de ordenar casi todas las fórmulas electorales comunes por su mayor o menor propensión a favorecer a los partidos mayores. No se limita, así, a fórmulas de divisores proporcionales, como Balinski y Young (1982), sino que incluye también fórmulas de restos mayores y al menos una fórmula que no es proporcional (Imperiali de divisores). El fundamento de su comparación son los umbrales de inclusión y exclusión de las distintas fórmulas y el "tamaño de la cuota" que emplean. Su discusión se basa en ejemplos imaginarios. Para determinar el "tamaño de cuota" de los métodos de divisores, se sirve del dudoso procedimiento discutido en el capítulo 4. Gallagher en ningún momento explica cómo pondera la importancia de uno y otro factor a la hora de decidir que una fórmula tiende a ser más favorable que otra a la mayoría. Para determinar la relación inversa que existe entre uno y otro necesitaría de las funciones de umbrales, herramienta que desconoce en su artículo. El lector tiene la impresión de que su clasificación final, con todas sus advertencias sobre su carácter "escurridizo" y dependiente de ejemplos concretos, termina valiéndose del ojo experto y del sentido común, más que de ningún criterio deductivo.

Mi clasificación, intenta, por fin, ser máximamente ambiciosa, pues propone ordenar todas las fórmulas existentes y todas las fórmulas posibles en las que pueda dar la imaginación de los ingenieros electorales, siempre que se trate de fórmulas simples (o compuestas, pero no complejas): proporcionales o no, de cuota y restos mayores o de divisores. El criterio de clasificación es puramente procedimental y distingue a las fórmulas por su mayor o menor sesgo. El orden de las infinitas fórmulas ha quedado demostrado en el capítulo 6. Pueden recordarse aquí las implicaciones para las fórmulas más conocidas.

Cuadro 7.2. Clasificaciones de las fórmulas electorales por su sesgo. 1=Máximo sesgo en favor de las minorías.	
Balinski y Young (1982; 77-8).	Gallagher (1992; 490)
1. Adams.	1. Adams.
2. Dean.	2. Danesa.
3. Hill-Huntington.	3. Hill-Huntington.
4. Sainte-Laguë (no sesgada).	4. Hare / Sainte-Laguë.
5. D'Hondt (sesgo hacia la mayoría).	5. Sainte Laguë modificada.
	6. Droop.
	7. Voto único transferible.
	8. D'Hondt.
	9. Imperiali de restos mayores.
	10. Imperiali de divisores.

Los métodos de cuota y restos mayores se ordenan por la relación "ser al menos tan mayoritario"; un método de cuota es más mayoritario cuanto mayor es el modificador n de la cuota. Así,

Imperiali(reforzada) $\geq$ Imperiali $\geq$ Droop $\geq$ Hare $\geq$ Cuota larga.

Los métodos de divisores constantes también se ordenan por la relación "ser al menos tan mayoritario; un método de divisores es más mayoritario cuanto mayor es el término de ajuste c de la función o criterio de divisores en que se basa la fórmula. Así,

Mayoría simple $\geq$ Imperiali (div) $\geq$ D'Hondt $\geq$ Ste-Laguë $\geq$ Danesa $\geq$Adams.

Los métodos de divisores con término de ajuste no constante también pueden ser ordenados. Como ya se ha señalado, la media geométrica $d(E)=\sqrt{(E(E+1))}$ siempre es mayor que la media armónica $d'=(E(E+1))/(E+0{,}5)$ y ambas oscilan entre el cero y la media aritmética, que son los términos de ajuste, respectivamente, de Sainte-Laguë y Adams. La relación "ser más mayoritario" sólo conecta a la media geométrica (método Hill-Huntington) y a la media armónica (método Dean) con métodos de término de ajuste constante tales que $c \leq 0$ o $c \geq 0{,}5$; la relación no conecta ninguno de estos dos métodos con, por ejemplo, la fórmula danesa. Con todo, puede escribirse que

Sainte-Laguë ≥ Dean ≥ Hill-Huntington ≥ Adams.

Por último, sabemos que ninguna cuota puede ser menor que el divisor mínimo del método D'Hondt ni mayor que el divisor máximo del método Adams. Así, es posible escribir un orden parcial que inscribe a los métodos de cuota entre los dos casos límites de métodos de divisores proporcionales:

D'Hondt ≥ Imperiali(ref.) ≥ Imperiali ≥ Droop ≥ Hare ≥ Cuota larga ≥ Adams

En resolución: los métodos de cuota sólo forman un orden completo entre sí y con los métodos D'Hondt y Adams, o métodos más mayoritarios que el primero, o menos que el segundo; los métodos de divisores constantes forman un orden completo; los métodos de divisores variables forman un orden completo entre sí y con Adams y Sainte-Laguë. Pueden formarse cadenas infinitas para introducir sistemas intermedios entre los conocidos, o junto a ellos, pero deben tenerse siempre en cuenta las inconmensurabilidades entre familias de fórmulas y, dentro de los divisores, entre divisores constantes y variables.

Estas clasificaciones parciales son apodícticas. El precio de un ordenamiento según un criterio exacto es que el orden no es completo. La clasificación coincide, como es natural, con la de Balinski y Young (1982). La clasificación de Gallagher (1992) no pretende ser demostrativa, si entiendo bien sus conclusiones, pero ello no le libra de un error puro y simple: las posiciones relativas de los métodos D'Hondt e Imperiali de restos mayores deben invertirse. El resto de las posiciones, en la medida en que ordena fórmulas que son inconmensurables, es simplemente discutible, aunque a mí me parece acertado, en el bien entendido que no se trata de un orden puramente deductivo, sino de un híbrido en el que algunas posiciones están fijadas por la aritmética y otras son aproximaciones.

7.2. Un caso especial: la fórmula de Sainte-Laguë modificada

Hasta ahora, he evitado cuidadosamente a la fórmula de Sainte-Laguë modificada (a veces dicha mejorada), por tratarse de un berrueco en el continuo de las fórmulas habituales. Razones de tipo práctico obligan a tomarla en consideración, ya que se emplea con frecuencia para el reparto de escaños entre partidos, especialmente en los países escandinavos, de donde es originaria (Rokkan 1968). De hecho, la fórmula de Sainte-Laguë (pura, como se suele decir), adoptada inicialmente por alguno de estos países, ya hace tiempo que no se emplea en ningún lugar.

La idea consiste en una manipulación del algoritmo que conduce al divisor de Sainte-Laguë, de manera que los votos de los partidos son divididos inicialmente no por 1 sino por 1,4, después por 3,5,7 y así sucesivamente (o, lo que es lo mismo, 0,7 1,5 2,5 3,5...). Los escaños se atribuyen a los *M* cocientes mayores. La intención detrás de la idea no es otra que la de dificultar el acceso a la representación para los partidos menores (Rokkan 1968). Es común afirmar que la fórmula funciona igual que la de Sainte-Laguë para aquellos partidos que superan el primer escaño, o una vez que todos tienen un escaño (Gallagher 1992; 491). No está muy claro lo que se quiere decir con esto, pero es falso a no ser que quiera decir que si la distribución del voto es tal que todos los partidos que reciben un escaño y sólo un escaño con la fórmula 'pura', también reciben un escaño y sólo un escaño con la variante 'modificada', entonces todos los partidos reciben el mismo número de escaños con ambas fórmulas. Y con muchas otras, podríamos añadir. Dificultar el acceso al primer escaño es lo mismo que facilitarlo en los siguientes. La fórmula de Sainte-Laguë modificada es una fórmula completamente distinta de la original, aunque próxima, como tantas, a la misma.

La función de umbrales de esta fórmula es bastante enojosa, pues obliga a contemplar nada menos que tres circunstancias distintas para la función de votos mínimos y seis para la de votos máximos. Su determinación hay que agradecerla al mérito y la paciencia de Lijphart y Gibberd (1977). El cuadro 7.3 la reproduce.

Cuadro 7.3. Funciones de umbrales de la fórmula de Sainte Laguë modificada.

Votos mínimos	$E=1$ (Umbral de inclusión)	$1{,}4/(2M+1{,}4p-2{,}4)$
	$E=M$	$(2E-1)/(2M+1{,}4p-2{,}4)$
	$E>1,\ E\neq M$	$(2E-1)/(2M+1{,}4p-2{,}8)$
Votos máximos	$E = 0$ (Umbral de exclusión) $p>M$	$1/(M+1)$
	$E = 0$ (Umbral de exclusión) $M/2\ \ p-1\leq M$	$1{,}4\ /(1{,}6M-0{,}2\,p+1{,}6)$
	$E = 0$ (Umbral de exclusión) $p-1\leq M/2$	$1{,}4\ /(2M-p+2{,}4)$
	$p-1\geq M-E$	$(2E+1)/(1{,}4M+0{,}6E+1)$
	$(M-E)/2\leq p-1\leq M-E$	$(2E+1)/(1{,}6M-0{,}2p+0{,}4\,E+1{,}2)$
	$p-1\leq(M-E)/2$	$(2E+1)/(2M-p+2$

Fuente: Lijphart y Gibberd (1977).

Lo complejo de las funciones se deriva del sencillo hecho de que no existe tal cosa como un divisor de Sainte-Laguë modificado. Pese a los intentos de Gallagher de pasar por alto ese hecho, conviene subrayar que no estamos frente a una fórmula de divisores en sentido estricto. Los votos de distintos partidos son divididos por divisores distintos. Esto también hace que su función de umbrales sea relativamente excéntrica, en el sentido de que la función de votos mínimos no es una recta y la expectativa de escaños para $v=1/p$ no coincide exactamente con la del resto de las fórmulas. La función de umbrales de Sainte-Laguë modificado se cruza con las funciones de umbrales de otras fórmulas de divisores en más de un punto, lo que hace que no sean conmensurables.

El lugar aproximado para situar la fórmula de Sainte-Laguë modificada, y en esto sí estoy de acuerdo con Gallagher, puede encontrase entre la fórmula D'Hondt y la fórmula original. Pero no debe confundirse con la verdadera alternativa intermedia entre Sainte-Laguë y D'Hondt: D+0,75, o el método basado en la regla c=0,75. La fórmula modificada es próxima a D+0,75, pero logra una combinación de ventajas y desventajas para los distintos partidos que resulta inimitable por una regla constante. Las reglas comprendidas entre D+0,6 y D+0,7 suelen aproximarse algo mejor que D+0,75, por lo que podemos decir que el peculiar híbrido está algo más cerca del método D'Hondt (D+1) que del de Sainte-Laguë (D+0,5). En general, la regla modificada eleva el precio del primer escaño por encima de la regla constante más parecida y lo reduce para el siguiente o siguientes.

Estas conclusiones se corroboran en el primero de los experimentos que se describen en el capítulo 8.

7.3. Números índice

La relación 'ser al menos tan mayoritario' no induce un orden completo entre todas las fórmulas, sino sólo un orden para las fórmulas de cuota, inscritas entre los divisores proporcionales límite, y otro para todas las fórmulas de divisores. No es éste un resultado pobre, pero sin duda parece natural intentar, a continuación, una estrategia comparativa complementaria que nos permita fundamentar sobre las bases más sólidas posibles las semejanzas entre los métodos de una y otra familia. A cada resultado de un problema de asignación de escaños por un método puede asignársele un número índice, obtenido a partir de la distribución de los escaños, o de la distribución de los escaños comparada con la distribución de los votos. Los números reales siempre pueden ordenarse. Si se establece una regularidad empírica a propósito del orden de los resultados, ésta puede extenderse, de modo indirecto, a los procedimientos.

Para dar lugar a dicha extensión, los números deben comportarse de modo previsible a partir de proposiciones derivadas de la naturaleza del problema. Las proposiciones que necesitamos son extremadamente sencillas:

1. Para una magnitud electoral y una distribución del voto constantes, cuanto más mayoritaria es una fórmula más concentrados se encuentran los escaños en el vector resultado de la asignación.

2. Para una magnitud electoral y una distribución del voto constantes, cuanto más próxima al centro del intervalo proporcional, o al sesgo cero, se encuentre la fórmula, más próximos se encuentran los vectores de votos y de escaños.

Así, hay dos tipos de números índices que nos interesan. El primero consiste en medidas que puedan evaluar el grado en el que una distribución de escaños está concentrada o dispersa. Debe ser un número tal que los métodos que se encuentran ordenados por razones deductivas produzcan siempre el mismo orden en el indicador. De este modo, se puede tratar de 'intercalar' inductivamente fórmulas inconmensurables en cuanto procedimientos, observando cómo se intercalan los valores de los índices. El segundo tipo de indicador debe ser una medida de desviación de la proporcionalidad que nos permita acercarnos al centro del continuo de las fórmulas electorales y reforzar lo anterior.

En el capítulo 8 se exponen dos tipos de experimentos empleando números índice. Dado que la literatura sobre estos indicadores es muy abundante, conviene discutir primero el tipo de medidas antes de pasar a los ejercicios.

7.4. Medidas de concentración o fragmentación

Las medidas de fragmentación política más habituales en la literatura son las vinculadas al índice de concentración (*HH*) de Herfindahl-Hirschman (Hirschman 1945): el índice de fraccionalización (*F*) de Rae (Rae 1971) y el número efectivo de partidos (N_2) de Laasko (Laasko y Taagepera 1979). El coeficiente de diversidad normalizada (*L*) de Lieberson (Lieberson 1969) es un indicador del tamaño relativo de las partes naturalmente asociado a esta familia. La alternativa más importante es el índice (*H*) de entropía (Theil 1969) y las medidas afines: el número efectivo de partidos calculado a partir de la entropía, o índice de hiperfraccionalización (N_1), y la entropía normalizada (H_N) como medida de fragmentación relativa. El propósito de presentar esta segunda familia de indicadores es meramente ilustrativo. Como se argumenta más abajo, si la información de las medidas corrientes de fragmentación debe ser complementada de algún modo, lo más prudente es acudir al simple número de partidos. El número escalar (*p*) puede verse como un caso límite (N_0) de una familia "trasversal" de indicadores de fragmentación, los números *N* de partidos (Taagepera 1999). Los números N_1 y N_2 son posibilidades intermedias, de entre las que se aconseja la segunda, y la inversa del tamaño del partido principal (N_∞) el extremo opuesto a *p*.

Cuando se investiga la fragmentación de un sistema de partidos, se busca una medida de división de los sistemas que tiene dos dimensiones: el número de componentes y la manera en la que el total de los votos está dividido o concentrado entre los componentes. De este modo, para estudiar la fragmentación electoral puede ser analíticamente valioso distinguir entre el simple número y la distribución, lo que requiere de medidas distintas para cada una de estas dimensiones, además de una medida general de fragmentación partidista.

Cuadro 7.4 Indicadores de fragmentación electoral para seis hipotéticos sistemas de partidos

	A	B	C	D	E	F
v_1	0,7	0,6	0,5	0,6	0,5	0,33
v_2	0,3	0,4	0,5	0,2	0,25	0,33
v_3	-	-	-	0,2	0,25	0,33
p (N_0)	2	2	2	3	3	3
N_∞	1,43	1,67	2	1,67	2	3
F	0,42	0,48	0,5	0,56	0,62	0,67
N_2	1,72	1,92	2	2,27	2,67	3
L	0,84	0,96	1	0,84	0,94	1
H	0,61	0,67	0,69	0,95	1,04	1,1
N_1	1,84	1,96	2	2,59	2,83	3
H_N	0,88	0,97	1	0,86	0,95	1

Considérense los seis ejemplos del cuadro 7.4. Es inmediato para la intuición que los sistemas A-B-C, de dos partidos, se encuentran progresivamente más fragmentados; lo mismo que los sistemas D-E-F, de tres partidos. A pesar de que unos y otros tienen el mismo número de componentes, la distribución del voto está más dispersa en cada caso. De otro lado, los sistemas C y F, en un sentido, tienen idéntica fragmentación, pues ambos están igualmente divididos, mientras que, en otro sentido, F está más fragmentado que C, pues tiene un componente más. En conjunto, tomando en cuenta ambas dimensiones, todos los sistemas entre A y F muestran un grado creciente de fragmentación. Entre los sistemas A y C, o D y F no varía el número, pero sí el tamaño. Entre los sistemas C y F varía el número, pero no el *tamaño relativo* de las partes (la comparación es menos clara al alejarnos de la igualdad, pues no es fácil decir, por ejemplo, si el tamaño relativo es más o menos semejante en A y D). Entre los sistemas A y F varía el número y el tamaño relativo, por lo que varía su *tamaño absoluto*.

Waldman (1976) propone distinguir entre indicadores del tamaño relativo e indicadores del tamaño absoluto del sistema de partidos. Los segundos pueden construirse como una función de los primeros y del número de partidos. Así, un indicador de tamaño relativo aumenta en todos los casos entre A y F, mientras que un indicador de tamaño relativo aumenta sólo entre A y C o entre D y F. Este planteamiento parece dar una especie de prioridad analítica al tamaño relativo y al número de componentes, como si el tamaño absoluto fuese un derivado. En realidad, la prioridad analítica la tiene el número de partidos y cualquier indicador de su tamaño, absoluto o relativo. Ninguno de los dos contiene información más primitiva que el otro y, en todo caso, el valor de cualquiera de los tres componentes puede determinarse conocidos los otros dos.

Los criterios operacionales que distinguen indicadores de uno y otro tipo son los siguientes. Un índice de fragmentación (o uno de concentración) se construye a partir de la suma de las fracciones o tamaño de las partes, ponderadas mediante un exponente, o un logaritmo, de manera que las fracciones mayores pesen más de las pequeñas en el valor del índice (Coulter 1984; 1989). El valor mínimo de un índice de fragmentación es cero. El valor máximo puede o no estar constreñido en la unidad, pero su recorrido varía siempre con el número de componentes. Cuanto menor es el número de partidos, menor el recorrido posible del índice. Los valores del un índice de fragmentación son insensibles a componentes cero (de tamaño nulo o partidos cero). La estructura de un índice de fragmentación relativa es la siguiente: *Fragmentación relativa = Fragmentación / Fragmentación máxima*. Se trata de un índice normalizado. El valor mínimo es cero, valor que toma cuando hay un único componente en el sistema. El valor máximo del índice es uno, valor que toma cuando todos los componentes son iguales. El recorrido del índice no depende del número de partidos. Los valores del índice no varían con el número de partidos en condiciones de igualdad. Los valores del índice relativo son sensibles a los componentes cero.

7.4.1. Concentración y entropía

El índice de concentración de Herfindahl-Hirschman (Hirschman 1945) consiste en la simple suma de los cuadrados de las fracciones de las partes. El recorrido teórico del índice es de cero a uno (o a cien, si se prefiere), pero su valor mínimo varía en cada caso con el número de partidos. El valor unidad refleja la máxima concentración posible, cuando una "parte" es igual al todo y las demás partes son cero. La mínima concentración se produce cuando todas las partes son iguales. El valor mínimo del índice está constreñido en cero, valor al que tiende cuando el número de partes tiende a infinito y todas son iguales. La concentración de un sistema de partidos puede medirse en el electorado y en el parlamento. En el primer caso las partes son las fracciones de los votos que obtienen los partidos (v_i), en el segundo, las fracciones de escaños en el parlamento (e_i). En toda la discusión que sigue me limitaré a describir los índices de fragmentación electoral, dando por supuesto que todos tienen un equivalente en la fragmentación parlamentaria.

Índice de concentración del voto (Hirschman-Herfindahl)

$$HH = \sum_{i=1}^{p} v_i^2$$

Resulta claro que se trata de un indicador de concentración, pues contiene un exponente, de manera que las fracciones grandes contribuyen al valor del índice de modo mucho más pronunciado que las fracciones pequeñas (Coulter 1984). Es, además, un indicador del tamaño absoluto de las partes, pues depende tanto del tamaño de los partidos como de su número (Waldman 1976). Más precisamente, la distribución de los votos afecta a los valores del índice y el número de componentes al recorrido y a los valores del índice. El número (p) determina el valor mínimo del índice en cada caso, que, como puede verse, es igual a $1/p$, el tamaño medio de los partidos, valor que sólo puede tomar cuando todos los componentes son iguales. Las fracciones cero no aportan nada al valor del índice, aunque modifiquen su recorrido.

Para sistemas grandes, el índice puede interpretarse como una aproximación a la probabilidad de que dos votantes cualesquiera voten por el mismo partido (Rae 1971;56). De hecho, Rae denomina a este coeficiente como "probabilidad de acuerdo diádico". Esta interpretación es menos legítima en el caso de la concentración del sistema parlamentario de partidos, ya que los parlamentos pueden no ser lo bastante grandes como para que el coeficiente se aproxime a la probabilidad de que dos parlamentarios, tomados al azar, pertenezcan a un mismo partido.[1]

El índice de concentración rara vez se emplea como tal en los estudios electorales. Es mucho más común emplear el índice de

---

[1]El índice de concentración se basa en el supuesto de que las muestras de dos individuos se toman con reposición, por lo que cada individuo tienen cierta probabilidad de ser emparejado consigo mismo. Esto no supone prácticamente ninguna diferencia en el índice, excepto si la población es muy pequeña (véase Lieberson 1969; 861).

fraccionalización, propuesto por Rae, entre otros, que no es sino el complemento del anterior.[2]

Índice de fraccionalización del voto (Rae)

$$F = 1 - \sum_{i=1}^{p} v_i^2$$

Es evidente que las propiedades de este índice son las mismas que las del índice de concentración, cambiando simplemente la orientación de la escala. El índice de fraccionalización está limitado en su valor máximo por $1-1/p$, magnitud variable menor de la unidad que refleja la fraccionalización cuando los partidos son iguales.

Precisamente, la variabilidad del recorrido del índice de fraccionalización puede hacer aconsejable, en algunas circunstancias, transformarlo en un indicador del tamaño relativo. El índice de diversidad normalizada, explorado, entro otros, por Lieberson (1969), también llamado coeficiente de variación cualitativa, es la transformación del índice de Rae en un indicador relativo, ya que corrige sus valores por el número de partidos dividiendo la fraccionalización por su valor máximo. De este modo, el valor máximo del índice es siempre la unidad cuando los partidos son iguales. En condiciones de igualdad, la multiplicación del número de partidos no afecta a los valores del índice. Este índice, al tener un recorrido constante, puede hacer más precisas las comparaciones de la fragmentación entre sistemas de distinto tamaño.

---

[2]Lieberson (1969) llama a este coeficiente "índice de diversidad de la población".

Fraccionalización relativa (diversidad normalizada, Lieberson)

$$L = \frac{1 - \sum_{i=1}^{p} v_i^2}{1 - 1/p}$$

El número escalar de partidos, la fragmentación absoluta y la fragmentación relativa pueden definirse entre sí. Su equivalencia para las fórmulas de la familia de la concentración/fraccionalización es la siguiente.

$$p = \frac{1}{1 - F/L}$$

Como medida de fragmentación, una de las alternativas más sólidas al índice de Rae es la propuesta desde la teoría de la información: el índice de entropía (Theil 1969). La entropía crece cuanto más dividido está un total y desaparece sólo si una de las partes es igual al todo. Al igual que la fraccionalización de Rae, el valor mínimo es cero, pero el valor máximo de la entropía no está limitado en la unidad, sino que puede alcanzar el del logaritmo del número de componentes o partidos (ln p). Este índice puede calcularse tanto para determinar la entropía del electorado como la del parlamento.

Índice de entropía política (Theil)

$$H = -\sum_{i=1}^{p} v_i \ln v_i$$

Esta propuesta ha tenido poca acogida en los estudios electorales. El índice de entropía es algo menos sencillo de calcular que el índice de Rae, algo más difícil de interpretar y no está limitado de forma adecuada, pues cobra valores mayores de la unidad. La entropía también puede transformarse para medir el tamaño relativo de las partes (Waldman 1976). La máxima entropía es igual al logaritmo de p, por lo que la medida relativa no es sino la versión normalizada de la entropía, $H_N = H/\ln p$.

En todo caso, desde un punto de vista práctico, la diferencia entre adoptar un indicador de entropía o un indicador vinculado al índice de concentración es mínima en términos empíricos. El cuadro 7.5 muestra la correlación entre los índices de uno y otro tipo calculados sobre los 52 sistemas de partidos locales de las circunscripciones españolas en las elecciones de 1996. La asociación es tan fuerte que no vale la pena insistir demasiado en las ventajas de uno u otro tipo de indicador[3].

En cuanto a las tres dimensiones de la fragmentación, la correlación entre los indicadores hace evidente que no puede trabajarse a la vez con los indicadores de fragmentación y de fragmentación relativa, pues están muy fuertemente asociados. Sin embargo, la asociación de la fragmentación con el número de partidos es moderada, así como es inexistente la asociación del índice de fraccionalización normalizada con el número de componentes. Por tanto, se diría que una imagen bastante completa de la fragmentación del sistema nos la ofrece el número de componentes acompañado de un indicador de fragmentación, absoluta o relativa. El indicador absoluto podemos obtenerlo a partir del relativo y del número de partidos, o viceversa, según cuál sea el interés de la investigación.

---

[3] La fuerte correlación entre estos indicadores se ha comprobado también en diversos experimentos con números aleatorios, cuyo resultado no añade nada a lo expuesto en el cuadro 7.5. Empleo el índice de Rae en lugar del índice de concentración de Hirschman para mostrar correlaciones de signo positivo con la entropía.

Cuadro 7.5.
Correlación entre tres dimensiones de la fragmentación del electorado en las 52 circunscripciones españolas (1996).
I: Fragmentación. II: Fragmentación relativa. III: Número de componentes.

	F	*H*	*L*	H_N	*p*
I. Índice de fragmentación de Rae (*F*)	1				
I. Entropía (*H*)	0,97**	1			
II. Coeficiente de Lieberson (*L*)	0,96**	0,90**	1		
II. Entropía normalizada (H_N)	0,77**	0,80**	0,89**	1	
III. Número de partidos (*p*)	0,36**	0,39**	0,1 (n.s.)	-0,2 (n.s)	1

** $p<0{,}01$; N=52

7.4.2. El número efectivo y la familia trasversal de los números N_a.

La concentración/ fraccionalización puede transformarse en un indicador que disfruta de enorme popularidad en los estudios electorales, por lo aparentemente sencillo e intuitivo de su mensaje: el número efectivo de partidos (Laasko y Taagepera 1979). El número efectivo es el número de partidos iguales que darían lugar a una fraccionalización idéntica a la observada con el número existente (*p*) de partidos desiguales. O, si se prefiere, el número de partidos iguales con los que la probabilidad de acuerdo diádico sería la misma. El número efectivo de partidos se calcula como la inversa de la concentración: $N=(HH)^{-1}$, o bien, $N=(1-F)^{-1}$. El número puede variar entre la unidad, cuando la fragmentación es mínima (F=0), y el número escalar de componentes (p) cuando la fragmentación es máxima ($F=1-1/p$).

Número efectivo de partidos electorales (N_2, Laasko)[4]

$$N = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} v_i^2}$$

Un número equivalente a este número efectivo también puede calcularse a partir de la entropía, como el antilogaritmo de la misma, o el exponencial si empleamos logaritmos naturales ($N_1=e^{H}$)[5]. La medida indica el número de partidos iguales con los que la entropía sería la misma a la observada en el sistema. Ambas formas de calcular un número efectivo no son sino dos posibilidades dentro de una familia de índices con la forma $N_a=[\sum v_i^a]^{1/(1-a)}$ donde el exponente a puede variar entre cero e infinito (Laasko y Taagepera 1979; Taagepera y Shugart 1989; Taagepera 1999). Cuando a=2, se obtiene el número efectivo de partidos de Laasko (N_2); cuando $a \to 1$, se obtiene el número calculado a partir de la entropía (N_1). Taagepera (1999) ha mostrado recientemente que los casos límites de esta familia son el

---

[4] El primer autor del índice es Markku Laasko, quien lo publicó, en finés, en la revista *Politiikka*, en 1977. La referencia clásica internacionalmente conocida es Laasko y Taagepera (1979), de donde proviene esta información. Taagepera ha publicado después numerosos trabajos, que se citan en este apartado, perfilando las aplicaciones del índice y mostrando su parentesco con otros indicadores. No sería inadecuado, pero sí más largo, denominarlo número de Laasko y Taagepera.

[5] Este número se conoce a menudo como medida de hiperfraccionalización, por su sensibilidad a los componentes pequeños (Kesselman1966; Wildgen 1971).

número escalar de partidos, cuando a=0 (N_0=p), y la inversa del tamaño del mayor partido del sistema, cuando $a \to \infty$ ($N_\infty = 1/v_1$).

Cuanto menor es a, mayor es la sensibilidad del número a la multiplicación de los casos y, por tanto, a los casos pequeños; mientras que valores mayores de a hacen que el número N sea más sensible al tamaño de los partidos mayores. En consecuencia, los valores de N_1 son típicamente más elevados que los valores del número de Laasko (N_2). En los indicadores extremos, todos los partidos cuentan igual (N_0=p) o sólo el mayor cuenta ($N_\infty = 1/v_1$). Sea cual sea el valor de a, sin embargo, todos los números tienen la misma propiedad cualitativa de coincidir con el número escalar de partidos cuando la fragmentación es máxima. Esto es, cuando los partidos son iguales, N_a=p para cualquier valor de a.

Laasko y Taagepera (1979) muestran, con ejemplos de sistemas políticos europeos, cómo el número calculado a partir de la entropía es siempre más sensible a los partidos menores, sobre los que a menudo la información es incompleta o desconocida, que el que ellos proponen. Sumado esto a la diferente complejidad de la interpretación y el cálculo, la disciplina de la ciencia política se ha inclinado prácticamente en bloque por el número de Laasko. Prudencia y comodidad van aquí de la mano. La entropía y la fraccionalización están fuertemente correlacionadas, lo que vuelve inútil trabajar con ambas a la vez. Por esa misma razón, la decisión sobre uno u otro tipo de indicador tiene ínfimas consecuencias para la investigación empírica (cuadros 7.5 y 7.6).

Taagepera propone complementar la información del número efectivo con la inversa del tamaño del partido mayor (N_∞). Este número puede ser especialmente útil cuando la información del número efectivo (N_2) no permite hacerse una idea sobre si la posición del componente principal es dominante.[6] El número N_∞

---

[6] Una alternativa más compleja para medir el número de partidos, de manera que el indicador sea sensible al componente principal, es el número propuesto por Molinar (1991) con el nombre de NP. Este indicador puede calcularse a partir del número de Laasko y del tamaño del componente principal. Taagepera (1999)

tiene la ventaja de señalizar claramente la presencia de un partido con mayoría absoluta, tomando valores a partir de dos. Sin embargo, como el propio Taagepera reconoce, N_∞ está fuertemente correlacionado con N_2, por lo que no puede trabajarse con ambos a la vez.[7] De hecho, como se muestra en el cuadro 7.6, pese a encontrarse lejano, teóricamente, de N_2 o de N_1, su asociación con cualquiera de ellos es casi tan fuerte como la asociación entre ellos. La única consecuencia sensata que cabe sacar de las correlaciones del cuadro 7.6 es que si se desea emplear un indicador complementario al número efectivo de partidos, este debe ser el número escalar de los mismos, es decir, el extremo opuesto al sugerido por Taagepera dentro de la familia de índices N_a.

Cuadro 7.6.
Correlación entre distintas medidas del número de partidos (N_a) para los electorados de las 52 circunscripciones españolas (1996)

	(N_∞)	(N_2)	(N_1)	(N_0)
Inversa del partido mayor (N_∞)	1			
Número efectivo de Laasko (N_2)	0,912**	1		
Exponencial de la entropía o hiperfraccionalización. (N_1)	0,939**	0,974**	1	
Número *p* de partidos (N_0)	0,21(ns)	0,346*	0,28*	1

** p<0,01; N=52
* p<0,05; N=52

propone simplificar su fórmula como NP=1 +N_2-(N_2/N_∞). La correlación de NP con el número efectivo es, en mis datos simulados, 0,99, a la vez que su correlación con la inversa del partido mayor es 0,98. Para una crítica de esta medida puede verse, además del artículo de Taagepera, Lijphart (1994; 69-70).

[7] El recorrido está restringido de manera que $N^{0,5} \leq N_\infty \leq N$ (Taagpera 1999; 501). Taagepera reconoce el problema, pero se empeña en la idea, sobre la base de que es simple e intuitiva, sin ofrecer una verdadera solución.

Es muy poco habitual ocuparse del número escalar de partidos cuando se trata de estudiar la fragmentación. Pese a que figura como explanando en algunos modelos teóricos de primera importancia, empezando por las propias reglas de Duverger hasta los modelos más recientes (Taagepera y Shugart 1993; Cox 1997), lo más común, en la investigación empírica, es terminar acudiendo al número efectivo como único indicador. En buena medida, esta opción se defiende porque los datos sobre el número de partidos son, con frecuencia, incompletos, al subsumirse a los partidos más pequeños en la categoría de "otros". Taagepera (1997) ha mostrado que el número efectivo sale airoso del problema de indeterminación que esto supone, pues tiene un nivel de sensibilidad óptimo a los componentes pequeños. También es cierto que el número de partidos cobra valores que parecen sencillamente extravagantes cuando se transita de la teoría a los hechos, lo que, antes de la aceptación generalizada de la propuesta del número efectivo, ya daba lugar a procedimientos de cuenta más o menos *ad hoc* para los "partidos relevantes" (Sartori 1976).

Sin embargo, la calidad de los datos electorales mejora rápidamente a medida que las fuentes en soporte electrónico se hacen accesibles. Por ello, si se formulan hipótesis acerca del número de componentes del sistema, es razonable intentar ponerlas a prueba sobre dicho número siempre que sea posible. Esto no implica que no puedan relajarse o adaptarse para un número que depende del tamaño absoluto de las partes.

Por lo demás, si se quiere complementar la información de un indicador de fragmentación, sea el número efectivo de Laasko o sea otro, el número de partidos es la única medida que proporciona información lo suficientemente independiente. Hay además una buena razón teórica para adoptarlo, y es que se trata de uno de los componentes de la fragmentación del sistema, de manera que, conocido el número de partidos, podemos también determinar la fragmentación relativa. Por último, el número es indispensable para calcular los votos mínimos necesarios para obtener representación en las circunscripciones electorales. Ésta es una variable muy importante en la teoría que también se desdeña en la práctica, en parte, por los mismos motivos que se hace con el número de partidos.

7.4.3. Recapitulación

En resolución, pueden distinguirse tres aspectos en la fragmentación de un sistema: el número de partidos, su tamaño relativo, o grado en que son iguales o distintos, y su tamaño absoluto, que puede entenderse como una función de los dos anteriores. Un indicador del tamaño absoluto es la principal medida resumen acerca de la fragmentación. La fragmentación absoluta o relativa puede medirse de varios modos distintos. La más habitual y aconsejable consiste en una serie de medidas vinculadas al índice de concentración de Herfindahl-Hirschman: el índice de fraccionalización de Rae, el número efectivo de partidos de Laasko y el coeficiente de diversidad normalizada de Lieberson. He presentado las medidas basadas en la entropía como alternativa que tiene un fundamento sólido en física y en teoría de la información, aunque resulta poco claro qué es lo que se gana exactamente midiendo la división como entropía desde el punto de vista de los estudios electorales. Por último, he reivindicado la necesidad de complementar la medida de fragmentación absoluta con el número escalar de partidos. Este número es objeto de interés en la teoría, nos permite calcular las funciones de pagos y nos permite determinar la fragmentación relativa.

La opción entre el índice de concentración/ fragmentación y el número efectivo es, hasta cierto punto, una cuestión de conveniencia, o de cómo se transmite una misma información de modo más accesible a la intuición. Lo habitual es preferir el número efectivo, aunque en algunos casos sea mejor trabajar con un índice limitado en la unidad. Con todo, conviene subrayar lo obvio, a saber, que la relación entre ambos indicadores no es lineal, sino inversa, por lo que su asociación con otras variables del sistema electoral o del sistema de partidos no es idéntica.

En el capítulo 8 se adopta, por mor de la simplicidad, el índice de concentración de Herfindahl-Hirschman como medida principal de los efectos de las fórmulas electorales: fórmulas electorales más mayoritarias concentran más los escaños en pocos o un sólo partido, produciendo valores mayores del índice. Como medidas complementarias se emplean tanto el número de partidos representados como el tamaño del partido mayor (del que, nuevamente, por simplicidad, no creo necesario calcular la inversa)..

7.5. Medidas de desviación de la proporcionalidad

Existen infinitas maneras de medir la desproporcionalidad, sesgo o distorsión de los resultados electorales. El número de índices empleados en estudios comparados importantes, en la literatura de los sistemas electorales, ronda la media docena; el número de índices propuestos y analizados, con ejemplos reales o imaginarios, es bastante mayor. Si a los indicadores de proporcionalidad diseñados específicamente para los estudios electorales, añadimos las medidas de desigualdad empleadas por economistas y sociólogos, con los que a menudo están emparentados, encontramos una legión de índices con nombre propio. En este apartado se hace un repaso, inevitablemente breve y superficial, de los términos del problema y se propone la adopción, para casi cualquier propósito, del índice más sencillo de todos, el índice de desviación de Loosemore y Hanby (1971). Este índice resulta suficiente en la mayoría de los casos, aunque puede ser conveniente complementarlo con otros en algunas circunstancias. En particular, el índice de desviación distributiva de Monroe (1994) parece sumar todas las virtudes del anterior, salvo la simplicidad, y solventa algunos de sus defectos.

El índice de Loosemore y Hanby es la simple suma de las desviaciones individuales de la proporcionalidad para cada uno de los *p* partidos, tomadas en su valor absoluto, dividida la suma entre dos para normalizar su valor máximo en uno o en cien.

Indice de desviación agregada de Loosemore y Hanby:

$$D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\left|v_i - e_i\right|$$

El índice de desviación agregada tiene una sencilla interpretación intuitiva. Su valor indica la fracción de escaños que habría que redistribuir para lograr la proporcionalidad perfecta. Rose (1984) propone una transformación de este índice de manera que resulta un índice de proporcionalidad (en lugar de un coeficiente de desviación). La trasformación es simplemente su complementario: el valor de *D* restado de la unidad, o del 100%.[8] Esta transformación no añade nada y tal vez dificulte la interpretación intuitiva del índice tal y como acabo de señalarla.

Hay varias objeciones comunes a este índice. La primera de ellas es que el índice registra con la misma intensidad las desviaciones grandes que las pequeñas. Una observación relacionada, pero que no está justificada, es que el índice es demasiado sensible al número de partidos. La segunda objeción es que el índice no respeta el principio de Dalton de sensibilidad a las transferencias. La tercera es que el índice resulta siempre minimizado por la fórmula Hare, por lo que resulta inconveniente para comparar la proporcionalidad de las fórmulas. Esta última objeción merece ser tenida en cuenta en la medida en que indica que el índice apuesta por una determinada noción de proporcionalidad, la misma que la fórmula Hare, por lo que puede

---

[8] Con algunas excepciones, por ejemplo, Fry y McLean (1991) lo habitual es referirse al índice como índice de Loosemore-Hanby, más bien que como índice de Rose.

valer la pena explorar índices construidos sobre nociones teóricas distintas. No se sigue, sin embargo, que resulte inconveniente para la comparación de las fórmulas o para la comparación general de sistemas electorales. Discuto estos problemas por orden.

7.5.1. La noción intuitiva de proporcionalidad y sus índices

Para resolver la primera cuestión es necesario discurrir un poco sobre la idea intuitiva de proporcionalidad. El número y el tamaño de los partidos votados influyen de manera distinta en los valores de distintos indicadores de proporcionalidad. A continuación se comparan algunos índices por medio de cuatro ejemplos en los que la distribución de escaños es siempre mayoritaria, pero las sociedades representadas tienen distinto grado de fragmentación política. Los indicadores que se discuten registran de modo diferente las variaciones en el número de grupos sin representación y en la "gravedad" de la exclusión o la sobrerrepresentación de grupos que se produce en cada caso.

El más veterano índice de la literatura de los estudios electorales es el índice de desviación media de Rae (1971). Haciendo un juego algo superficial de comparaciones con medidas normativas de bienestar o justicia, el índice de Rae es al principio de la utilidad media lo que el índice de Loosemore-Hanby es al principio clásico de la utilidad agregada.[9]

[9] El hecho de que el principio de maximización de la utilidad media resuena en la idea de Rae de mínima distorsión, ha sido sugerido por Cox y Shugart (1991; p.349). Estos autores también encuentran cierta afinidad entre el principio de la diferencia de Rawls y el principio de minimización de la máxima sobrerrepresentación, propio de la fórmula D'Hondt.

Índice de desviación promedio de Rae:

$$I = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left|v_i - e_i\right|$$

En lo que parece un desliz dentro de su muy completa exposición, Monroe (1994; 139) afirma que Rae sugiere su índice como solución al problema de la excesiva sensibilidad al número de partidos presentada por *D*. Esta afirmación no está justificada. Dejando de lado la cuestión histórica (el índice de Rae es anterior), no puede decirse que *I* sea menos sensible que *D* al número *p* de partidos. Lo contrario es cierto. De hecho, ese error ya se encuentra en una revisión de Lijphart de ambos índices de proporcionalidad (1985; 10) y ha sido debidamente corregido por Gallagher (1991; 40).

Considérense cuatro ejemplos reproducidos en el cuadro 7.7. Se trata de cuatro sociedades con distinto grado de división política en las que un único grupo está representado (sólo puede elegirse a un representante). En el primer caso encontramos un sistema de dos partidos tal que ambos son iguales y toda la representación la obtiene uno de ellos. Los dos índices registran una distorsión igual a 0,5 (o 50%). En el segundo caso tenemos un sistema de cuatro partidos, el mayor de los cuales tiene la mitad de los votos. La desviación agregada es la misma que en el primer ejemplo, D=0,5, mientras que la desviación media es ahora la mitad, I=0,25. La fragmentación del número de partidos sin representación no supone ninguna diferencia para el primer índice, pero reduce a la mitad el valor del segundo, a pesar de que los partidos tercero y cuarto son bastante pequeños. En el tercer ejemplo encontramos un sistema de diez partidos bastante fragmentado. Esta vez la desviación agregada aumenta, D=0,7, mientras que la desviación media continúa bajando, I=0,14. Por último, sea un caso relativamente extremo en el que cien partidos tienen idénticos votos (0,01) y uno de ellos obtiene toda la representación en el vector de escaños. Las desviación agregada se aproxima al máximo teórico posible,

D=0,99, mientras que la desviación media sigue descendiendo en la dirección del mínimo I=0,02.

Cuadro 7.7. Comparación de algunos índices de desviación de la proporcionalidad ante sistemas de distinto tamaño y máxima concentración de escaños.

Ejemplo 1 v=[0,5 0,5]
(p=2; N_v=2; N_e=1) e=[1 0]

(r=0,5) D=0,5 I=0,5 MC=0,5 s_r=0,5 D_p=0,58

Ejemplo 2. v=[0,5 0,4 0,08 0,02]
(p=4; N_v=2,4; N_e=1) e=[1 0 0 0]

(r=0,58) D=0,5 I=0,25 MC=0,46 s_r=0,32 D_p=0,54

Ejemplo 3. v=[0,3 0,25 0,15 0,1 0,07 0,05 0,03 0,03 0,01 0,01]
(p=10; N_v=5,1; N_e=1) e=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

(r=0,81) D=0,7 I=0,14 MC=0,56 s_r=0,24 D_p=0,71

Ejemplo 4. v=[0,01..........v_p=0,01]
(p=100; N_v=100; N_e=1)) e=[1 0 0 ....e_p=0]

(r=0,99) D=0,99 I=0,02 MC=0,71 s_r=0,1 D_p=0,99+

Los valores del índice de Rae se pueden ver drásticamente alterados por la entrada en escena de grupúsculos que apenas logren votos. Para tratar de paliar ese problema, si es que lo es, Rae propone el expediente arbitrario de tomar en cuenta sólo aquellos partidos que superen el 0,5% de los votos. Esta variante es una especie de índice de variación media acotada, aunque no estrictamente, ya que desviaciones menores del 0,5% quedan recogidas en la media si se producen en la asignación de partidos mayores de dicho umbral. En todo caso, el recurso tiene difícil justificación y no cambia nada en ninguno de los cuatro ejemplos anteriores. No se puede querer medir la desviación promedio y a la vez contener el efecto del número de casos en el sistema. Si nos interesa la desviación media, hemos de admitir que la distribución del ejemplo cuatro es mucho más proporcional que cualquiera de las anteriores. Casi todos los partidos tienen una asignación cero muy próxima a sus votos y sólo hay un caso realmente desviado. Si la intuición nos dice que en el cuarto ejemplo encontramos la asignación menos proporcional de todas, entonces es que no nos interesa la desviación media.

Creo que puede haber discusión sobre si el caso uno y dos son o no igualmente proporcionales, pero no cabe duda de que cualquiera nos lo parece más que el cuarto caso. La desviación agregada es una guía mucho más fiable que la media a la hora de tratar de reflejar la intuición de proporcionalidad. Según creo, en la intuición de la proporcionalidad se combinan las ideas de desviación de la equidad y de representatividad. Una medida de desviación, para poder emplearse como medida de proporcionalidad, debe respetar el hecho de que la sociedad del primer ejemplo está mejor representada que la sociedad del cuarto ejemplo.

Considérese otro indicador que, en los cuatro ejemplos anteriores, se comporta de forma parecida al de Rae. La desviación de la proporcionalidad que sufre cada partido es la diferencia entre un valor esperado, la proporción de votos, y un valor observado, la proporción de escaños. La desviación típica residual es una bien conocida medida estadística de desviación de la expectativa. Las desviaciones son los residuos de una recta de regresión. En la desviación típica residual el término de comparación de cada elemento, la expectativa, no es la media, como en la desviación típica de una distribución, sino un valor predicho o esperado a partir de la recta de ajuste. Sustituyendo el valor observado y_i por

e_i y el valor esperado $\hat{y}_i$ por v_i en la fórmula habitual, esto es, tomando la recta de proporcionalidad como recta de ajuste, obtenemos una adaptación de la desviación típica residual para el caso de la proporcionalidad.

Desviación típica residual de la proporcionalidad:

$$s_r = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(v_i - e_i)^2}$$

Rae no está solo. Hay muchas formas de medir la desviación que encuentran que los cuatro ejemplos anteriores son progresivamente más proporcionales. El criterio de mínimos cuadrados es un ejemplo prominente y más que convencional. De acuerdo con este criterio, al igual que con la desviación promedio, resulta claro que la última distribución está mejor ajustada que las anteriores. Los valores pueden consultarse en el cuadro 7.7. Este resultado no es un defecto del indicador, simplemente mide algo que no coincide con la intuición de un reparto proporcional de escaños.

Gallagher (1991; 41) propone un nuevo índice que presenta como un compromiso o feliz término medio entre los índices de Rae y de Losemore-Hanby. Se supone que el índice tiene algunas propiedades deseables del índice de Rae, pero no padece el "problema" de ser demasiado sensible al número de partidos. Por *serendipity*, lo que Gallagher encuentra es un índice que puede describirse como un compromiso entre la desviación agregada y la desviación típica residual. A juzgar por el ejemplo en el que se basa para comparar la desviación media y la agregada, la propiedad deseable que este autor encuentra en el índice de Rae es que registra las desviaciones grandes como más importantes que las pequeñas, mientras que el índice agregado no varía en tanto la desviación total sea la misma. Ésta no es una propiedad del índice de Rae,[10] pues no es una propiedad de la media el ser sensible a la distribución, siempre que el número de casos sea el mismo. Ésta es una propiedad de la desviación típica.

Pese a la confusión que motiva su origen, la idea es interesante. El índice de Gallagher se ha dado en llamar índice de mínimos cuadrados, pues se construye a partir de la suma de los cuadrados de las desviaciones. El nombre no es del todo adecuado, pues el verdadero criterio de mínimos cuadrados para juzgar la proporcionalidad de una asignación de escaños es la desviación típica residual, que, como la desviación promedio, desciende cuando el número de casos aumenta. El índice de Gallagher más bien parece una modificación de la distancia euclídea entre el vector de votos y el vector de escaños, que resulta ser una norma canónica bastante habitual para medir distancias entre vectores. Con todo, no me propongo reformar los hábitos de nomenclatura.

Índice de mínimos cuadrados de Gallagher:

$$MC = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(v_i - e_i)^2}$$

Al igual que la desviación típica, y a diferencia de la desviación agregada, el índice suma los cuadrados de las desviaciones, por lo que es sensible a la distribución. Al contener un exponente en su término principal, el índice puede registrar la distinta concentración de las distorsiones, en conformidad con lo que Coulter (1989) llama

[10]El ejemplo en el que se basa Gallagher (1991; 40) es forzado y está mal interpretado. El autor compara un caso en el que dos partidos están sobre/infrarrepresentados en cuatro puntos cada uno con otro en el que ocho partidos están sobre/infrarrepresentados en un punto cada uno. Efectivamente, *D* no varía e *I* es menor en el segundo caso. Pero esto no muestra que el índice de Rae detecte siempre que las desviaciones mayores son más importantes. Si el número de casos es constante, la media no es sensible a la distribución. Si, de los ocho partidos, seis están perfectamente representados y dos están sobre/infrarrepresentados en cuatro puntos, el valor del índice no cambia.

el principio de exponente, principio que distingue las puras medidas de desigualdad de las medidas de concentración. Al igual que la desviación agregada, y a diferencia de la desviación típica (o de la desviación promedio), la suma no está corregida por el número de partidos sino simplemente por ½, de manera que el máximo valor teórico queda limitado en la unidad (o el 100%).

Este es el único índice, de los cuatro que se han introducido hasta el momento, que es capaz de discernir entre las sociedades primera y segunda del cuadro 7.7, a la vez que concuerda con la desviación agregada en juzgar que la tercera y cuarta sociedades están peor representadas que cualquiera de las anteriores. Es preciso notar, sin embargo, que las diferencias en los valores de este índice son considerablemente menores que en el agregado simple. Si la desviación agregada se aproxima a su valor máximo ya en el cuarto ejemplo, la desviación de Gallagher se encuentra bastante lejos. De hecho, el índice de Gallagher no puede alcanzar el valor máximo si no es a la vista de asignaciones arbitrarias desde el punto de vista de la representación electoral, tal como es el caso en el que un partido con cero votos tenga todos los escaños y un partido con todos los votos tenga cero escaños.

De todas formas, puede apostarse que con respecto al caso segundo, comparado con el caso primero, la intuición de proporcionalidad no es del todo clara. De un lado, parece que resulta deseable que el menor tamaño de los grupos excluidos quede recogido en un valor menor del índice de desviación: no es lo mismo excluir a la mitad de la sociedad como un bloque que excluir a la mitad de la sociedad cuando está fragmentada, pues resulta más plausible suponer que el grupo que ostenta la representación es hegemónico. De otro lado, la noción de representatividad implícita en la intuición de proporcionalidad puede llevarnos a razonar en sentido contrario: la segunda sociedad es más diversa que la primera pero sus representantes son los mismos (representan a la mitad), por lo que está peor representada. Esta intuición produce un juicio concordante con los índices *D* y *MC* en la tercera y cuarta sociedad, pero no en la segunda.

La noción de representatividad no puede ser capturada completamente dentro de un índice de proporcionalidad, ya que los índices de proporcionalidad son, esencialmente, índices de inequidad (Monroe 1994). Los índices de inequidad comparan el tamaño de los componentes de la sociedad con el tamaño de los componentes del conjunto de los representantes, no comparan el conjunto de la sociedad con sus representantes.

Una forma de medir la distinta diversidad de la sociedad y sus representantes es comparar la fragmentación en ambos casos. Taagepera y Shugart (1989; 209,273) emplean, para algunos fines, lo que denominan la reducción relativa del número efectivo de partidos $r=(N_v-N_e)/N_v$. Simplificando su fórmula, se obtiene la siguiente.

Reducción relativa del número efectivo de partidos (Taagepera y Shugart).

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{p} e_i^2 - \sum_{i=1}^{p} v_i^2}{\sum_{i=1}^{p} e_i^2}$$

Los valores de este indicador en el cuadro 7.7 aparecen entre paréntesis, para subrayar que no se trata de un índice de desviación de la equidad. Puede observarse que el índice encuentra peor representada a la segunda sociedad que a la primera, a la vez que coincide con los agregados en las sociedades tercera y cuarta. Así, la reducción relativa puede tal vez emplearse como complemento a la desviación agregada cuando se quiera comprobar si, en casos en los que la desviación de la proporcionalidad es constante o hasta se reduce, no puede haberse dado, con todo, una disminución de la diversidad en términos de la comparación entre los representantes y los representados. De la simple inspección de sus valores puede anticiparse que esta tasa de reducción covaría fuertemente con los indicadores de proporcionalidad propiamente dichos.

7.5.2. Proporcionalidad y equidad

Los índices de desviación de la proporcionalidad son índices de desviación de la equidad. Los índices de desviación de la equidad son generalizaciones de los índices de desigualdad en los que, a diferencia de estos últimos, el término de comparación no es necesariamente la igualdad, sino una expectativa que puede basarse en otro criterio, por ejemplo, la proporcionalidad. La única restricción en la definición de las expectativas es que no son negativas y la suma de la expectativa de cada individuo se corresponde con el total del bien a distribuir. Idealmente, los índices de proporcionalidad deberían satisfacer los requisitos formales que resultan bien conocidos para las medidas de desigualdad. En este apartado sigo, en lo fundamental, la exposición de Monroe (1994) y Coulter (1989).

El índice de desviación agregada de Loosemore y Hanby es una variación del índice de desigualdad de Shutz (1951).[11] Este índice se construye agregando las desviaciones con respecto a la igualdad. El lugar de la expectativa de proporcionalidad en el reparto de escaños (v_i) lo ocupa, en la fórmula, la media o distribución igual del producto ($1/p$). El índice de Shutz viola el principio de transferencias. Este principio dice que si, dada una distribución, puede lograrse una segunda en la que parte del producto se transfiere de un individuo más rico a un individuo más pobre, la desigualdad resultante debe ser menor, a condición de que la transferencia no sea tan grande como para alterar las posiciones relativas de los dos individuos. El índice de Shutz registra un descenso en la desigualdad si la transferencia se produce a través

---

[11] Parece que los primeros en notar la afinidad entre los dos índices fueron Taagepera y Shugart (1989).

de la media, pero no si se produce entre dos individuos con una asignación del producto superior a la media, o entre dos individuos con una asignación del producto inferior a la media. De modo análogo, el índice de desviación agregada registra un descenso en la proporcionalidad si se produce una transferencia de un partido sobrerrepresentado a uno infrarrepresentado (siempre que no se altere el orden), pero no registra los cambios si se producen transferencias entre partidos sobrerrepresentados, o si se producen entre partidos infrarrepresentados.

El principio de transferencias es indudablemente atractivo para la intuición. Se ha demostrado que sólo existe una familia de índices de desigualdad que satisface simultánemente el principio de transferencias y un conjunto de axiomas razonables, la Familia Generalizada de la Entropía[12]. La varianza de una distribución y el índice de entropía de Theil son miembros bien conocidos de esta familia. El propio Theil (1969) propone una adaptación de la entropía para medir la desproporcionalidad de los resultados electorales. Este índice mide la "sorpresa" que produce el mensaje de la distribución de escaños conocida la distribución del voto. La proporcionalidad es, naturalmente, la mínima sorpresa.

Información esperada (Theil)

$$IE(e{:}v) = \sum_{i=1}^{p} e_i \ln \frac{e_i}{v_i}$$

---

[12] Estos axiomas son la anonimidad (el índice depende sólo de las fracciones del bien que tienen los individuos, no de su identidad), la invarianza con respecto a la escala (el valor del índice no cambia si las fracciones de los individuos se multiplican por una constante), la aversión a la desigualdad absoluta creciente (si se añade una contante a las fracciones de todos los componentes, la desigualdad debe decrecer) y la separabilidad (si la desigualdad entre un subgrupo de componentes decrece, la desigualdad del conjunto decrece). La referencia más accesible es Coulter (1989). Una exposición sucinta se encuentra en Monroe (1994). Un contraste explícito, no alcanzado por Coulter (1989) entre la familia generalizada de la entropía y otras medidas de desigualdad (en particular, las emparentadas con el índice de Atkinson) puede verse en Jenkins (1989).

Monroe (1994) sugiere emplear un índice basado en la varianza. Concretamente, su punto de partida es lo que llama la *desviación de la equidad*, que no es sino la generalización de la desviación típica para medidas de equidad. Para el caso especial de la proporcionalidad, la desviación de la equidad es lo que he llamado desviación típica residual de la proporcionalidad. En general, la expectativa de la equidad puede ser cualquier otra, siempre y cuando la expectativa no sea nunca negativa y la suma de las expectativas de todos los componentes sea igual a la suma total del bien a distribuir. Naturalmente, el cuadrado de la desviación de la equidad es la varianza de la equidad.

El problema fundamental que Monroe señala para los índices de la familia de la entropía, como la varianza, es que no están debidamente limitados. Para normalizar el valor de un índice de inequidad entre cero y uno propone la siguiente estructura general: *Inequidad= Desviación / Máxima desviación*. Monroe propone su propio índice de inequidad, basándose en esta estructura, a partir de la desviación de la equidad. Su alternativa difiere de otras en la manera de definir la máxima desviación posible, a saber, el caso en el que un componente con una expectativa cero obtiene todo el bien y el resto obtienen cero. Aunque Monroe justifica este concepto de máxima desviación en otros términos, es obvio que el reparto proporcional de escaños sólo se aproxima a este máximo cuando la fórmula es mayoritaria, todos los partidos son iguales y su número tiende a infinito. El concepto subyacente de máxima desviación es así el mismo que en el índice de desviación agregada de Loosemore y Hanby. Monroe llama a su índice *desviación distributiva*. La fórmula de esta medida de inequidad para el caso especial de la proporcionalidad es la siguiente:

Índice de desviación distributiva (Monroe)

$$D_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}(v_i - e_i)^2}{1 + \sum_{i=1}^{p} v_i^2}}$$

Para Monroe este índice es, sobre todo, una versión normalizada de la desviación típica. En realidad, bajo el problema de la limitación de los valores entre cero y la unidad, se esconde otra cuestión. Mientras que la desviación típica covaría con la desviación promedio en los ejemplos del cuadro 7.7, la desviación distributiva covaría con la desviación agregada y con el índice de Gallagher. La desviación distributiva tiene valores algo superiores a los de la desviación agregada y bien distintos que los del índice de Gallagher, pero se comporta de igual modo a este último cuando se trata de registrar una mayor desproporcionalidad en el ejemplo primero que en el segundo.

Los índices de Loosemore-Hanby y de Gallagher son ambos índices agregados, construidos a partir de la suma de las desviaciones absolutas y de la suma cuadrática. El índice de Rae y la desviación de la equidad, o desviación típica residual, reflejan el "error promedio" de la asignación con respecto a la proporcionalidad, calculado, respectivamente, a partir de la suma de errores absolutos y de la suma cuadrática. Al dividir la suma por el número de casos, el promedio desciende, cuando los casos aumentan, de forma mucho más acusada que el agregado, por lo que los índices ofrecen el resultado contraintuitivo de que sociedades muy mal representadas, por ser muy diversas, dan lugar a valores muy bajos en la medida de desproporcionalidad. La desviación distributiva de Monroe divide el agregado por una medida del *tamaño absoluto* de los componentes. El elemento principal del denominador del índice no es otro que el índice de concentración de Herfindahl-Hirschman aplicado a la distribución de los votos, cuya inversa, como sabemos, es el número efectivo de partidos electorales. El índice de concentración es prácticamente insensible a la multiplicación de componentes muy pequeños.

De este modo, el índice de desviación distributiva de Monroe suma varias virtudes. De un lado, no presenta el problema de excesiva sensibilidad al número de partidos; de otro lado, es sensible a la distribución de las desviaciones, pero, a la vez, supone una considerable mejora técnica sobre el índice de Gallagher. Al dividir la suma cuadrática siempre entre dos, el índice de Gallagher sólo registra la máxima desproporcionalidad en un caso políticamente absurdo, cuando un partido con cero votos tiene todos los escaños y un partido con todos los votos tiene cero escaños. Para la máxima desviación concebible en la representación política, a saber, que un grupo minúsculo que tiende a cero tenga toda la representación mientras que el resto de los grupos (tendencialmente infinitos) son iguales, el valor máximo del índice de Gallagher tiende a 0,75 (es 0,71 en el ejemplo cuarto del cuadro 7.7) mientras que tanto la desviación agregada como la distributiva tienden a la unidad. El índice de Monroe divide la suma cuadrática por un número entre uno y dos, más próximo a uno cuando la fragmentación aumenta y más próximo a dos cuando la distribución del voto está más concentrada.

El índice de desviación distributiva de Monroe tiene en su contra la mayor complejidad de su cálculo con respecto a otros índices. Con todo, debe notarse que el índice se puede obtener a partir del índice de Gallagher y del número efectivo de partidos, los cuales suelen estar disponibles en las bases de datos sobre sistemas electorales como la de Lijphart (1994), aunque necesariamente se pierda información, al despreciarse parte de los decimales en el valor que efectivamente se maneja de estos indicadores.

Fórmula de equivalencia entre la desviación distributiva y el índice de mínimos cuadrados más el número efectivo de partidos electorales.

$$D_p = \sqrt{\frac{2(MC)^2}{1+\frac{1}{N_v}}}$$

El propio Monroe es el primero en admitir que el índice de desviación agregada de Loosemore y Hanby es el más sencillo de calcular y el más fácil de interpretar de todos los índices conocidos . La objeción más importante es que no es sensible a las transferencias, mientras que la desviación distributiva sí lo es. En realidad, este es un problema bastante menor desde el punto de vista empírico, como Monroe subraya con un ejemplo (1994; 141-143) comparando su índice y la desviación agregada. De hecho, si el interés de los índices reside en su utilidad para el estudio comparado de los sistemas electorales, el problema de elección de índice es casi un falso problema, ya que todos correlacionan fuertemente entre sí. El cuadro 7.8 compara los valores de los índices que se han expuesto aquí, más un índice que se introduce en el siguiente apartado, para los resultados electorales de las circunscripciones españolas en las elecciones de 1996. Para el análisis comparado, los índices parece que ofrecen casi la misma información.

Cuadro 7.8.
Correlación entre ocho medidas de desviación de la proporcionalidad y medidas afines para los resultados electorales de las 52 circunscripciones españolas (1996)

	D	I	s_r	MC	D_p	IE	D_{SL}	r
D	1							
I	0,954 **	1						
s_r	0,959 **	0,994 **	1					
MC	0,983 **	0,974 **	0,989 **	1				
D_p	0,971 **	0,976 **	0,992 **	0,997 **	1			
IE	0,961 **	0,947 **	0,947 **	0,955 **	0,945 **	1		
D_{SL}	0,965 **	0,963 **	0,962 **	0,963 **	0,956 **	0,981 **	1	
r	0,921 **	0,817 **	0,843 **	0,899 **	0,921 **	0,894 **	0,856 **	1

** $p<0,01$; $N=52$

7.5.3. *Proporcionalidad y fórmulas de representación proporcional*

Queda un último problema: el índice de desviación de Loosemore-Hanby resulta siempre minimizado por la fórmula Hare de restos mayores. Gallagher (1991; 39), tras notar esto, encuentra en ello una razón para desdeñarlo, pues "prejuzga lo que, ostensiblemente, debe ser descubierto". El hecho de que Gallagher ofrezca una prueba de su cosecha y la reacción de algunos críticos, como Cox y Shugart (1991), quienes se apresuran a demostrar que al índice de Gallagher (*MC*) le sucede igualmente, podría mover a pensar que este autor es el primero en apreciar que el método de cuota simple minimiza una función idéntica al índice D. Sin embargo, este cabo está atado desde bastante más atrás, de forma independiente (pero sin apreciar que dicha función es un conocido índice de desviación de la proporcionalidad) y con mayor generalidad. Balinski y Young (1982; 104) atribuyen a Birkhoff (1976) la demostración de que el método de Hare (para ellos, Hamilton) minimiza cualquier norma $\mathbf{v}-\mathbf{e}$, incluyendo $\sum|v_i-e_i|$ y $\sum(v_i-e_i)^2$. Esto quiere decir que minimiza todas las medidas de desviación que se han introducido más arriba.[13]

Aquello que "debe ser descubierto" consiste, para Gallagher, en cuál es el método más proporcional. Su argumento parece cobrar la forma de un rechazo general hacia los índices de proporcionalidad, pues no sólo la fórmula de Hare minimiza la desviación agregada, sino que, en general, cada fórmula genera su propio índice y "muchos índices optan implícitamente por una determinada fórmula" (p.38). Como consecuencia, le parece "metodológicamente cuestionable", la práctica habitual de comparar fórmulas según qué valores produzcan en los índices, aunque esto resulta "en última instancia, inevitable" (p.38)

¿Es o no es metodológicamente cuestionable? Como han señalado sus críticos (Cox y Shugart 1991) Gallagher parece no ser consecuente con su argumento, pues se afana en su artículo por producir una nueva comparación de las fórmulas electorales a partir de su rendimiento medido por índices de proporcionalidad, solo que añadiendo un índice nuevo (*MC*) de su cosecha a los ya clásicos. Gallagher no indica que su propio índice también es minimizado por la fórmula de Hare, como lo son todos los índices comunes (e.g el de Rae y el de Monroe). En realidad, no es exacto decir que cada fórmula genera su propio índice, pues son infinitas las funciones que pueden ser minimizadas por una fórmula electoral

[13] La información esperada de Theil y la reducción relativa del numero de partidos no son, por razones distintas, medidas de desviación.

(Monroe 1994). Otra cosa es que las funciones merezcan el nombre de índices de proporcionalidad.

Esto no convierte en un hecho trivial la correspondencia entre índices y fórmulas. Gallagher hace un trabajo valioso presentando algunos índices intuitivos y coherentes que son minimizados por algunas de las fórmulas más habituales[14]. El error está en inferir que hay un problema en que un índice refleje "la misma noción de proporcionalidad" que una determinada fórmula, como si eso entrañase alguna circularidad. Todo lo contrario, creo que es una virtud de los índices como los presentados hasta ahora el resultar minimizados por la cuota simple que, como sabemos, es la fórmula electoral con función de umbrales paralela a la recta de proporcionalidad. No hay circularidad, pues el modo en el que una fórmula produce sus resultados es completamente predecible, por lo que no tiene por qué ser un problema admitir que el enunciado "la fórmula X es la más proporcional" es un enunciado estrictamente analítico. Simplemente, dependiendo de cómo se mida la desviación de la proporcionalidad la fórmula tal o tal será inmediatamente la más proporcional. Buscar una medida de desproporcionalidad que no sea minimizada por fórmula alguna es algo así como querer engañar a la propia sombra. Se pueden encontrar medidas de desviación no minimizadas por ninguna fórmula habitual o conocida en la práctica electoral, tal es la estrategia de Pennisi (1998), pero en modo alguno se aprecia cuál es la ganancia.

El método de cuota simple es el centro en el continuo en los métodos de representación proporcional de esta familia. El método de Sainte-Laguë ocupa una análoga posición central en el continuo de los métodos de divisores. Hay razones para decir que las fórmulas más proporcionales, dentro de cada familia, son Hare y

---

[14] Aunque debe decirse que el trabajo estaba hecho en Balinski y Young (1982; 101-105). Estos autores proporcionan formulaciones mucho más precisas, sólo que no emplean en lenguaje de los "índices de desviación" sino el de la optimización constreñida.

Sainte-Laguë. No es casual que resulten las más robustas en el experimento de Pennisi (1998) frente a una batería de índices de todo tipo. El método de Sainte-Laguë minimiza una función que podríamos llamar de desviación relativa. De hecho, el método fue construido por su autor para minimizar esta expresión.[15]

Índice de desviación relativa (Sainte-Laguë)

$$D_{SL} = \sum_{i=1}^{p} \frac{(v_i - e_i)^2}{v_i}$$

Puede decirse, y así se ha señalado en varios lugares (Balinski y Young 1982; Gallagher 1991; Monroe 1994), que este índice mira a la desviación desde el punto de vista de los votantes, mientras que los índices como D o D_p la contemplan desde el punto de vista de los partidos. Su característica esencial es que pondera las desviaciones de cada partido por el tamaño de su electorado. De esta manera, grandes desviaciones en partidos pequeños se registran más intensamente que grandes desviaciones en partidos grandes, a la vez que las pequeñas desviaciones en partidos grandes tienen una contribución mínima en el valor del índice.

Las principales objeciones que pueden hacerse a este índice son operacionales. La fundamental es que el índice no está limitado, teniendo como valor teórico máximo el infinito. De hecho, el índice crece demasiado rápidamente en una distribución igualitaria, cuando partidos que tienden a cero reciben una asignación positiva, limitando así su interés como herramienta de comparación. De otro lado, el índice presenta evidentes problemas de computación cuando existen partidos cero, algo frente a lo que son indiferentes los habituales indicadores de desviación. En cualquier modo, y para

[15] Lijphart y Gibberd (1972) reeditan una nota de Sainte-Laguë de 1910 donde puede encontrase esta medida (de hecho, una expresión equivalente) como término de error que debe ser minimizado por el método de reparto.

los fines más habituales, el empleo de este índice no parece añadir una información muy distinta a la que ofrecen otros indicadores, como atestiguan las correlaciones presentadas en el cuadro 7.8.

Creo que si los índices de proporcionalidad pueden parecer cuestionables como herramienta para comparar a las fórmulas entre sí, a través de sus resultados, se debe a que la proporcionalidad no es lo esencial a la hora de entender cómo se ordenan las fórmulas. Lo malo no es que el juicio 'X es la fórmula más proporcional' resulte ser un enunciado puramente analítico, sin contenido empírico; el verdadero problema es saber cuál es la segunda más proporcional. Este problema no sucede con el criterio de comparación 'X es al menos tan mayoritario como Y', pues induce un orden completo para cada familia de fórmulas. Se dirá que el orden no es completo para todos los métodos, que hay claras inconmensurabilidades entre las familias, pero exactamente lo mismo sucedería con un posible orden por su grado de proporcionalidad. De poderse definir una relación 'ser al menos tan proporcional como' que indujese un orden, encontraríamos uno para las fórmulas de cuota, con Hare en la cúspide, y otro con las fórmulas de divisores, encabezado por Sainte-Laguë.

De hecho, la situación sería especialmente incómoda, pues Hare y Sainte-Laguë son fórmulas inconmensurables. Si ordenamos las fórmulas por criterio de mayoría, al menos estamos seguros de que la fórmula D'Hondt es la más mayoritaria de las fórmulas proporcionales, así como la fórmula Adams es la más igualitaria. Sin embargo, se pueden encontrar razones para afirmar que la fórmula Hare es más proporcional, como se pueden encontrar razones para afirmar que Sainte-Laguë lo es más. Razones que se refieren, por ejemplo, a si las desviaciones deben medirse para los grupos o para los individuos.

7.5.4. Recapitulación

En este apartado se han discutido algunas objeciones que pueden presentarse a la sencilla recomendación de emplear el índice de desviación de Loosemore y Hanby como principal medida de desproporcionalidad. En primer lugar, se ha mostrado que no es una propiedad contra-intuitiva del índice el no ser demasiado sensible al número de componentes, sino todo lo contrario. En segundo lugar, se ha aceptado que el índice no satisface el principio de sensibilidad de transferencias, lo que es un problema para una medida de equidad; sin embargo, el propio autor de la mejor alternativa que soluciona este problema (Monroe 1994) encuentra pocas razones para adoptar una medida más compleja sólo por este motivo. Por último, se ha rechazado como irrelevante la objeción que señala que este índice es minimizado por el método de cuota simple, haciendo así a Hare campeón de la proporcionalidad antes de que empiece la carrera. Este hecho no modifica en nada la utilidad del índice, pues hacer carreras entre fórmulas para ganar en proporcionalidad no tiene, en sí mismo, demasiado sentido. Es muy razonable afirmar que las fórmulas Hare y Sainte-Laguë son las 'más proporcionales' de sus familias respectivas. Si se desea, se pueden emplear dos índices y "probarlo".

La utilidad de los índices de desviación reside, según creo, en que pueden ayudar a comparar fórmulas o, más en general, sistemas electorales, que no son conmensurables como procedimientos. Para este propósito, la correlación entre todos los índices puede que sea siempre tan grande como para que no valga la pena complicar el asunto ni una línea más.

7.6. Recapitulación

Los métodos de reparto y, en consecuencia, los sistemas electorales, no pueden ordenarse de modo absolutamente concluyente excepto separando las familias de cuotas y divisores.

Sin embargo, es posible, y es razonable, emprender estrategias más indirectas de investigación basadas en algunas propiedades de los resultados que son producto de las fórmulas. La propiedad más interesante es, en mi opinión, la concentración o fragmentación de la distribución de escaños. Esto no significa que la clásica preocupación normativa por los índices de proporcionalidad carezca de interés, aunque siempre debe abordarse de modo complementario al estudio de la concentración. En el capítulo se han repasado buen número de indicadores propuestos para mejor capturar la información de los resultados electorales.

Tras una discusión extensa de las alternativas, los indicadores más sencillos han sido vindicados. Como medidas de fragmentación, el índice de concentración *HH* de Herfindahl-Hirschman o, de modo equivalente, el índice de fraccionalización *F* de Rae, son los más informativos sobre la distribución del electorado y los escaños. Especialmente, por lo que se refiere a la segunda, cabe esperar una correlación positiva entre el sesgo mayoritario de una fórmula y el índice de concentración para la distribución de escaños (o una correlación negativa con el índice de fraccionalización). Como medidas complementarias, lo primero que debe tenerse en cuenta es el simple número de componentes o partidos del sistema; en segundo lugar, puede ser útil tener la información sobre el tamaño del componente mayor. Como medida de desviación de la proporcionalidad, es difícil encontrar argumentos para abandonar el sencillo número *D* de Loosemore y Hanby. De entre todas las alternativas, la más satisfactoria es el índice de desviación de la equidad de Monroe, pero supone una mayor complejidad en el cálculo, y en la interpretación, a la vez que ofrece muy poca información añadida. Estos son los números índices que van a emplearse en los ejercicios de comparación de sistemas electorales que se presentan en el capítulo 8.

CAPÍTULO OCHO

DOS EJERCICIOS EXPERIMENTALES DE COMPARACIÓN DE FÓRMULAS Y SISTEMAS ELECTORALES

En este capítulo se comparan fórmulas y sistemas electorales indirectamente, es decir, comparando los valores de algunos indicadores que ofrecen información relevante sobre las propiedades de los resultados que los métodos de reparto producen. Se presentan dos ejercicios de simulación de sistemas y resultados electorales, sacando partido de la continuidad en las variables que caracterizan a las fórmulas electorales, el término de ajuste c y el modificador n. La formulación de estos ejercicios no sería posible de no contar con el análisis de las fórmulas como formas funcionales. Al poder representar a las fórmulas como un continuo, podemos estudiar variaciones continuas en algunos indicadores, concretamente en los de concentración, allí donde la realidad empírica nos tiene acostumbrados a discontinuidades.

El primer ejercicio se concentra en la gama de las fórmulas proporcionales, con el objeto de establecer afinidades entre métodos de cuota y de divisores, con vistas a una clasificación conjunta, así como de corroborar con los datos las continuidades que se han establecido, para cada familia, en la teoría. En este ejercicio, nueve sistemas electorales que varían sólo en la fórmula son enfrentados a mil sistemas de partidos generados aleatoriamente.

El segundo ejercicio propone una comparación de sistemas electorales completos, es decir, de pares [M, c]. En la primera parte, una distribución de votos tomada del mundo, la de la circunscripción de Barcelona[1] en las elecciones legislativas de 1996, es enfrentada a un total de 3.000 sistemas electorales. En la segunda parte, un sistema de partidos generado aleatoriamente es enfrentado a 30.000 sistemas electorales.

8.1. Primer ejercicio: comparación de fórmulas electorales proporcionales

8.1.1. Objetivos del ejercicio

Con este ejercicio se pretende mostrar, en primer lugar, la continuidad en los resultados de las fórmulas por familias (cuotas y divisores) y corroborar el orden que induce la relación 'ser al menos tan mayoritario' en cada subconjunto. En segundo lugar, se trata de ilustrar la inconmensurabilidad entre fórmulas, a la vez que la gran proximidad que existe entre algunas de ellas, a pesar de no ser estrictamente comparables. Éste es el caso, especialmente, de las dos fórmulas "centrales" de los métodos de divisores y cuotas: la fórmula de Sainte-Laguë y la fórmula de Hare. En tercer lugar, el ejercicio pretende dar con la situación aproximada de la fórmula de Sainte-Laguë modificada y, en general, con un orden razonablemente bien fundado para las fórmulas de representación proporcional, sean o no sean conmensurables. Este orden se basa en un criterio de mayor o menor sesgo mayoritario, no en un criterio de proporcionalidad; es un cuarto objetivo de este pequeño experimento mostrar que un orden por mayor o menor

---

[1]La elección de Barcelona no responde a ningún criterio complejo de selección: se trata, simplemente, de una circunscripción donde el voto está bastante repartido entre varios partidos grandes a la vez que los pequeños son numerosos.

proporcionalidad no es interesante, si es que es viable. Por último, el ejercicio intenta ser consecuente con la vindicación de los índices sencillos frente a los más complejos, defendida en el capítulo 7.

8.1.2. Diseño

Se han creado 1.000 sistemas de partidos al azar. El número de partidos se ha generado aleatoriamente desde una distribución uniforme entre dos y 21 partidos. La categoría menos representada es la de 17 partidos, con 44 casos, las más representadas son las de cinco y 15 partidos, con 62 casos cada uno. A continuación se generaron distribuciones de voto para los 1000 sistemas. Las votaciones son aleatorias, tomadas, nuevamente, de una distribución uniforme. Al adoptar la distribución uniforme se incrementa considerablemente la varianza, o, en términos electorales, la fragmentación de los votos. La media de la concentración del voto en los sistemas es de 0,17, lo que significa casi seis partidos efectivos (5,89), y el valor modal, en más de un tercio de los casos, es 0,1 (diez partidos efectivos). La mínima concentración representada es 0,05 y la máxima 0,95, luego contamos con alguna instancia de casi partido único.

La magnitud se he fijado en 100 escaños, de manera que todas las asignaciones pueden aproximarse considerablemente a la proporcionalidad perfecta. Con esta magnitud se han creado nueve sistemas electorales a partir de una muestra estratégica de nueve métodos de reparto proporcional. Los métodos escogidos son seis de divisores y tres de cuota y restos mayores: D+0 o Adams, D+1/3 o danés, D+0,5 o Sainte-Laguë, D+0,75, D+1 o D'Hondt, D+0,5m o Sainte-Laguë modificado, Q-1 o "cuota larga", Q+0 o cuota simple de Hare y Q+1 o cuota Droop. La fórmula D+0,75 se introduce como fórmula equidistante que es entre Sainte-Laguë y D'Hondt y para situar la posición relativa de la fórmula de Sainte-Laguë modificada. En lugar de introducir una fórmula equidistante entre Adams y Sainte-Laguë se introduce el método danés por la sencilla razón de no ser desconocido en la práctica. En los métodos de cuota se introducen la cuota proporcional de Hare y la mayor y menor cuota que forman un método simple proporcional (es decir, no compuesto).

8.1.3. Proposiciones

A las proposiciones que siguen se les puede calificar, si se prefiere, de hipótesis, aunque me parece que quedan suficientemente bien establecidas por la teoría.

P1. Dejando aparte la *fórmula modificada*, el orden de las fórmulas por un criterio procedimental es el siguiente:

$$D+0 \geq D+1/3 \geq D+0{,}5 \geq D+0{,}75 \geq D+1$$
$$Q-1 \geq Q+0 \geq Q+1$$

P2. Los métodos Adams y D'Hondt son los casos límite dentro de la región de los métodos de representación proporcional, por lo que también puede escribirse:

$$D+0 \geq Q-1 \geq Q+0 \geq Q+1 \geq D+1$$

P3.Cuanto más mayoritaria (≥) es una fórmula, *ceteris paribus*, mayor es la concentración de los escaños entre los partidos (*HH*), mayor es la concentración de escaños en el mayor partido y menor es el número de partidos representados. Como corolarios: **C1**. La fórmula D'Hondt maximiza la concentración de escaños, maximiza el número de escaños del partido mayor y minimiza el número de partidos que obtienen representación. **C2**. La fórmula Adams minimiza los indicadores maximizados por D'Hondt y maximiza número minimizado por D'Hondt. **C3**. El rango de las fórmulas, comparando los valores de los índices de concentración de las distribuciones de escaños que generan, ha de ser el enunciado en P1 y P2. **C4**. Los métodos no conmensurables en P1 y P2 dan lugar a valores en los índices que son unas veces mayores y otras menores, dependiendo de la distribución de los votos.

P4. El método Hare minimiza el índice *D* de desviación e indicadores afines, que miden la distancia entre el vector de escaños y el vector de votos (D_p, *MC*, *I*, etc). Como corolario, cuanto más próximo sea un método de cuota al método Hare, menor es la desviación.

P5.Como *procedimiento*, la *fórmula* Sainte-Laguë *es la menos* sesgada, en sentido mayoritario o en sentido contrario, de las fórmulas de divisores. La fórmula de Hare es *la menos sesgada de* las fórmulas de cuota y restos mayores. Ambas son "centrales" en sus familias. Su comportamiento es previsiblemente similar, aunque no idéntico.

P6. El método Hare ha de encontrarse en una posición próxima *a la mediana en los índices de concentración, posición que debe* ocupar la fórmula de Sainte-Laguë.

P7. El método Sainte-Laguë ha de encontrase en una posición próxima al extremo (mínimo) en los índices de desviación, posición que debe ocupar la fórmula Hare.

8.1.4. Operaciones

Se han computado las 9.000 asignaciones de escaños y se han calculado los índices de desviación entre las distribuciones de escaños y las distribuciones de votos, así como los índices de fragmentación sobre las distribuciones de escaños. Los indicadores de desviación son el índice de Loosemore- Hanby (*D*) y el índice de desviación distributiva de Monroe (D_p). Informo de los resultados de las comparaciones basadas en ambos índices aunque, tal y como esperaba, son prácticamente iguales. Los indicadores de fragmentación son tres: el simple índice de concentración de Herfindahl-Hirschmann (*HH*), la representación del mayor partido y el número de partidos que alcanzan cualquier representación.

En el ejercicio no se comparan directamente los valores de los índices, que en todo caso muestran poca variación, dadas las condiciones del experimento, sino el grado de coincidencia entre las fórmulas y cómo se ordenan unas frente a otras por los valores de los indicadores. Por una parte, se ha construido una matriz de coincidencias en los resultados; de otro lado, se ha establecido el orden en el que quedan situados cada uno de los métodos con respecto a los otros ocho, a partir de las frecuencias en que cada método minimiza un indicador (obtiene el último rango con respecto a un indicador), lo maximiza (obtiene el primero), o queda en cualquier posición intermedia.

8.1.5. Resultados

El cuadro 8.1 presenta la matriz de coincidencias en las distribuciones de escaños por los nueve sistemas electorales. Esta matriz transmite un primer mensaje bastante instructivo acerca de la continuidad entre los métodos de reparto. La coincidencia más infrecuente se encuentra entre los métodos D'Hondt y Adams: sólo 77 casos, o el 7,7%, a pesar de tratarse de distribuciones del voto muy uniformes, en promedio, y de contar con una magnitud electoral muy grande. No en vano, se trata de las alternativas límite dentro de los métodos de reparto proporcional. La continuidad entre las fórmulas también la atestigua el hecho (no indicado en el cuadro) de que 77 son las veces en las que *todas* las fórmulas coinciden en una misma asignación. La coincidencia más frecuente, dejando de lado el método Sainte-Laguë modificado, se da entre los dos métodos centrales de cada subconjunto (80,8% de los casos). La fórmula de cuota más parecida a Sainte-Laguë es la de Hare, y la fórmula de divisores más parecida a la segunda es la primera; además, ningún otro par de fórmulas se asemeja tanto entre sí en sus resultados. Tomando cuotas y divisores por separado, la frecuencia de coincidencias entre dos fórmulas cualquiera aumenta cuanto más distanciadas se encuentran en el orden previamente establecido (P1). Los métodos extremos de divisores también enmarcan correctamente el orden de los métodos de cuota (P2), pero debe destacarse que parecen encontrarse bastante distanciados de sus cuotas más próximas.

Cuadro 8.1. Matriz de coincidencias en las asignaciones de las nueve fórmulas electorales (frecuencias absolutas).

	Adams	Danesa	Sainte-Laguë	D+ 0,75	D'Hondt	Ste-Laguë mod	Q-1	Hare	Droop
Adams	1.000	328	187	116	77	177	266	180	124
Danesa	328	1.000	481	239	138	429	636	491	347
Sainte-Laguë	*187*	*481*	*1.000*	*434*	*212*	*865*	*684*	*808*	*699*
D+0,75	116	239	434	1.000	437	493	286	432	569
D'Hondt	77	138	212	437	1.000	236	129	207	292
Ste-Laguë(m)	177	429	865	493	236	1.000	594	731	676
Q-1	266	636	684	286	129	594	1.000	707	492
Hare	180	491	808	432	207	731	707	1.000	738
Droop	124	347	699	569	292	676	492	738	1.000

Los cuadros 8.2, 8.3 y 8.4 comparan las frecuencias con las que cada uno de los métodos obtiene el valor más alto, más bajo, o cada uno de los intermedios, de tres indicadores de fragmentación para las asignaciones de escaños. El cuadro 8.2 se refiere al índice de concentración *HH*, positivamente correlacionado con el sesgo mayoritario de las fórmulas. El cuadro 8.3 se refiere al tamaño, en número de escaños, del mayor partido, también correlacionado positivamente con el sesgo mayoritario. El cuadro 8.4 se refiere al número de partidos que obtienen cualquier número de escaños, lo que está negativamente relacionado con el sesgo mayoritario (o tiene una asociación positiva con el sesgo contrario, el igualitario).

Cuadro 8.2. Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza el índice de concentración de escaños (*HH*), lo maximiza o queda situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas)

	Adams	Danesa	Sainte-Laguë	D+0,75	D'Hondt	Ste-Laguë (mod)	Q-1	Hare	Droop
Mínimo	1.000	328	187	116	77	177	266	180	124
8°	352	967	450	211	112	398	669	459	316
7°	244	678	733	309	154	632	949	727	511
6°	195	536	891	390	193	782	775	912	662
Mediano	183	473	930	434	212	847	691	868	761
4°	165	415	869	497	236	846	598	862	818
3°	132	324	677	625	295	805	443	660	873
2°	107	230	421	987	449	480	274	419	582
Máximo	77	138	212	437	1.000	236	129	207	292

Cuadro 8.3 Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza la representación del mayor partido, la maximiza o queda situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas)

	Adams	Danesa	Sainte-Laguë	D+0,75	D'Hondt	Ste-Laguë (mod)	Q-1	Hare	Droop
Mínimo	1.000	747	581	389	252	556	668	577	498
8°	769	976	804	599	422	779	898	802	718
7°	651	903	925	718	530	900	971	923	838
6°	602	852	970	768	580	951	926	974	888
Mediano	580	828	982	792	604	971	906	962	912
4°	546	792	964	827	634	967	870	966	930
3°	489	732	902	889	695	927	809	904	970
2°	379	613	782	990	816	807	689	783	869
Máximo	252	445	604	806	1.000	628	512	601	685

Cuadro 8.4 Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza el número de partidos con representación, lo maximiza o queda situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas)

	Adams	Danesa	Sainte-Laguë	D+ 0,75	D'Hondt	Ste-Laguë (mod)	Q-1	Hare	Droop
Mínimo	532	651	724	851	1.000	829	687	721	755
8°	607	752	841	1.000	851	974	796	839	878
7°	622	770	864	975	830	999	818	861	900
6°	663	839	955	881	758	905	901	953	991
Mediano	685	869	975	849	730	872	935	987	971
4°	701	892	976	828	712	851	961	986	945
3°	727	931	943	796	687	819	995	945	905
2°	775	999	879	751	650	770	927	878	843
Máximo	1.000	774	696	607	532	623	724	691	665

Tal y como se esperaba, los índices positivamente asociados con el sesgo mayoritario siempre son maximizados por el método D'Hondt y minimizados por el método Adams, lo contrario sucede con el número de partidos representados. El orden en el que aparecen las frecuencias es en todos los casos el orden esperado, también con las inconmensurabilidades esperadas entre cuotas y divisores (P3). Debe destacarse, a su vez, el pronunciado carácter 'mediano' del comportamiento del método de Sainte-Laguë en la comparación, así como, en menor medida, el del método Hare. Los gráficos 8.1 y 8.2 resaltan la posición central de ambos métodos, por lo que se refiere a la concentración de escaños, frente a las variedades extremas de cada una de sus familias. La misma pauta se encuentra en los otros dos indicadores, el tamaño del mayor partido y el número de partidos con escaños. Puede observarse que el comportamiento del método Hare es muy parecido al del método Sainte-Laguë (P5, P6). Por otra parte, las frecuencias de los métodos D'Hondt y Adams aumentan o disminuyen monótonamente en cada rango; no así los métodos de cuota aumentada y disminuida, que se encuentran bastante próximos a la cuota simple.

Gráfico 8.1. Frecuencia con las que las fórmulas quedan ordenadas en distinas posiciones por el índice de concentración de escaños (HH)

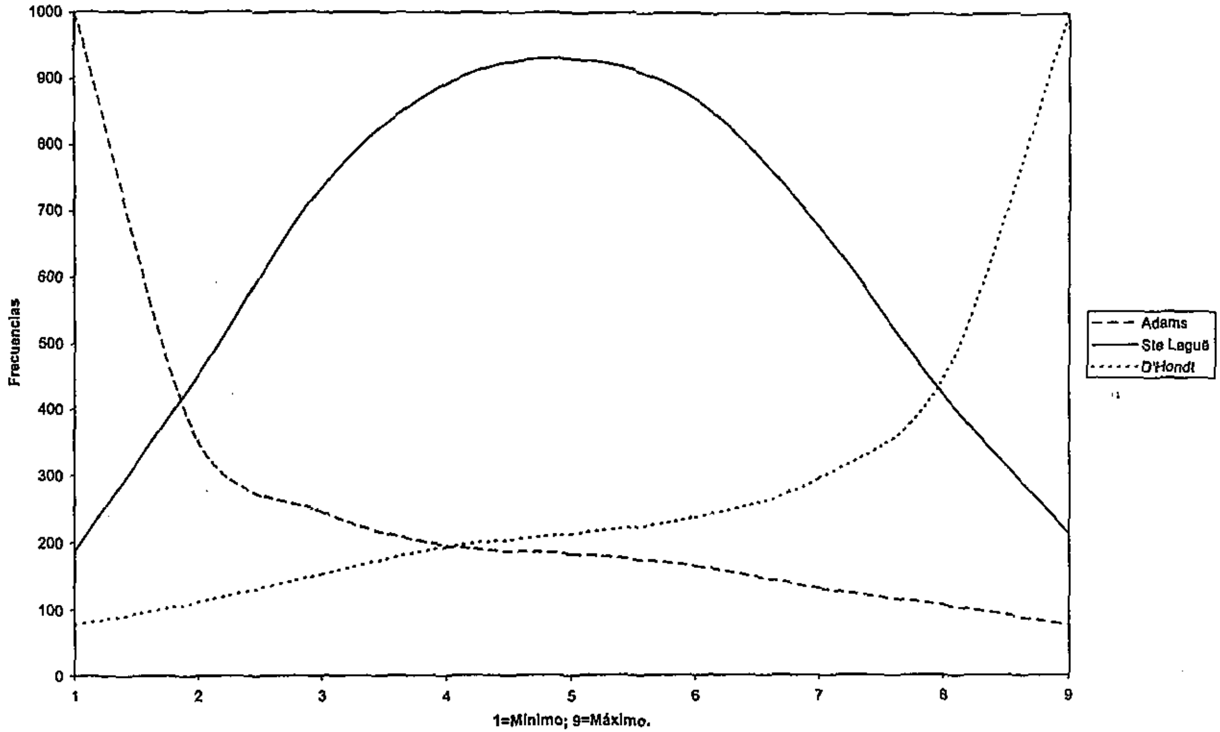
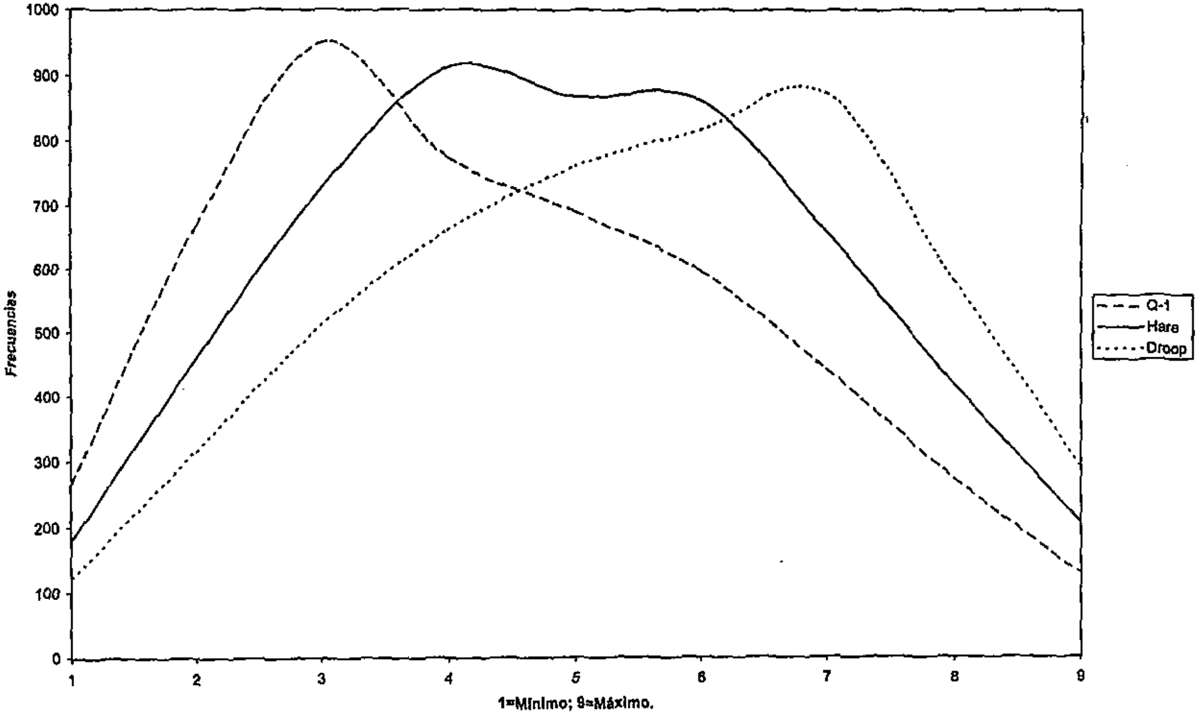


Gráfico 8.2. Frecuencia con las que las fórmulas *quedan ordenadas* en distintas posiciones por el índice de concentración de escaños (HH).



Resulta evidente que los datos mostrados en los cuadros 8.1 a 8.4 corroboran de modo preciso e indiscutible el orden establecido en las proposiciones P1 y P2. La dificultad consiste en ordenar a las dos familias conjuntamente e insertar, además, un cuerpo extraño como la fórmula de Sainte-Laguë modificada. El orden más frecuente, ordenando las fórmulas de menor a mayor sesgo mayoritario, es el siguiente:1° Adams; 2° danesa; 3° Q-1; 4° Sainte-Laguë/ Hare; 5° Sainte-Laguë modificada; 6° Droop; 7°D+0,75; 8° D'Hondt. Este ordenamiento no es precisamente una gran sorpresa, sino exactamente el que uno esperaría encontrar. Lo más destacado es que la cuota Droop resulta menos sesgada no sólo que la fórmula D'Hondt, cosa que es sabida, sino que una fórmula intermedia entre D'Hondt y Sainte-Laguë, encontrándose así bastante más alejada de la primera de lo que, por ejemplo, Gallagher (1992) supone.

La comparación del comportamiento de los distintos métodos por lo que se refiere a los indicadores de concentración y dispersión de escaños corrobora empíricamente lo que podíamos anticipar por deducción, lo que nunca es poco. Además, da una medida bastante clara del grado de proximidad de las dos fórmulas centrales, las grandes candidatas al título de 'máximamente proporcionales'. Por último, nos enseña que las modificaciones de los métodos de cuota no se alejan demasiado de la cuota simple, mientras que los métodos de divisores, aun si limitamos su gama a los métodos proporcionales, permiten una variación mucho mayor.

Los cuadros 8.5 y 8.6 presentan, finalmente, la frecuencia con la que cada método obtiene un cierto rango en la comparación de los indicadores de desviación. El cuadro 8.5 compara los valores del índice de Loosemore y Hanby mientras que el cuadro 8.6 recoge los resultados para el índice de desviación distributiva de Monroe. Tal y como era de esperar, la información de ambos indicadores es esencialmente la misma.

Cuadro 8.5. Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza el índice de desviación agregada de la proporcionalidad (*D*), lo maximiza o queda situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas)

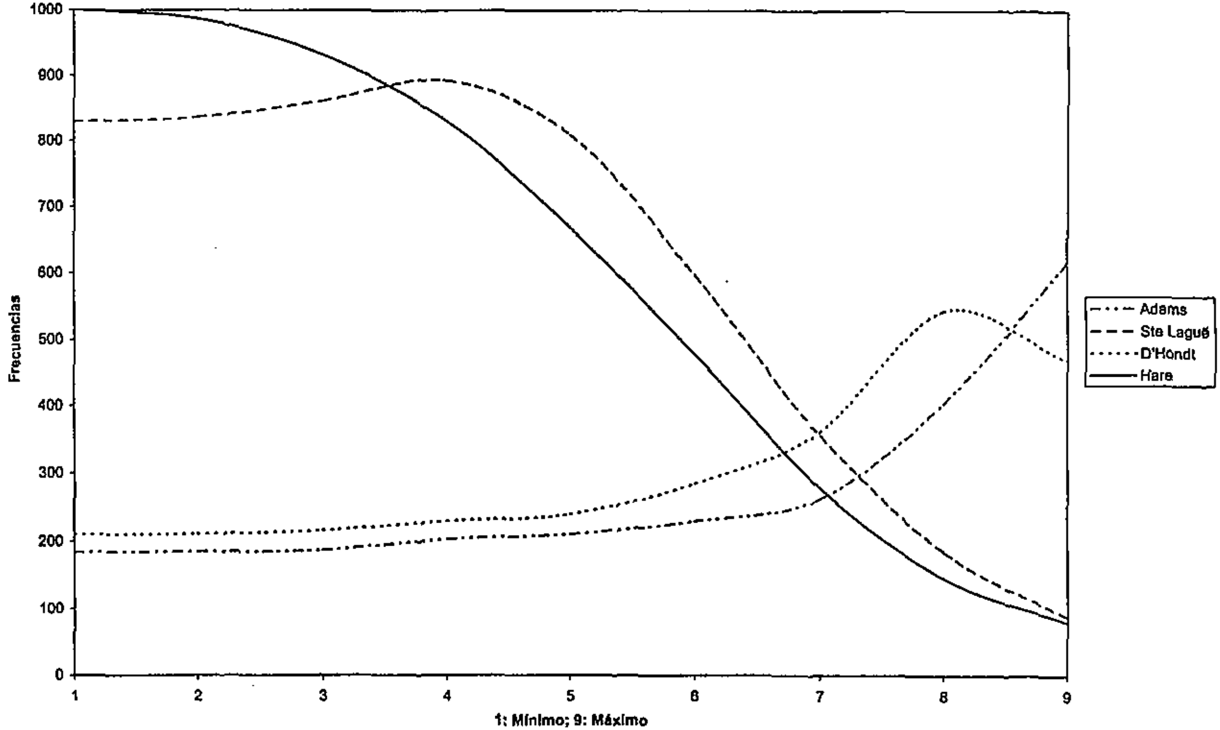
	Adams	Danesa	Ste Laguë	D+ 0,75	D'Hondt	Ste Laguë (mod)	Q-1	Hare	Droop
Mínimo	184	505	829	438	210	746	735	1000	757
8°	185	510	836	442	211	753	741	987	766
7°	187	528	862	453	216	780	760	932	757
6°	203	524	893	460	230	838	737	831	764
Mediano	211	557	810	492	240	805	688	669	703
4°	230	576	598	570	285	670	553	479	573
3°	264	524	357	669	363	392	363	279	393
2°	405	328	186	397	544	203	236	147	229
Máximo	617	137	88	151	470	92	126	80	119

Cuadro 8.6. Frecuencia con la que cada una de las fórmulas minimiza el índice de desviación distributiva de la proporcionalidad (D_p), lo maximiza o queda situada en cualquier posición intermedia (frecuencias absolutas)

	Adams	Danesa	Ste Laguë	D+ 0,75	D'Hondt	Ste Laguë (mod)	Q-1	Hare	Droop
Mínimo	183	501	830	440	209	749	729	1000	757
8°	184	506	836	444	210	756	736	987	765
7°	187	525	864	454	215	783	756	931	755
6°	203	525	888	462	229	835	738	829	762
Mediano	210	555	810	494	240	806	688	670	705
4°	228	572	599	572	285	671	552	479	573
3°	262	525	356	671	362	391	363	278	392
2°	405	328	185	395	544	202	235	145	228
Máximo	619	136	88	151	466	92	125	79	119

Como no podía ser de otra manera, la fórmula Hare minimiza siempre el valor de cualquiera de los dos indicadores de desviación (P4). El segundo rango lo ocupa, sin lugar a dudas, el método Sainte-Laguë (P5, P7). Pueden escogerse medidas de desviación en la que estos métodos inviertan sus posiciones, pero la información seguirá siendo la misma, a saber, que cada una de estas dos fórmulas es la que más frecuentemente minimiza la desviación en

Gráfico 8.3. Frecuencia con la que las fórmulas quedan ordenadas en distinta posición por el índice de desviación de la proporcionalidad (D).



sus respectivas familias. La desviación se hace mayor a medida en que las fórmulas se alejan hacia los extremos de la región proporcional. Los métodos proporcionales límite, Adams y D'Hondt, obtienen los "peores" resultados. De nuevo, esto tampoco puede ser una sorpresa. Tal vez sí lo sea el que los resultados de ambos métodos resulten tan parecidos o el que las mayores desviaciones se produzcan en la fórmula más igualitaria (más sesgada hacia la minoría), y no, pese a su mala fama, en la fórmula D'Hondt. Sobre todo, teniendo en cuenta que la distribución de los votos es, en promedio, muy igualitaria. Un resultado similar se encontraba en Pennisi (1998). El gráfico 8.3 resalta las pautas para las fórmulas centrales y para las extremas (P7).

¿Cuál es la segunda fórmula menos proporcional, o la tercera, o la fórmula menos proporcional de los métodos proporcionales? La respuesta simplemente no puede darse, a no ser que se de por bueno un orden que vaya, de más a menos proporcional, del modo siguiente: 1° Hare/ Sainte-Laguë; 2° Droop/ Q-1/ Ste-Laguë modificada; 3° Danesa; 4° D+0,75; 5° D'Hondt/Adams. El orden es manifiestamente absurdo, pues agrupa como próximas o indiscernibles fórmulas que sabemos que son muy distintas, más cuanto más nos alejamos de la proporcionalidad. Si bien la afinidad que muestran las dos primeras en cuanto a la desviación de la proporcionalidad es un refuerzo para su clasificación conjunta, para casi todos los propósitos prácticos o comparativos, clasificar a las dos últimas en una misma categoría simplemente tira toda la información por la borda.

8.1.6. Recapitulación

Se han comparado nueve fórmulas electorales proporcionales con una magnitud constante y grande midiendo sus efectos en mil sistemas de partidos diferentes y se ha proporcionado alguna evidencia para las proposiciones enunciadas más arriba. El orden 'ser al menos tan mayoritario' tiene sentido teórico y empírico. Las fórmulas más proporcionales son las fórmulas centrales dentro de la región de los métodos proporcionales: Hare y Sainte-Laguë; pero la relación 'ser más proporcional que' no induce un orden interesante en la práctica. La fórmula de representación proporcional menos proporcional bien puede ser la fórmula Adams, lo que confirma una conclusión que se desprendía de los datos de Pennisi (1998), quien emplea un muestrario de indicadores de desviación mucho más amplio que el mío. Sin embargo, no deja de ser chocante la similitud entre la fórmula Adams y su imagen especular, el método D'Hondt.

La inconmensurabilidad entre cuotas y divisores no quiere decir que no puedan encontrarse las suficientes afinidades entre fórmulas como para ordenarlas de manera aproximada, para fines comparativos, por su mayor o menor sesgo hacia la mayoría o hacia la minoría. La afinidad entre los métodos Hare y Sainte-Laguë no es sino el caso más pronunciado. Un orden aceptable para las fórmulas, de mayor a menor sesgo hacia la minoría es el siguiente:

1.Adams; 2.Danesa; 3.Q-1;4.Sainte-Laguë/ Hare; 5.Sainte-Laguë modificada; 6.Droop;7.D+0,75; 8.D'Hondt.

8.2. Segundo ejercicio. Comparación de sistemas electorales

8.2.1. Objetivos

El objetivo de este ejercicio es comparar sistemas electorales, es decir, pares [*M*, *F*]. La relación que ordena a los sistemas electorales es "ser al menos tan mayoritario cuando v=v'" ($\succeq_{v'}$), luego el ejercicio compara las distintas reglas con un sistema de partidos constante. El ejercicio debe mostrar que los sistemas se ordenan, es decir, son conmensurables cuando v es v', pero también debe mostrar las continuidades o discontinuidades en cada una de las dos variables. El orden de los sistemas electorales no es una combinación lineal del orden de las fórmulas y la magnitud.

En virtud del principio de equivalencia general entre sistemas electorales, cuando **v** es **v'**, para cada método de cuota existe un método de divisores equivalente. De este modo, en este ejercicio podemos prescindir de los métodos de cuota en la comparación y definir los sistemas electorales como pares [M, c].

8.2.2. Diseño

El ejercicio tiene dos partes. En la primera se adopta como vector **v'** la distribución de los votos en la circunscripción de Barcelona en las elecciones generales de 1996. Se experimenta entonces con 30 magnitudes electorales, desde M=1 a M=30 y con cien métodos de reparto desde $D+\epsilon$ hasta D+100, donde ϵ es un número minúsculo muy próximo a cero . El primer método no es estrictamente igual al método Adams (D+0) aunque sus efectos son casi iguales, a la vez que se evita el problema de indefinición para las situaciones en los que los partidos son más numerosos que los escaños. Los únicos métodos proporcionales representados en la muestra son este método casi-Adams y el método D'Hondt (D+1); el resto de las fórmulas son crecientemente mayoritarias. Tras computarse las asignaciones de escaños con cada uno de los 3.000 sistemas electorales, se han calculado los índices de desviación de la proporcionalidad (*D*) y de concentración de los escaños (*HH*) para cada sistema.

El segundo ejercicio está diseñado para tratar de lograr los resultados más continuos posibles. Se adopta como vector **v'** un vector de 10 partidos con una distribución del voto generada aleatoriamente a partir de una distribución uniforme, de manera que la fragmentación electoral sea pronunciada. A continuación se experimenta con 30.000 sistemas electorales distintos, mediante la combinación de los cien métodos de reparto empleados en el primer ejercicio y todas las magnitudes electorales hasta M=300. Se han calculado los mismos índices que en el ejercicio anterior.

8.2.3. Proposiciones

Las proposiciones que el ejercicio intenta demostrar son las siguientes:

P1. Para cada magnitud electoral, los sistemas electorales pueden ordenarse por su fórmula. El orden es continuo y está representado por c. Cuanto mayor es el término de ajuste, más mayoritario es el sistema. Este orden se refleja en el índice de concentración: cuanto más mayoritario es el sistema, mayor es la concentración de escaños. El índice de desviación no tiene por qué reflejar el orden.

P2. Para cada fórmula electoral, los sistemas electorales no pueden ordenarse por su magnitud. La magnitud no representa a un orden continuo. Existe una tendencia a la disminución de la desviación cuando la magnitud crece, pero una tendencia no es un orden. Igualmente, existe una tendencia a la disminución de la concentración de los escaños cuando la magnitud crece.

P3. Los sistemas electorales son comparables cuando los votos son **v'**, pero el orden no es una combinación lineal de c y M.

8.2.4. Operaciones

La presentación de este ejercicio es exclusivamente gráfica. Se han preparado los gráficos tridimensionales (M, c, indicador) para cada uno de los indicadores en cada uno de los ejercicios. Se presentan secciones transversales y longitudinales.

8.2.5. Resultados

El gráfico 8.4 muestra en tres dimensiones la variación de la concentración de los escaños cuando varían la fórmula y la magnitud electoral. La concentración aumenta de forma continuada cuando la fórmula se hace más mayoritaria. Los tres cortes que presenta el gráfico 8.5, para tres magnitudes distintas, permiten apreciarlo con toda claridad. La concentración tiene, sin embargo, una variación discontinua con la magnitud electoral. Puede decirse que muestra una tendencia al descenso cuando la magnitud aumenta, pero la asociación no es regular ni ordenada. El gráfico 8.6 lo hace evidente al mostrar tres cortes para tres métodos de reparto. La concentración es mínima con la fórmula Adams (en realidad, se trata de una fórmula muy próxima a Adams: $c=\epsilon\to 0$), cualquiera que sea la magnitud electora, pero la concentración alcanza su mínimo absoluto con las magnitudes intermedias, para después volver a tomar valores mayores. La fórmula de tipo mayoritario D+25 (c=25) muestra una clara tendencia al descenso de la concentración cuando crece el número de escaños, pero con altibajos. La fórmula D'Hondt (c=1) es la más irregular de las tres, aunque la tendencia también sea a al baja.

El gráfico 8.7 muestra la variación en el índice de desviación de la proporcionalidad para las 3.000 combinaciones [M, c]. Salta a la vista, en este gráfico, que la máxima desviación electoral se alcanza con la primera fórmula, el método Adams, para después descender rápidamente y comenzar a crecer a medida que las fórmulas se van haciendo más mayoritarias. Ya se había encontrado en el primer ejercicio alguna noticia sobre el hecho de que la fórmula Adams, la menos sesgada hacia la mayoría, podría ser la fórmula menos proporcional de las proporcionales. Aquí encontramos evidencia de que algunos sistemas electorales que emplean el método Adams son considerablemente menos proporcionales incluso que los sistemas mayoritarios. En todo caso, el método D'Hondt aparece sistemáticamente como más proporcional (no se han tomado en consideración métodos intermedios entre cero y uno).

El gráfico 8.8 presenta tres cortes longitudinales para tres valores distintos de la magnitud electoral. Puede observarse que los resultados son menos proporcionales a medida que las fórmulas se adentran en la región mayoritaria. De no contar con un exponente de fórmula de sesgo igualitaria (aunque, por repetirlo otra vez, proporcional, la fórmula Adams) el orden de las fórmulas por un criterio de proporcionalidad sería perfectamente regular: menor término de ajuste, mayor proporcionalidad.

El gráfico 8.9, sin embargo, vuelve a mostrar que las variaciones en la magnitud no inducen variaciones monótonas en los sistemas electorales. Como en el caso de la concentración, puede decirse que hay una tendencia al aumento de la proporcionalidad cuando la magnitud aumenta, pero no sin grandes altibajos, que, en el caso de la fórmula Adams, pasan por la máxima desviación.

Las discontinuidades encontradas no son un producto de la distribución de los votos escogida. Los valores de los índices varían de modo más continuo si los votos están más uniformemente distribuidos, pero la magnitud no induce por ello un orden. El segundo ejercicio experimenta con una distribución del voto muy uniforme y con magnitudes electorales mucho mayores. La tendencia hacia una mayor proporcionalidad cuando la magnitud crece queda perfectamente subrayada.

El gráfico 8.10 muestra la variación en la concentración de los escaños en todos los sistemas electorales. Debe observarse que ni siquiera con fórmulas muy mayoritarias se alcanza la máxima concentración en el eje de las fórmulas; se harían necesarios métodos de reparto con términos de ajuste de dimensiones astronómicas para reproducir la 'pared' que siempre encontramos en el eje de la magnitud, cuando esta es mínima. Esto se debe, simplemente, a la baja concentración de la distribución del voto. La concentración desciende con la magnitud, con los altibajos anticipados, bien que bastante más suavizados, y tiende a estabilizarse cuando el número de escaños es muy grande. El gráfico 8.11 reproduce los datos del índice de desviación y pautas similares.

Gráfico 8.4. Concentración de escaños en 3000 sistemas electorales. V=distribución en Barcelona en 1996.

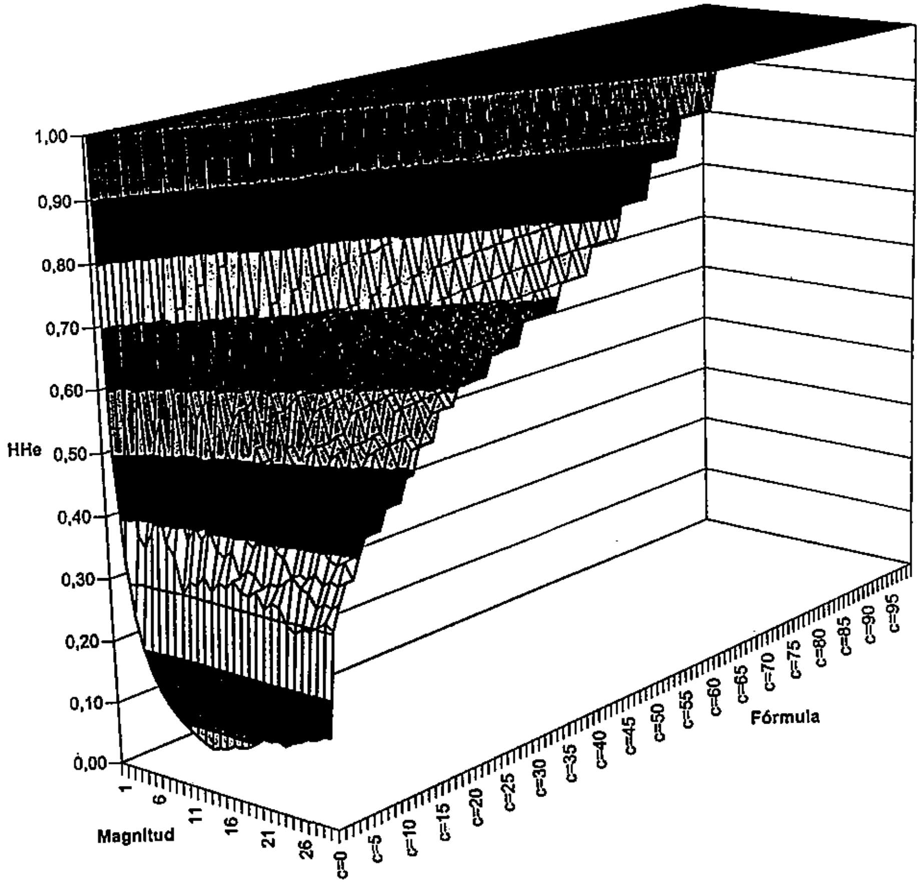


Gráfico 8.5. Evolución de la concentración de escaños cuando varía la fórmula electoral.

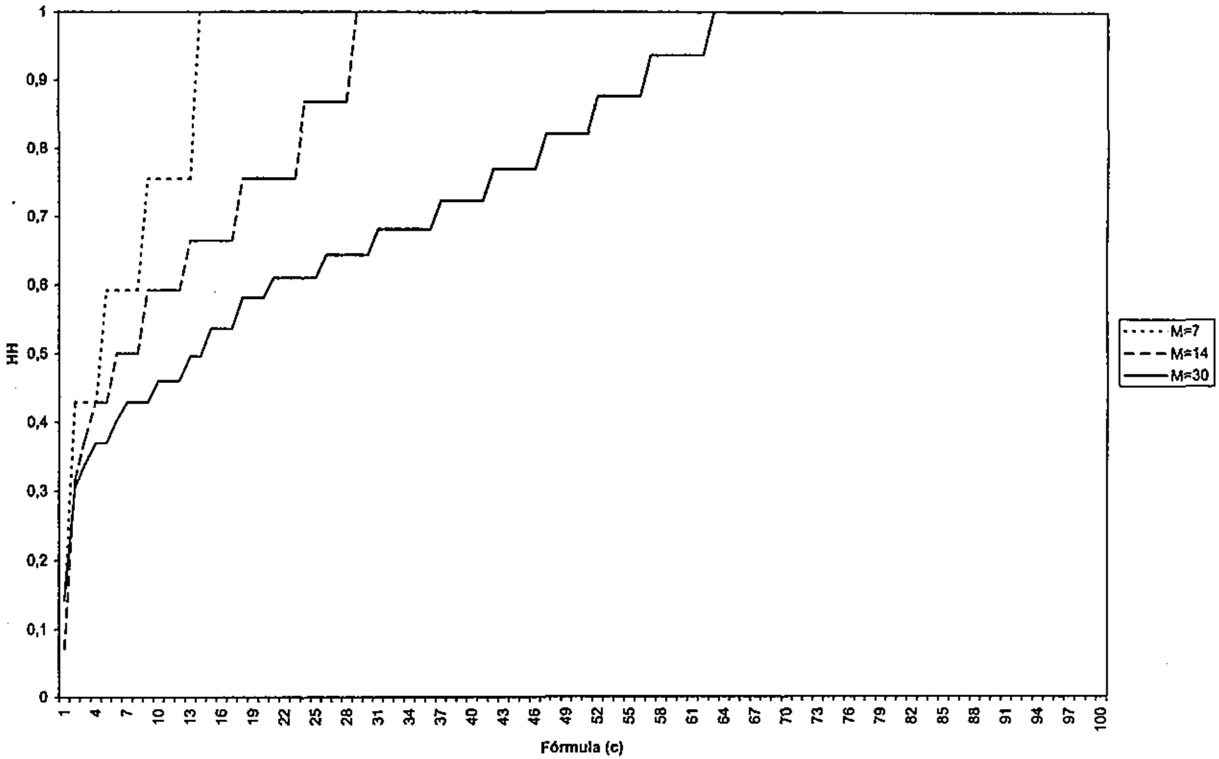


Gráfico 8.6. Evolución de la concentración de escaños cuando varía la magnitud electoral

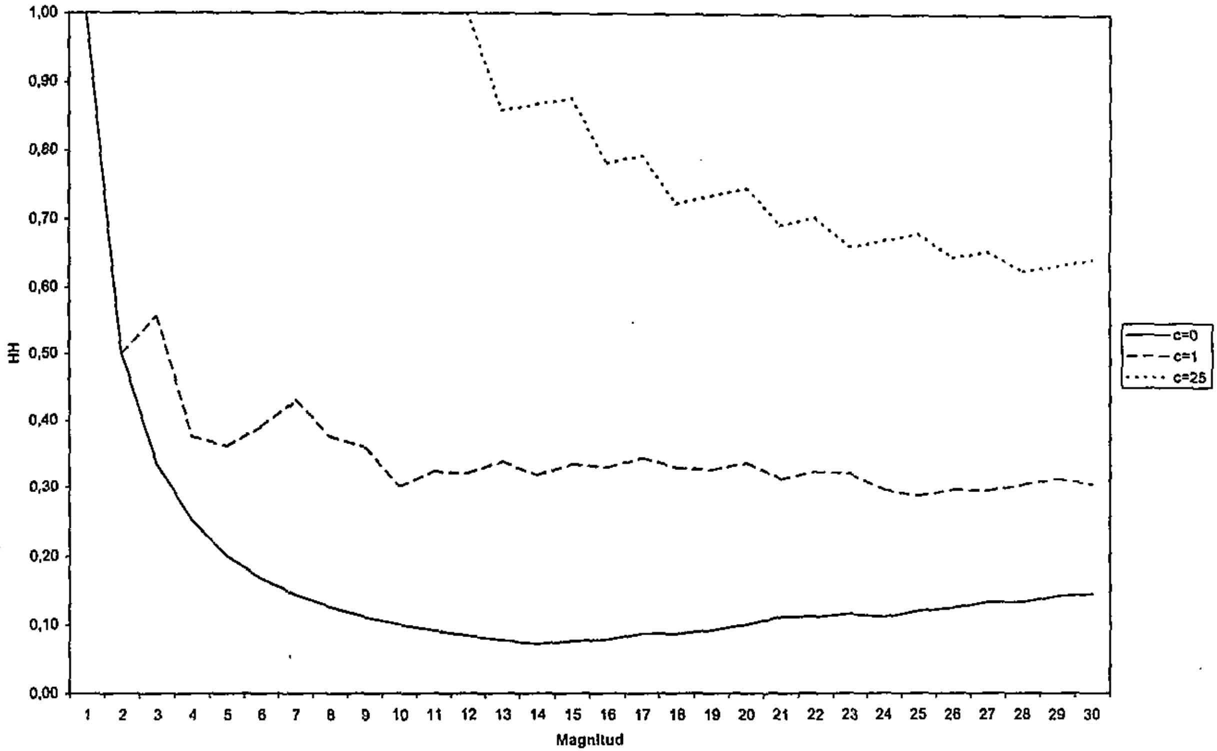


Gráfico 8.7. Desviación de la proporiconalidad en 3.000 sistemas electorales. V= distribución del voto en Barcelona en 1996.

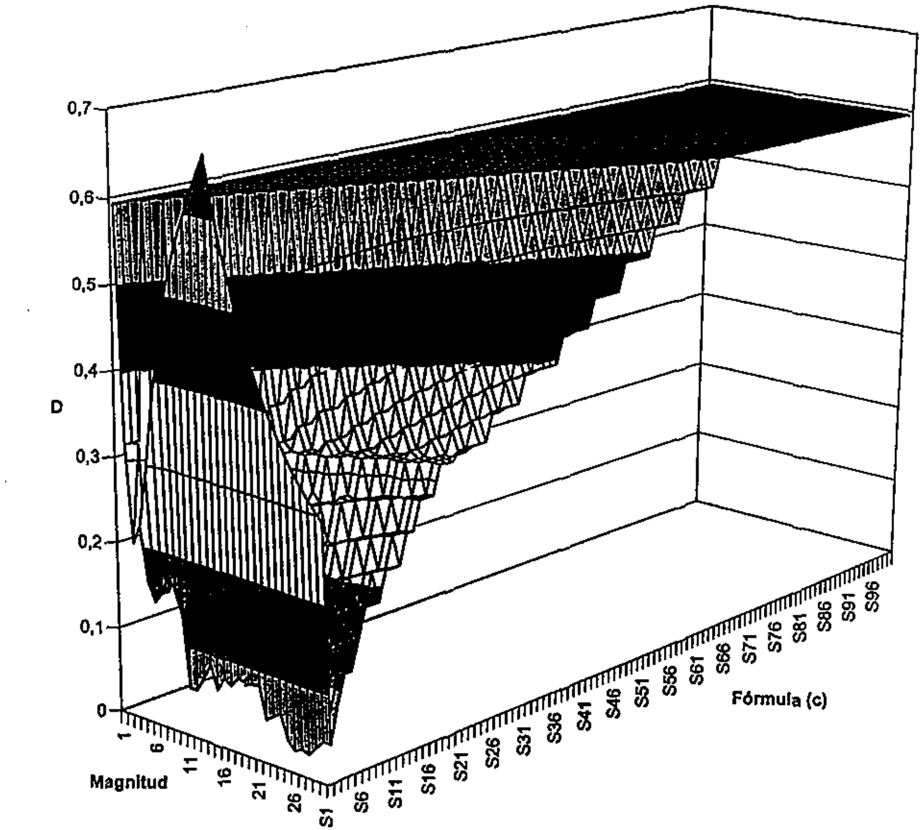


Gráfico 8.8. Evolución de la desviación de la proporcionalidad cuando varía la fórmula electoral.

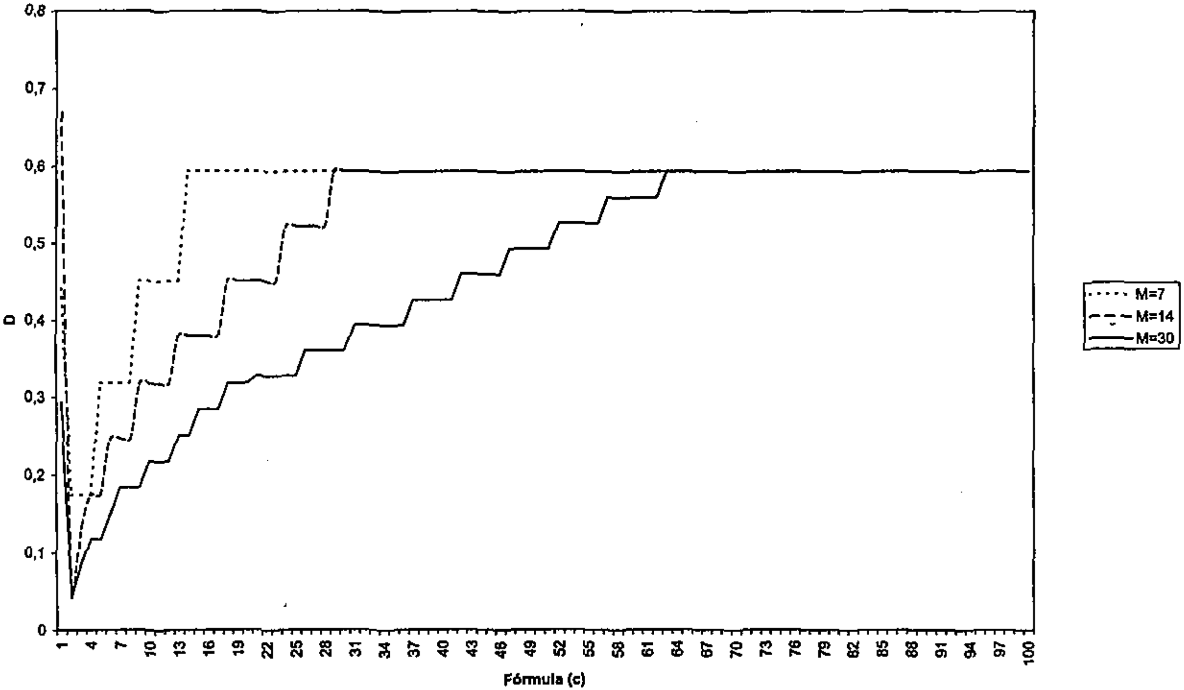


Gráfico 8.9. Evolución de la desviación de la proporcionalidad cuando varía la magnitud.

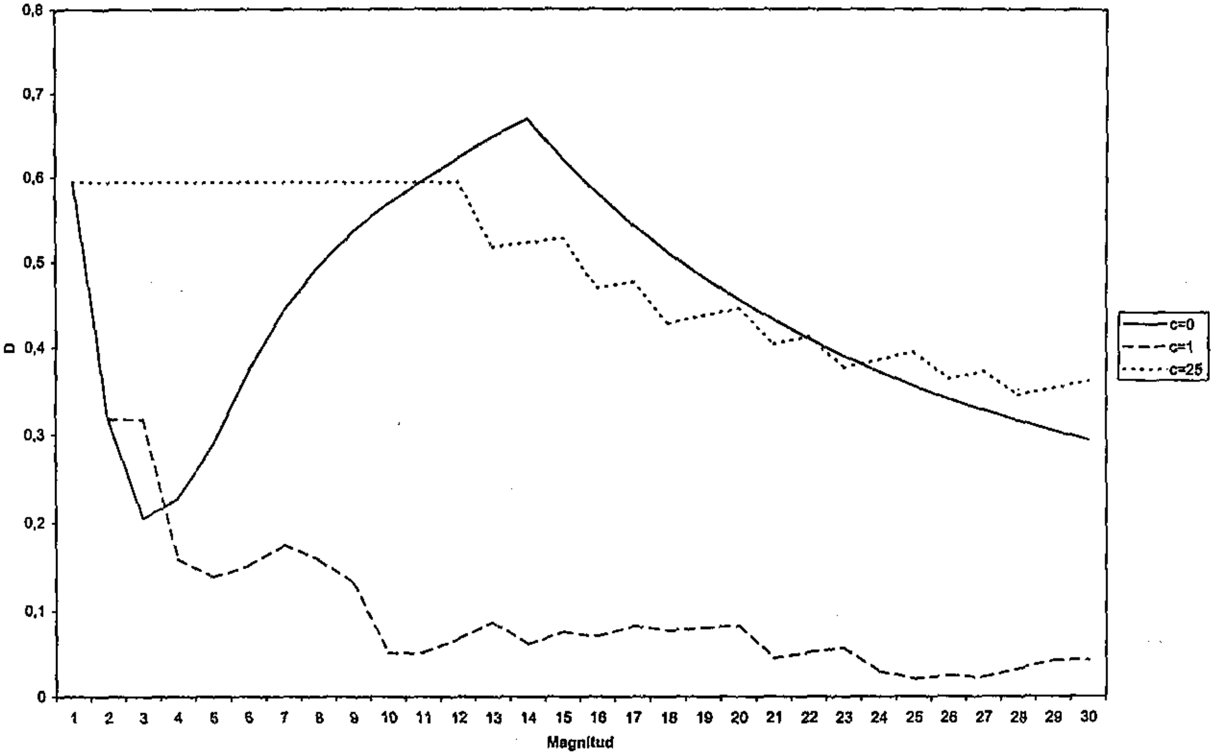


Gráfico 8.10. Índice de concentración de escaños en 30.000 sistemas electorales. V=cte aleatoria.

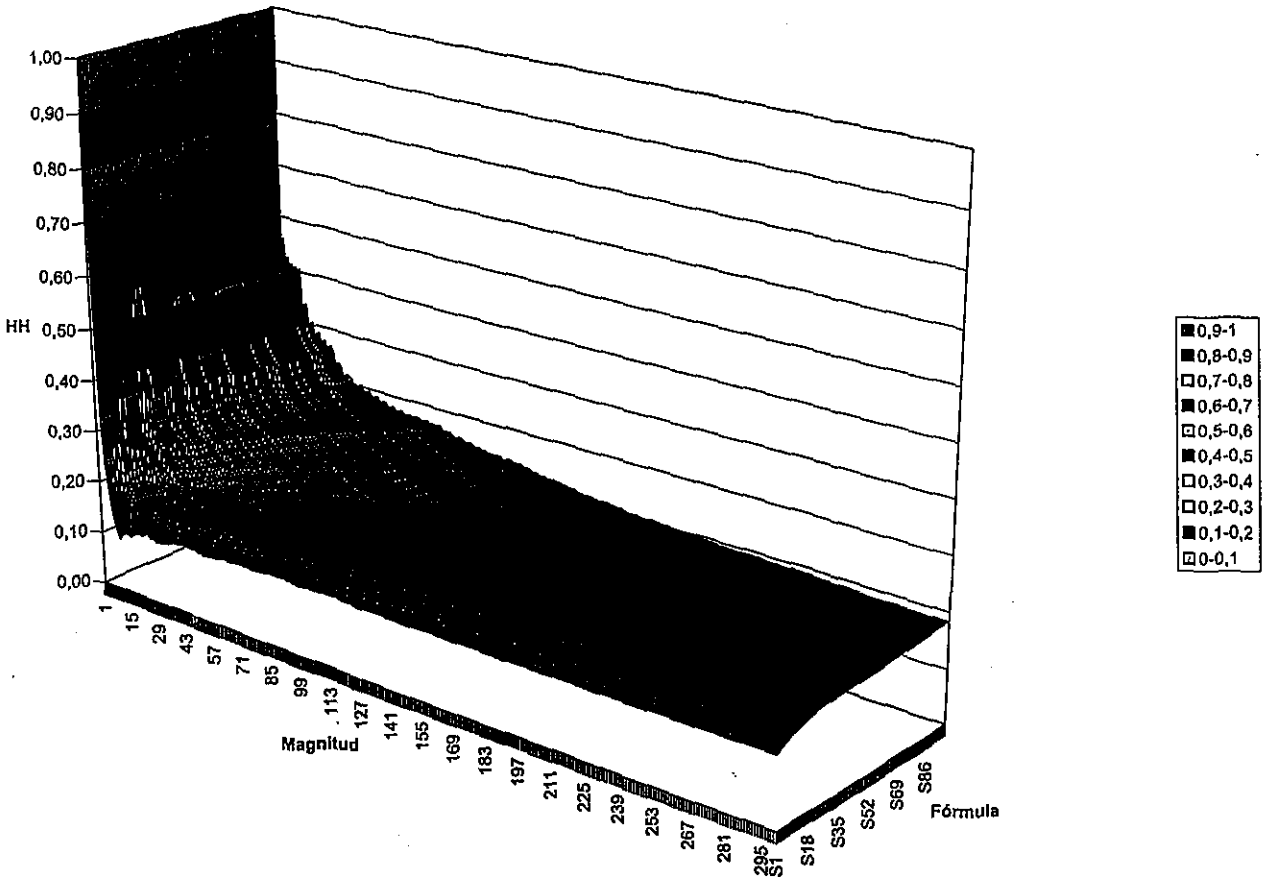
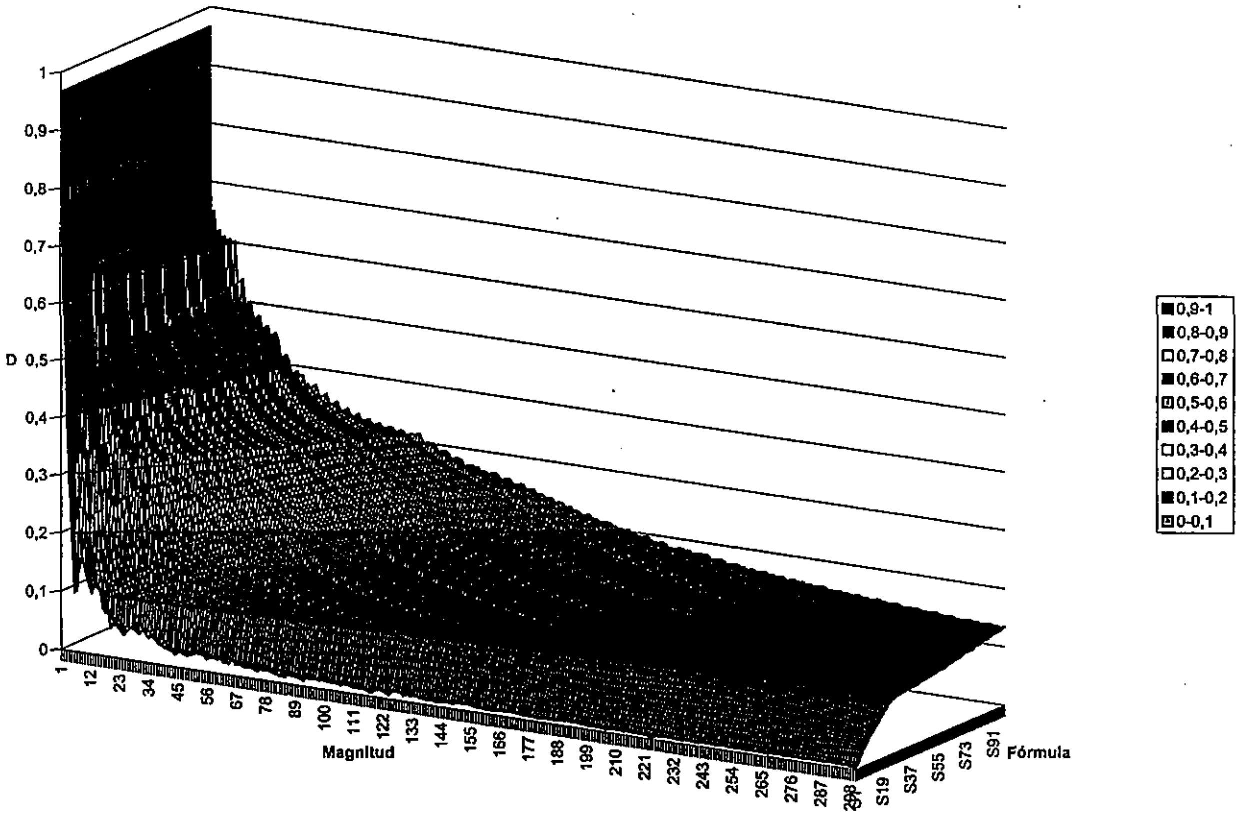


Gráfico 8.11. Índice de desviación de la proporcionalidad en 30.000 sistemas electorales. V=cte aleatoria.



8.2.6. Recapitulación

La presentación gráfica de los valores de un índice de desviación y otro de concentración para múltiples sistemas electorales muestra la continuidad en el orden de mayoría por lo que respecta a las fórmulas y la discontinuidad por lo que respecta a la magnitud electoral.

Cuanto mayor es el término de ajuste *c* en un sistema, dada la magnitud, más mayoritaria es la distribución de los escaños. Esta relación se refleja nítidamente en el índice de concentración de los escaños, pues el índice tiene valores más mayoritario es el reparto. En la primera parte del ejercicio se comprueba cómo para un problema de distribución existe siempre una fórmula electoral con un término de ajuste finito que produce un reparto mayoritario, esto es, la máxima concentración de escaños. En la segunda parte se ha buscado una distribución de votos muy uniforme, por lo que los incrementos en el índice de concentración, cuando el término de ajuste aumenta, son marginales. En este caso, sólo una fórmula con término de ajuste que se aproxima al infinito produciría un reparto mayoritario (recuérdese que el término de ajuste infinito se requiere para producir un reparto mayoritario entre partidos iguales). El término de ajuste también induce una mayor desviación en la proporcionalidad, pero sólo a medida que nos alejamos de la región proporcional ($0 \leq c \leq 1$). La mínima desviación no se alcanza con el mínimo término de ajuste.

Dada una fórmula electoral, el incremento de la magnitud induce una tendencia a la disminución en la concentración de escaños y la desviación de la proporcionalidad. Sin embargo, la variación no es monótona o continua, sino que, especialmente con algunas fórmulas, está plagada de altibajos. La mínima magnitud convierte a todos los sistemas electorales en equivalentes y produce la máxima concentración o resultado máximamente mayoritario, pero la concentración no disminuye de modo continuo al aumentar el número de escaños a repartir. De otro lado, el resultado máximamente mayoritario ni siquiera coincide con la máxima desviación de la proporcionalidad. La primera parte del ejercicio muestra que un reparto mediante fórmula proporcional (pero de tendencia muy igualitaria, como Adams) puede producir desviaciones que, medidas por el sencillo índice de desviación agregada, son más severas que las del reparto mayoritario.

La comparabilidad de los sistemas electorales, no obstante, queda a salvo en la medida en la que los contornos de los gráficos de tres dimensiones, esto es, las combinaciones de c y M que dejan constante un valor del índice, no se crucen.

CAPÍTULO NUEVE

CONCLUSIONES

El problema de la representación consiste en asignar un conjunto de enteros a un conjunto de poblaciones. Un sistema electoral elemental, o un sistema de representación elemental, está constituido por un número *M* de escaños y una fórmula electoral *F*. Las fórmulas electorales son funciones de representación bien definidas que cumplen las condiciones de ser anónimas, neutrales, decisivas, monótonas positivas (responsivas no negativas) y homogéneas. Todas las fórmulas electorales dan lugar a un único sistema de representación, el sistema mayoritario, cuando la magnitud es uno.

La proporcionalidad es una propiedad de algunas fórmulas electorales, de aquéllas que producen una distribución perfectamente proporcional cuando esto es posible. No es una propiedad que contribuya a definir a las fórmulas electorales, pues hay fórmulas no proporcionales: mayoritarias e igualitarias. Induce a confusión si el problema de la representación se plantea como un problema de aproximación a la norma de proporcionalidad perfecta. La norma de proporcionalidad perfecta no es un método de representación.

La fórmula mayoritaria simple es el caso límite de una de las dos familias de fórmulas, los métodos de divisores. Las fórmulas de divisores pueden caracterizarse por una función monótona creciente $d(E)$ que proporciona el criterio de ajuste para las fracciones en el proceso de asignación de escaños. Las fórmulas de divisores constantes se caracterizan por una función con la forma $c(E)=E+c$. El término de ajuste c resulta ser una variable decisiva tanto para ordenar y clasificar las fórmulas como para construir las funciones de umbrales de las mismas. Dicho término proporciona la clave de los algoritmos de cálculo que suelen tomarse a manera de descripción de las fórmulas.

Las fórmulas de cuota y restos mayores son necesariamente proporcionales. Esto vale también para las fórmulas de cuota compuestas, aunque no para un tipo de fórmulas limitadas, las fórmulas de cuota q-igualitarias. Las fórmulas de cuota se caracterizan por el modificador *n* del tamaño de la misma. Esta variable permite ordenar las fórmulas de cuota y determinar sus funciones de umbrales.

Cuando el número de partidos se limita a dos, existe un método de divisores equivalente (idéntico) para cada método de cuota y restos mayores. Con más de dos partidos, un método de cuota equivale a distintos métodos de divisores cuando cambia la distribución del voto o el número de escaños que se reparten. Si la competición es multipartidista, no es posible establecer la identidad de dos métodos que empleen técnicas distintas, de cuota y de divisores, sino sólo la relación de **v'**-equivalencia: dada una distribución **v'** de escaños, cada método de cuota puede reducirse a un método de divisores.

Dos fórmulas están conectadas por la relación “ser al menos tan mayoritario” si cada una de ellas presenta un mayor o menor sesgo en favor de la mayoría. La relación induce un orden lineal (asimétrico, transitivo y completo) en el conjunto de las fórmulas de divisores constantes y un orden lineal en el conjunto de las fórmulas de cuota y restos mayores. La relación induce un orden parcial estricto (asimétrico y transitivo, pero no completo) en el conjunto de las fórmulas electorales. El conjunto de las fórmulas electorales está conectado por la relación “ser al menos tan mayoritario cuando **v**=**v'**”, que induce un orden lineal en el mismo.

El continuo ordenado de las infinitas fórmulas puede dividirse en regiones: fórmulas proporcionales, mayoritarias e igualitarias. Existe también continuidad entre las fórmulas electorales y las anti-fórmulas: fórmulas de representación monótonas negativas que siempre están sesgadas en favor de la minoría. Aquí el sesgo no se refiere simplemente a “sobrerrepresentación”, sino al hecho de que la minoría obtiene más escaños que la mayoría.

Es posible formar una tabla periódica de todas las fórmulas de divisores constantes y una tabla periódica de todas las fórmulas de cuota y restos mayores. Como en la tabla periódica, los elementos están ordenados, pueden situarse elementos desconocidos y pueden señalarse regiones de la tabla que marcan cambios cualitativos en el tipo de elemento (proporcional/ mayoritario; fórmula/ anti-fórmula).

Para todas las fórmulas de divisores constantes y para todas las fórmulas de cuota y restos mayores es posible determinar sus funciones de umbrales. Las funciones de umbrales indican los votos necesarios y suficientes (o mínimos y máximos) para alcanzar cada uno de los escaños que se distribuyen en un sistema. Las funciones de umbrales pueden determinarse a partir de sendas funciones generatrices que indican el umbral como función de la magnitud, el número de partidos, el número de escaños del partido y, respectivamente, el tamaño de la cuota o el término de ajuste en la función de divisores. La función generatriz es única cuando los partidos son dos. Las funciones de umbrales pueden invertirse dando lugar a las funciones de pagos, que indican la expectativa mínima y máxima de escaños para cada fracción de los votos.

Las funciones de umbrales tienen algunas propiedades interesantes. En la situación bipartidista, las funciones de umbrales de todas las fórmulas y anti-fórmulas electorales forman un haz centrado en el umbral de mayoría. En la situación multipartidista, las funciones de votos mínimos o necesarios forman un haz centrado en el umbral de mayoría relativa. La única excepción son las peculiares fórmulas q-igualitarias. Las funciones de votos máximos o suficientes tienen distinta forma dependiendo del número de partidos, pero también están constreñidas por un punto común: bien el umbral de mayoría relativa , bien el umbral de exclusión ordinal $1/(M+1)$.

La pendiente de las funciones de umbrales representa el orden “ser al menos tan mayoritario” que conecta a las fórmulas: las fórmulas son más mayoritarias cuanto menor es la pendiente. La pendiente de las funciones de umbrales permite una sencilla interpretación de las regiones del espacio de la representación: son fórmulas proporcionales aquellas cuyas funciones de umbrales no intersecan con la recta de proporcionalidad perfecta; son fórmulas mayoritarias aquellas cuya pendiente es menor que la pendiente de la fórmula D’Hondt; son fórmulas igualitarias aquellas cuya pendiente es mayor que la fórmula Adams.

El problema de que las fórmulas de cuota y divisores no sean, en términos estrictamente procedimentales, conmensurables, puede sortearse recurriendo a métodos indirectos de comparación basados en las asignaciones. En realidad, ésta es la estrategia convencional para comparar fórmulas (o sistemas) electorales en ciencia política. Puede medirse si las asignaciones de una fórmula tienden a aproximarse más o menos a la proporcionalidad perfecta. También puede medirse si las asignaciones de una fórmula se encuentran más o menos concentradas en el partido o partidos mayoritarios. A los resultados se les asigna un número índice. Los números siempre pueden ordenarse.

Para esta empresa, los indicadores más sencillos son tan buenos, o mejores, que cualquiera de las muchas alternativas. La desproporcionalidad puede medirse por el simple índice de desviación de Loosemore-Hanby. El hecho de que esta medida, como muchas otras, sea minimizada por la fórmula Hare, no representa ningún obstáculo teórico ni empírico, sino todo lo contrario. Este índice de desviación es, además, sencillo en su cálculo y en su interpretación. Si se desea un índice con mejores propiedades formales, en particular, un índice que responda siempre a las transferencias de escaños, el mejor índice es el de desviación distributiva de Monroe. Con este índice, sin embargo, se pierde la sencillez de interpretación (y de cálculo) y se obtiene poca información adicional. La concentración puede medirse por el índice de Herfindahl-Hirschman, o por el índice de fraccionalización equivalente. La información sobre la distribución de los escaños (o, en su caso, de los votos) debería completarse con el número de componentes y, si cabe un tercero, el tamaño del mayor partido. Resulta difícil de entender que los estudios electorales suelan dejar de lado el simple número de partidos, pese a tratarse de una dimensión básica de la fragmentación, y se entreguen a discutir medidas complejas cuyo valor añadido sobre las más simples es mínimo.

Manteniendo la magnitud electoral constante, los sistemas electorales son más proporcionales cuanto más próxima está la fórmula a la fórmula central: Hare entre las cuotas, Sainte-Laguë entre los divisores. La relación "ser más proporcional" la podemos identificar con la minimización de los valores de un índice de desviación. Los sistemas son menos proporcionales si la fórmula se aleja de la fórmula central en cualquier dirección: la mayoría o la igualdad. Los sistemas igualitarios pueden ser tan desproporcionales o más que los mayoritarios. La relación "ser más proporcional" no induce ningún orden razonable en las fórmulas electorales. El orden inducido por la relación "ser más mayoritario" entre las fórmulas lo reproduce, de manera previsible, el orden de un indicador de fragmentación para las distribuciones de escaños que son producto de las fórmulas. El número de Herfindahl-Hirschman es un adecuado indicador de "mayoritarismo".

La relación "ser al menos tan mayoritario" induce un orden parcial estricto para el conjunto de los sistemas electorales, pero no conecta todos los sistemas electorales. Los sistemas electorales son comparables manteniendo la magnitud electoral constante. Si la magnitud es uno, todos los sistemas son equivalentes; cuando la magnitud es mayor que uno, los sistemas son más mayoritarios cuanto más mayoritaria es la fórmula. Es común suponer que la desproporcionalidad y el "mayoritarismo" (que se suelen tomar por lo mismo) disminuyen cuando la magnitud aumenta, como si la magnitud permitiera ordenar los sistemas electorales. El incremento de la magnitud correlaciona con una tendencia de los sistemas electorales que emplean una fórmula proporcional a aproximarse a la proporcionalidad perfecta, pero esta tendencia no es un orden. Los aumentos en la magnitud no producen siempre una respuesta en la dirección de aproximar el resultado a la proporcionalidad.

BIBILIOGRAFÍA

Arrow, Kenneth. *Social Choice and Individual Values*. 2 ed. 1951; reimpresión, New Haven: Yale University Press, 1963.

Balinski, Michel L. y H. Peyton Young. *Fair Representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote.* New Haven: Yale University Press, 1982.

Blondel, Jean. *An Introduction to Comparative Government*. London: Weidenfeld&Nicolson, 1969.

Bueno, Gustavo. *Teoría del cierre categorial (Vol 1)*. Oviedo: Pentalfa, 1992.

Coulter, Philip B. "Distinguishing Inequality and Concentration: The Exponentiation Pinciple." *Political Methodology* 10 (1984): 323-35.

________. *Measuring Inequality. A Methodological Handbook*. Boulder: Westview Press, 1989.

Cox, Gary W. *Making Votes Count*. New York: Cambridge University Press, 1997.

________. "SNTV and D'Hondt Are 'Equivalent'." *Electoral Studies* 10, no. 2 (1991): 118-32.

Cox, Gary W. and Matthew Soberg Shugart. "Comment on Gallagher's 'Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems'." *Electoral Studies* 10, no. 4 (1991): 348-52.

Duverger, Maurice. *Los partidos políticos* [Les Parties Politiques]. Trducido por J. Campos y E. González Pedrero. Paris: Armand Colin, 1951; México DF: Fondo de cultura económica, 1957.

Enciclopedia Internacional de las Ciencias Sociales. Madrid: Aguilar, 1974 (ed or 1968). S.v. "Elecciones: Sistemas Electorales," por Stein Rokkan.

Fry, Vanessa and Iain McLean. "A Note on Rose's Proportionaity Index." *Electoral Studies* 10, no. 1 (1991): 52-9.

Gallagher, Michael. "Comparing Proportional Representation

Electoral Systems: Quotas, Thresholds, Paradoxes and Majorities." *British Journal of Political Science* 22 (1992): 469-96.

________. "Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems." *Electoral Studies* 10, no. 1 (1991): 33-51.

Hirschmann, Albert O. *National Power and Structure of Foreign Trade*. Berkeley: University of California Press, 1945.

Jenkins, Stephen. "The Measurement of Economic Inequality." In *Economic Inequality and Poverty*, ed. Lars Osberg, 3-38. Armonk (NY): Sharpe, 1991.

Laasko, Markku and Rein Taagepera. ""Effective" Number of Parties. A Measure with Application to West Europe." *Comparative Political Studies* 12, no. 1 (1979): 3-27.

Lieberson , Stanley. "Measuring Population Diversity." *American Sociological Review* 34, no. 6 (1969): 850-62.

Lijphart, Arend. "Degrees of Proportionality of Proportional Representation Formulas." En *Electoral Laws and Their Political Consequences*, eds. Bernard Grofman and Arend Lijphart, 170-9. New York: Agathon Press, 1986.

________. *Electoral Systems and Party Systems. A Study of Twenty-Seven Democracies, 1945-1990.* New York: Oxford University Press, 1994.

________. "The Field of Electoral System Resarch: A Critical Survey." *Electoral Studies* 4, no. 1 (1985): 3-14.

Lijphart, Arend and Robert W. Gibberd. "Thresholds and Payoffs in List Systems of Proportional Representation." *European Journal of Political Research* 5 (1977): 219-44.

Loosemore, John and Victor J. Hanby. "The Theoretical Limits of Maximun Distortion: Some Analytic Expressions for Electoral Systems." *British Journal of Political Science* 1 (1971): 467-77.

May, Kenneth O. "A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision." *Econometrica*

20 (1952): 680-4.

Molinar, Juan. "Counting the Number of Parties: An Alternative Index." *American Political Science Review* 85 (1991): 1381-91.

Monroe, Burt L. "Disproportionality and Malapportionment: Measuring Electoral Inequity." *Electoral Studies* 13, no. 2 (1994): 132-49.

Pennisi, Aline. "Disproportionality Indexes and Robustness of Proportional Allocation Methods." *Electoral Studies* 17, no. 1 (1998): 3-19.

Rae, Douglas W. *The Political Consequences of Electoral Laws*. 2nd ed. 1967; New Haven: Yale University Press, 1971.

Rae, Douglas W. and Eric. Schickler. "Majority Rule." En *Perspectives on Public Choice*, ed. Dennis C. Mueller, 163-80. New York: Cambridge University Press, 1996.

Rae, Douglas, Victor Hanby and John Loosemore. "Thresholds of Representation And Thresholds of Exclusion." *Comparative Political Studies* 3 (1971): 479-88.

Ramírez, Victoriano. "Fórmulas Electorales. Diseño y simulación de rersultados para elecciones en España." En *El Sistema Electoral Español. Quince años de experiencia*, eds. Douglas Rae y Victoriano Ramírez, 49- 99. Madrid: McGraw-Hill, 1993.

Riker, William H. "Duverger's Law Revisited." En *Electoral Laws and Their Political Consequences*, eds. Bernard Grofman and Arend Lijphart, 19-42. New York: Agathon Press, 1986.

Rose, Richard. "Electoral Systems: A Question of Degree or of Principle?" En *Choosing an Electoral System: Issues and Alternatives*, eds. Bernard Grofman and Arend Lijphart, 73-81. New York: Praeger, 1984.

Sartori, Giovanni. "The Influence of Electoral Systems: Faulty Laws or Faluty Methods?" En *Electoral Laws and Their*

Political Consequences, eds. Bernard Grofman and Arend Lijphart, 43-68. New York: Agathon Press, 1986.

_________. *Parties and Party Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

Schutz, Robert R. "On the Measurement of Income Inequality." *American Economic Review* 41 (1951): 107-22.

Taagepera, Rein. "Effective Number of Parties for Incomplete Data." *Electoral Studies* 16 (1997): 145-51.

_________. "Supplementing the Effective Number of Parties." *Electoral Studies* 18 (1999): 497-504.

Taagepera, Rein and Matthew Soberg Shugart. "Predicting the Number of Parties: A Quantitative Model of Duverger's Mechanical Effect." *American Political Science Review* 87 (1993): 455-64.

_________. *Seats and Votes. The Effects and Determinants of Electoral Systems*. New Haven: Yale University Press, 1989.

Theil, Henri. "The Desired Political Entropy." *American Political Science Review* 63 (1969): 521-5.

Vallès, Josep M. and Agustí Bosch. *Sistemas electorales y gobierno representativo*. Barcelona: Ariel, 1997.

Waldman, Lawrence K. "Measures of Party Systems' Properties: The Number and Sizes of Parties." *Political Methodology* 3 (1976): 199-214.

Wilcox, Allen R. "Indices of Qualitative Variation and Political Measurement." *The Western Political Quarterly* 26 (1973): 325-43.

Wildgen, John K. "The Measurement of Hyperfractionalization." *Comparative Political Studies* 4 (1971): 233-43.